

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12: 531.51

ОБ ОДНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В РАМКАХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А.М.Баранов, Р.В.Бикмурзин*

Получено новое семейство статических решений уравнений Эйнштейна для сферически симметричного шара идеальной жидкости с неоднородным распределением плотности массы. Проведено сравнение с ранее найденным семейством решений на примере моделирования нейтронной звезды.

В работе [1] рассматривалась модель статической сферически симметричной звезды, состоящей из идеальной паскалевой жидкости (с соответствующим ей тензором энергии импульса), а 4-интервал был записан в однородной системе координат:

$$ds^2 = R_0^2 \left[A(x) dt^2 - B(x) (dx^2 + x^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \right], \quad (1)$$

где R_0 — радиус звезды, $A(x)$ и $B(x)$ — временная и пространственная метрические функции соответственно, $0 \leq x \leq 1$ — безразмерная координата, система единиц была выбрана геометрическая, в которой скорость света $c = 1$, а эйнштейновская постоянная $\kappa = 8\pi$.

В работе [1] система уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik} \quad (2)$$

была решена при помощи первоначального определения пространственной метрической функции $B(x)$ (здесь латинские индексы пробегает четыре значения: 0, 1, 2, 3). Применим данную методику для решения аналогичной физической модели, но уже используя другую метрическую функцию $A(x)$, при следующих начальных условиях:

- $A(x)$ — функция монотонно возрастающая;
- функция плотности массы $\mu(x)$ должна вести себя как убывающая и не иметь особенности в центре жидкого шара;
- давление на границе должно быть равно нулю, т.к. снаружи справедливо вакуумное решение Шварцшильда.

1. Решение уравнений Эйнштейна

Вместо функции $B(x)$, как это было в [1], выберем функцию $A_{in}(x)$ за основную для внутреннего решения, представив ее в виде

$$A_{in}(x) = (C_2 + x^2)^k C_1 = Y^k(x) C_1, \quad (3)$$

где k — показатель степени, являющийся вещественным параметром; $Y(x) = (C_2 + x^2)$ (далее в тексте мы будем обозначать функцию $Y(x)$ как Y).

Подставим $A_{in}(x)$ в систему уравнений Эйнштейна (2), расписав их явно как

$$\frac{3}{4} \frac{(B')^2}{B^3} - \frac{B''}{B^2} - \frac{2}{x} \frac{B'}{B^2} = \kappa R_0^2 \mu(x); \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{A'B'}{AB} + \frac{1}{x} \frac{B'}{B} + \frac{1}{4} \frac{(B')^2}{B^2} + \frac{1}{x} \frac{A'}{A} = \kappa R_0^2 B p(x); \quad (5)$$

*© А.М.Баранов, Красноярский государственный университет, bam@lan.krasu.ru; Р.В.Бикмурзин, Красноярский государственный университет, Rustam_B_V@mail.ru, 2006.

$$\frac{1}{2} \frac{A''}{A} + \frac{1}{2x} \frac{A'}{A} - \frac{1}{4} \frac{(A')^2}{A^2} + \frac{1}{2} \frac{B''}{B} + \frac{1}{2x} \frac{B'}{B} - \frac{1}{2} \frac{(B')^2}{B^2} = \varkappa R_0^2 B x^2 p(x). \quad (6)$$

Решение этой системы уравнений и позволяет найти вторую метрическую функцию $B_{in}(x)$, давление $p(x)$ и плотность массы $\mu(x)$:

$$B_{in}(x) = \left[\frac{Y^{(\Lambda-1-k)/2}}{C_4 Y^\Lambda - C_3} \right]^2; \quad (7)$$

$$p(x) = \frac{Y^{k-\Lambda-1}}{8\pi R_0^2} \left[\left(k^2(Y - C_2) - 2C_2(1 + \Lambda) \right) (C_3 + C_4 Y^\Lambda)^2 + \right. \\ \left. + \left(Y(1 + k^2) + C_2(1 + \Lambda - k^2) \right) 4C_3 C_4 Y^\Lambda + 4C_2 C_3^2 \Lambda \right]; \quad (8)$$

$$\mu(x) = \frac{k(C_3 - C_4 Y^\Lambda)}{4\pi R_0^2 Y^{1+\Lambda-k}} \left[\left(3C_2 - \Lambda(Y - C_2) \right) (C_3 - C_4 Y^\Lambda) + 2\Lambda C_3(Y - C_2) \right] - 3p(x), \quad (9)$$

где введено обозначение для нового параметра $\Lambda = \sqrt{1 + 2k^2}$.

Для того чтобы определить константы C_1, C_2, C_3 и C_4 , проведем сшивку внутреннего решения с внешним решением Шварцшильда, метрические функции которого в однородной системе координат выглядят как (см., например, [2])

$$A_{out}(r) = \left(\frac{1 - \frac{C}{r}}{1 + \frac{C}{r}} \right)^2; \quad B_{out}(r) = \left(1 + \frac{C}{r} \right)^4, \quad (10)$$

где $C = M/2$ (M — шварцшильдовская масса тела). Для перехода к безразмерным единицам используем замены $\eta = 2M/R_0$ и $r = xR_0$, η — компактность ($0 \leq \eta \leq 1$). Тогда метрические функции примут вид

$$A_{out}(x) = \left(\frac{4x - \eta}{4x + \eta} \right)^2, \quad B_{out}(x) = \left(\frac{4x + \eta}{4x} \right)^4. \quad (11)$$

Из уравнений гладкой сшивки нетрудно найти следующие выражения для постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 :

$$C_1 = \left(\frac{4 - \eta}{4 + \eta} \right)^2 \left[\frac{8\eta}{k(16 - \eta^2)} \right]^k; \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{k(16 - \eta^2)}{8\eta} - 1; \quad (13)$$

$$C_3 = \frac{2(4(\Lambda + 1) + k\eta)}{(\eta + 4)^2 \Lambda} \left[\frac{8\eta}{k(16 - \eta^2)} \right]^{(1+k-\Lambda)/2}; \quad (14)$$

$$C_4 = \frac{2(4(\Lambda - 1) - k\eta)}{(\eta + 4)^2 \Lambda} \left[\frac{8\eta}{k(16 - \eta^2)} \right]^{(1+k+\Lambda)/2}. \quad (15)$$

Из вышепоставленных граничных условий возникает следующее ограничение на значения параметра k , где нижняя граница определяется из внешнего вида метрической функции $A_{in}(x)$ в явном виде, а верхняя — из условия убывания функции плотности $\mu(x)$ к поверхности:

$$\frac{4\eta}{(16 - \eta^2)} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{80 + 40\eta - 7\eta^2 + \chi}{\eta^3 - 10\eta^2 - 64\eta + 480}. \quad (16)$$

Таким образом, у нас имеется два семейства решений: найденные здесь и в работе [1].

2. Сравнительный анализ решений

Для того чтобы сравнить эти семейства решений друг с другом и построить соответствующие графики, необходимо задать для них одинаковые граничные условия. С этой целью представим показатель степени k как функцию, зависящую от компактности η , радиуса шара R_0 и плотности массы на границе $\mu(x=1)$:

$$k_I = \frac{2\eta^2}{\eta^2 + 6\eta - \mu(1) \cdot 16\pi R_0^2 \cdot \left(1 + \frac{\eta}{4}\right)^6}; \quad (17)$$

$$k_{II} = \frac{16\eta^2}{\eta(48 - \eta^2) - 8\pi R_0^2 \mu(1)(4 - \eta)^2 \left(1 + \frac{\eta}{4}\right)^6}, \quad (18)$$

где k_I и k_{II} суть показатели степени для первого и второго семейств решений соответственно.

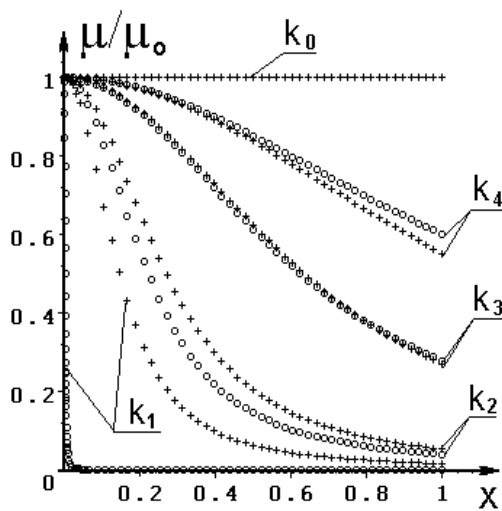


Рис. 1. Графики приведенной плотности $\mu(x)/\mu_0$ при разных значениях k : $k_0 = 2$, $k_1 = 0.0736$, $k_2 = 0.08$, $k_3 = 0.12$, $k_4 = 0.21$

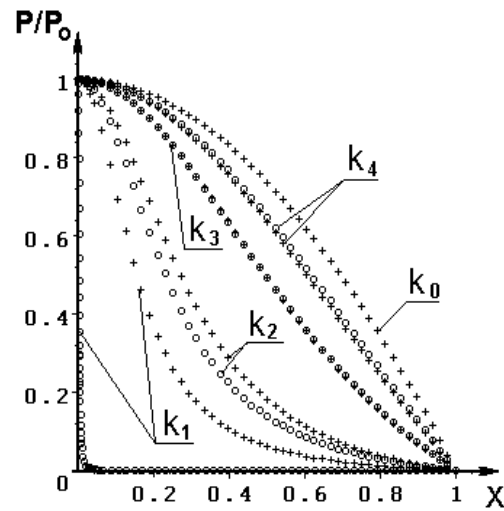


Рис. 2. Графики приведенной плотности $P(x)/P_0$ при разных значениях k : $k_0 = 2$, $k_1 = 0.0736$, $k_2 = 0.08$, $k_3 = 0.12$, $k_4 = 0.21$

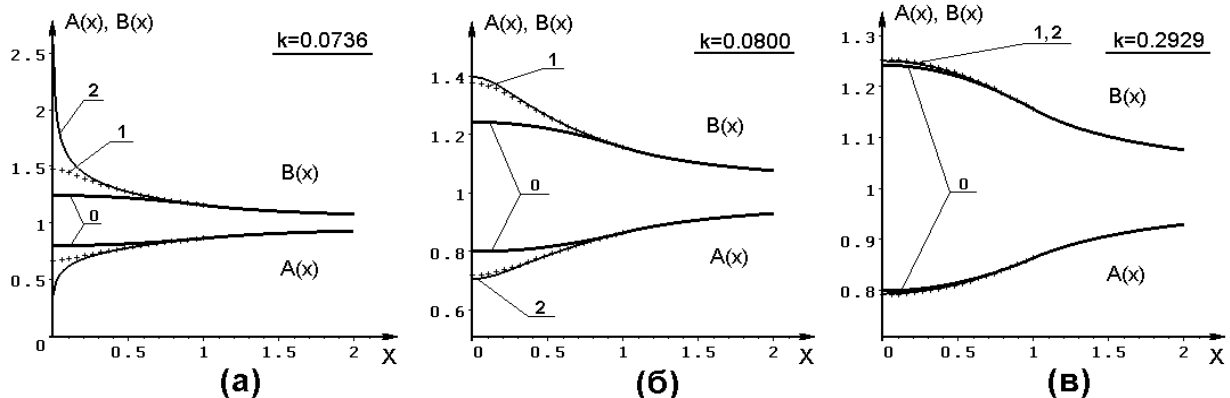


Рис. 3. Графики метрических функций $A(x)$ и $B(x)$ при разных значениях показателя степени k , где 0 — отвечает внутреннему решению Шварцшильда, а 1 и 2 — решениям I-го и II-го семейств соответственно

Дальнейшее сравнение этих семейств между собой заключается в следующем. Для заданного астрофизического типа звезды выбирается подходящее значение компактности η , затем для I-го

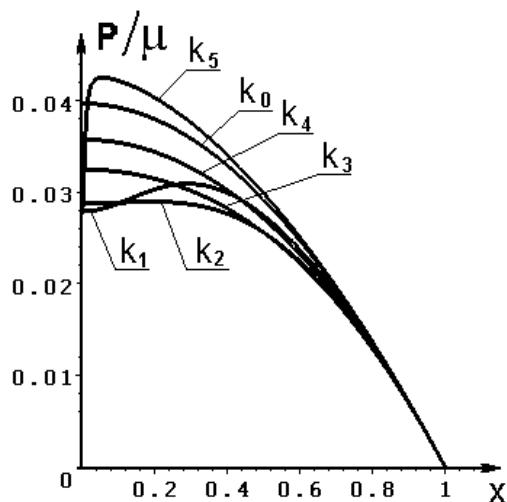


Рис. 4. График жесткости $P(x)/\mu(x)$ для I-го семейства решений при различных значениях k : $k_0 = 2$, $k_1 = 0.0736$, $k_2 = 0.08$, $k_3 = 0.12$, $k_4 = 0.21$, $k_5 = 0.070896$

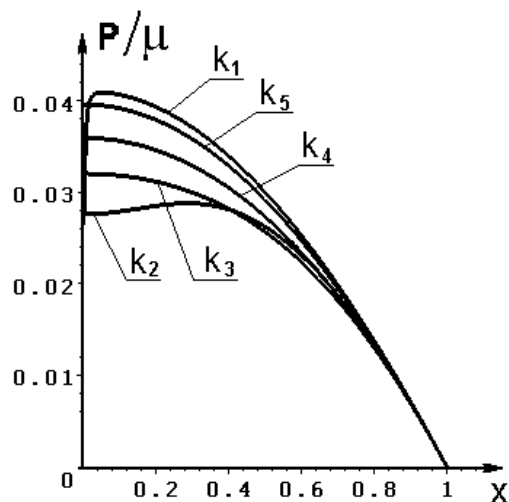


Рис. 5. График жесткости $P(x)/\mu(x)$ для II-го семейства решений при различных значениях k : $k_1 = 0.0736$, $k_2 = 0.08$, $k_3 = 0.12$, $k_4 = 0.21$, $k_5 = 0.6692$

класса (или для II-го, т.к. это не имеет особого значения) выбирается значение показателя степени k из его области допустимых значений. Далее, например, через уравнение (17) связи параметра k_I с граничной плотностью $\mu(x=1)$ получаем значение плотности на границе, а зная эту величину, через уравнение (18) находим значение показателя степени k_{II} , но уже для II-го класса решений. Можно проделать эту процедуру аналогично, начав с уравнения (18).

На примере модели нейтронной звезды (с компактностью $\eta = 0.147$ из [3]) графики приведенных функций плотности $\mu(x)/\mu(0)$ и давления $P(x)/P(0)$, метрических функций $A(x)$, $B(x)$, а также графики жесткости при различных значениях показателя степени k изображены на рис.1-5.

3. Заключение

В настоящей работе в рамках общей теории относительности получено новое семейство статических решений для гравитирующего шара, заполненного идеальной жидкостью с неоднородным распределением плотности массы, отличного от ранее найденного в [1]. Для обоих семейств решений характерно наличие параметра: показателя степени k , позволяющего сравнивать и исследовать эти семейства.

Из полученных графиков для конкретной компактности $\eta = 0.147$, отвечающей нейтронной звезде, видно, что с ростом параметра k поведение метрических функций обоих семейств стремится к поведению метрических функций внутреннего решения Шварцшильда, т.е. предельная модель в этом случае — модель с однородной плотностью массы. Другими словами, с ростом параметра k модель становится более компактной. С другой стороны, поведение жесткости (отношения давления к плотности массы) как для одного, так и для другого семейства решений указывает на физическое сужение области изменения параметра k из физических соображений: не должна нарушаться энергодоминантность, т.е. всегда должно выполняться условие $\mu > \rho$.

Из рис.4-5 следует, что существует нижняя граница значений параметра k как для I-го семейства решений, так и для II-го, чтобы не нарушалась энергодоминантность. Нахождение точного критического значения k в зависимости от параметра компактности η требует дальнейшего исследования.

Список литературы

- [1] БАРАНОВ А.М. *Класс точных внутренних статических решений уравнений тяготения для жидкого шара*/ А.М.Баранов, Р.В.Бикмурзин // Вестник КрасГУ. Сер. физ.-мат. науки. – 2005. – Вып. 7. – С. 58-61.

- [2] МИЦКЕВИЧ Н.М. *Физические поля в общей теории относительности* / Н.М.Мицкевич. – М.: Наука, 1969. – С. 70-71.
- [3] БАРАНОВ А.М. *Моделирование широкого класса статических звезд в рамках одного подхода* / А.М.Баранов, М.В.Луконенко, С.Ф.Тегай // Известия вузов. Физика. – 2002. – №11. – С. 19-23.

**ON ONE STATIC MODEL OF COMPACT ASTROPHYSICAL OBJECTS WITHIN
THE FRAMEWORK OF GENERAL RELATIVITY**

A.M.Baranov, R.V.Bikmurzin

The new static solutions' family of Einstein's equations for a ball filled of the perfect fluid with a nonhomogeneous mass distribution density is obtained. A neutron star's model as a comparative example of present solutions' family and the earlier found family is investigated.