

О РЯДАХ ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ

И.В. Ермилов^{*}

В замкнутом виде вычисляются суммы некоторых простых и кратных рядов, а также значения полных эллиптических интегралов при некоторых значениях модуля.

В настоящей работе исследуется функция $k(x)$, являющаяся решением интегрального уравнения

$$xK(x) = K\left(\sqrt{1-k^2}\right) \quad (k(x) > 0), \quad (1)$$

где $x > 0$, $K(k)$ - полный эллиптический интеграл 1-го рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} dt$$

^{*} © И.В. Ермилов, Красноярский государственный университет, ermilov@lan.krasu.ru, 2006.

Уравнение (1) возникает в теории эллиптических функций. Через его решение выражаются значения многих бесконечных произведений, а также суммы некоторых рядов по гиперболическим функциям и суммы некоторых двойных рядов специального вида (так называемые решеточные суммы). Например:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{-\pi x(2n-1)})^6 = 2e^{-\frac{\pi x}{4}} \left(k(x) \sqrt{1-k^2(x)} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cosech} \pi n x}{n} = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi x}{12} - \frac{1}{6} \ln \frac{1-k^2(x)}{k(x)}, \quad (3)$$

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 + x^2 n^2} = -\frac{2\pi}{3x} \ln 2 + \frac{\pi}{6x} \ln (k^2(x) - k^4(x)) \quad (4)$$

(формула (2) была известна еще Якоби [1], формула (3) имеется в работе [2], формула (4) может быть легко получена из известных результатов для рядов по гиперболическим функциям [2]). Особый интерес в связи с формулами типа (2)-(4) представляют такие значения x , для которых $k(x)$ выражается через значения элементарных функций. Например, если в (1) положить $x=1$, то, очевидно, $k = 1/\sqrt{2}$, т.е. $k(1) = 1/\sqrt{2}$. В [3] доказывается, что

$$k(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1, \quad k(2) = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad k(\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)/2\sqrt{2}.$$

Несколько подобных формул менее простого характера принадлежат Кронеккеру [4]. Общая теорема на эту тему принадлежит Абелю [5].

Если

$$x = \frac{a + b\sqrt{n}}{c + d\sqrt{n}}, \quad (5)$$

где a, b, c, d – целые числа такие, что выражение (5) имеет смысл, то $k(x)$ есть число алгебраическое.

В настоящей работе получено уточнение теоремы Абеля. А именно показано, что если $x = (2^n)^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{2})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{3})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{5})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{6})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \sqrt{3})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot 5)^{\pm 1}$, то $k(x)$ – корень квадратного уравнения с алгебраическими коэффициентами. Таким образом, при указанных значениях x можно явно вычислить $k(x)$. Кроме того, для полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го родов доказаны формулы удвоения, которые позволяют вычислять их в замкнутом виде при некоторых значениях модуля $k(x)$.

В тех случаях, когда не может возникнуть недоразумений, $k(x)$ будем обозначать k ; вместо $K(k(x))$, $E(k(x))$ будем писать $K(x)$, $E(x)$ или просто K, E . Кроме того, как это принято в теории эллиптических функций, через k' обозначим $\sqrt{1-k^2}$, через K' – $K(k')$, а через E' – $E(k')$. Таким образом, штрих не обозначает производную.

Для нас функции k, K, K', E, E' (как функции от x) интересны тем, что через них выражаются суммы многих рядов и бесконечных произведений (см. [6, с. 755-756, с. 721-723]).

Следующее предложение, несмотря на свою простоту, не встречалось автору в литературе. В то же время оно, несомненно, представляет интерес в связи с задачей вычисления в замкнутом виде сумм рядов (как простых, так и кратных).

Предложение 1. *Имеют место следующие формулы дифференцирования:*

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k(1-k^2)K}{x(K-E)-E'}, \quad (6)$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{KE - (1-k^2)K^2}{x(K-E)-E'}, \quad (7)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{(1-k^2)K(E-K)}{x(K-E)-E'}. \quad (8)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (1) по x :

$$K + x \cdot \frac{dK}{dk} \cdot \frac{dk}{dx} = \frac{dK(k')}{dk'} \cdot \frac{dk'}{dk} \cdot \frac{dk}{dx}. \quad (9)$$

Воспользуемся известной формулой [3, с.371]:

$$\frac{dK}{dx} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$k(1-k^2)K = (k^2K' - xk^2K + xK - E' - xE) \frac{dk}{dx};$$

но, в силу (1), $k^2K' - xk^2K = 0$, и, значит,

$$k(1-k^2)K = (xK - xE - E') \frac{dk}{dx},$$

откуда и следует (6).

Формула (7) сразу следует из соотношения

$$\frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dk} \cdot \frac{dk}{dx}$$

и равенств (6) и (10).

Аналогично, (8) вытекает из (6) и известной формулы [3, с. 371]:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}.$$

Предложение доказано.

Формулы (6)-(8) позволяют значительно расширить список рядов, содержащих гиперболические функции, суммы которых могут быть вычислены в замкнутом виде. Возьмем, например, равенство 5.3.6.5 [6, с. 723], которое в наших обозначениях имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sec h^2 \pi n x = \frac{4}{\pi^2} KE. \quad (11)$$

Почленно продифференцировав ряд (11), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \cdot sh \pi n x}{ch^3 \pi n x} = \frac{2}{\pi^3} \cdot \frac{(1-k^2)K^3 - KE^2}{(x(K-E) - E')^2}.$$

В связи с формулами типа (11) особый интерес представляют те значения x , при которых функции $K(k(x))$, $E(k(x))$, $k(x)$ выражаются через значения элементарных функций (а также через значения гамма-функции, которая настолько хорошо изучена, что ее тоже можно считать элементарной). В [3, с. 376-379] доказано, что

$$k(2) = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad k(1) = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad k(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1, \quad k(\sqrt{3}) = 2^{-\frac{3}{2}}(\sqrt{3} - 1) \quad (12)$$

Это является частным случаем общей теоремы [5] о том, что если $x = (a + b\sqrt{n}) / (c + d\sqrt{n})$, где a, b, c, d, n - целые числа, то $k(x)$ - корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Однако это уравнение может иметь высокую степень, и поэтому решить его не удастся (в классической монографии [3] кроме формул (12) имеются еще только три формулы такого типа). Например, из доказываемой ниже формулы (19) легко вывести, что алгебраическое уравнение минимальной степени для $k(1/3)$ имеет вид

$$256k^{16} - 61440k^{14} + 68864k^{12} - 1024 \cdot 1879k^{10} + 32 \cdot 17195k^8 + 256 \cdot 6677k^6 + 16 \cdot 39823k^4 - 1600k^2 + 1 = 0.$$

Найти из этого уравнения $k(1/3)$ не представляется возможным.

Сейчас мы покажем, что при некоторых x , $k(x)$ может быть вычислена на основе известных результатов о решеточных суммах.

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$\ln(k^2 - k^4) = 4 \ln 2 + \frac{6x}{\pi} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 + x^2 n^2}. \quad (13)$$

Доказательство. Исходя из известного тождества Якоби [3, с. 330]

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^6 = 2q^{\frac{1}{4}} (kk')^{-\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

где k есть решение уравнения $q = \exp(-\pi K(k')/K(k))$, нетрудно вывести формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sech} \pi n x = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi x}{12} + \frac{1}{12} \ln(k^2 - k^4) \quad (15)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sech} \pi n x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{e^{-\pi n x}}{1 - e^{-2\pi n x}} = (\text{замена } e^{-\pi x} = q) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_m q^{n(2m+1)} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q^{2m+1})^n}{n} = \\ &= -2 \sum_{m=0}^{\infty} \ln(1 + q^{2m+1}) = -2 \ln \prod_{m=0}^{\infty} (1 + q^{2m+1}) = -\frac{1}{3} \ln \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m-1})^6 = (\text{с.м. (14)}) = \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left(2q^{1/4} (kk')^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi x}{12} + \frac{1}{12} \ln(k^2 - k^4), \end{aligned}$$

где $q = \exp(-\pi K'/K)$ и, следовательно, $xK = K'$ (напомним, что мы делали замену $e^{-\pi x} = q$).

С другой стороны, имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sech} \pi n x = \frac{\pi x}{12} + \frac{x}{2\pi} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 + x^2 n^2}, \quad (16)$$

которое легко выводится из равенства [6, с. 685]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + x^2 n^2} = \frac{1}{2x^2 n^2} + \frac{\pi}{2xn} \operatorname{sech} \pi n x.$$

Сравнив правые части (15) и (16), получим требуемый результат.

Предложение 2 вместе с результатами работы [7] позволяет расширить список формул типа (12). Например, в [7] доказано, что

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 + 9n^2} = -\frac{\pi \ln 2}{3} - \frac{2\pi \ln(2 + \sqrt{3})}{9},$$

и поэтому, в силу (13),

$$\begin{aligned} \ln(k^2 - k^4) &= -2 \ln 2 - 4 \ln(2 + \sqrt{3}), \\ k^4 - k^2 + \frac{1}{4(2 + \sqrt{3})^4} &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что числа

$$\pm \left(\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} + 1} \right)$$

являются корнями последнего уравнения. Теперь среди этих четырех чисел нужно выбрать то, которое равно $k(3)$. По определению $k(x) > 0$, и, следовательно, мы должны выбирать из двух чисел:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} + 1}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} + 1}.$$

Этот выбор можно осуществить, используя следующее утверждение.

Предложение 3. Функция $k(x)$ обладает свойствами:

$$k(x) \text{ монотонно убывает от } 1 \text{ до } 0, \quad (17)$$

$$k^2(x) + k^2(x^{-1}) = 1. \quad (18)$$

Доказательство. Разделив равенство [28, с. 330]

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\pi x(2n-1)}\right)^6 = 2e^{-\frac{\pi x}{4}} k^{-\frac{1}{2}} k',$$

на (15) (в которой надо положить $q = e^{-\pi x}$), получим

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\pi x(2n-1)}}{1 + e^{-\pi x(2n-1)}} \right)^6 = (k')^{\frac{3}{2}} = (1 - k^2)^{\frac{3}{4}}.$$

При $x \in (0, +\infty)$ бесконечное произведение, стоящее слева, монотонно возрастает от 0 до 1. Откуда и следует (17). Формула (18) является тривиальным следствием определения (1) функции $k(x)$.

Предположение 3 позволяет заключить, что $k(3) = k_2$. Таким образом, мы доказали, что

$$k(3) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} + 1}, \quad k(1/3) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} + 1}. \quad (19)$$

Совершенно аналогично (19) могут быть доказаны следующие равенства:

$$k(\sqrt{6}) = (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \quad (20)$$

$$k(\sqrt{7}) = (3 - \sqrt{7})/4\sqrt{2}, \quad (21)$$

$$k(\sqrt{5}) = 2^{-3/2} \sqrt{\sqrt{5} - 1} (\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{5} - 1}). \quad (22)$$

Список формул типа (12), (20)-(22) можно неограниченно увеличивать. А именно имеет место

Предложение 4. Для $k(x)$ справедлива формула удвоения

$$k(2x) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(x)}}{k(x)} \right)^2. \quad (23)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \operatorname{ech} \pi n x}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \operatorname{ech} 2 \pi n x}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \operatorname{ech} \pi x (2n+1)}{2n+1}. \quad (24)$$

Сумма ряда, стоящего в правой части (24), равна $-(1/8) \ln(1 - k^2)$ [6, с. 721]. Левая же часть выражается через $k(x)$ при помощи равенства [8]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \operatorname{ech} \pi n x}{n} = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi x}{12} + \frac{1}{6} \ln \frac{k}{1 - k^2}.$$

Подставляя все это в (24), получим

$$-\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi x}{12} + \frac{1}{6} \ln \frac{k(x)}{1 - k^2(x)} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi x}{6} + \frac{1}{6} \ln \frac{k(2x)}{1 - k^2(2x)} \right) = -\frac{1}{8} \ln(1 - k^2(x))$$

и, после очевидных упрощений,

$$\frac{k^2(2x)}{(1-k^2(2x))^2} = \frac{k^4(x)}{16(1-k^2(x))}. \quad (25)$$

Переобозначив теперь $k^2(2x)$ через y , и $k^2(x)$ через a , приходим к квадратному уравнению

$$\frac{y}{(1-y)^2} = \frac{a^2}{16(1-a)},$$

которое имеет два корня

$$y_1 = a^{-2}(1 + \sqrt{1-a})^4, \quad y_2 = a^{-2}(1 - \sqrt{1-a})^4.$$

Поскольку $a = k^2(x) \in (0,1)$, $y_1 > 1$, и, следовательно, корень y_1 не подходит. Что же касается y_2 , то, как нетрудно проверить, неравенство $0 < a < 1$ влечет за собой неравенство $0 < y_2 < 1$ и поэтому может служить значением функции $k^2(2x)$. Таким образом,

$$k^2(2x) = k^{-4}(x) \left(1 - \sqrt{1 - k^2(x)}\right)^4,$$

что и составляет утверждение предложения 4.

Следствие. *Справедлива формула*

$$k(x/2) = \frac{2\sqrt{k(x)}}{1+k(x)}. \quad (26)$$

Доказательство. В (23) нужно заменить x на $x/2$.

Замечание. Применяя формулы (23), (18), (26), можно получать, хотя и элементарные, но не совсем тривиальные тождества. Например, подставляя в (26) $x = 1/3$ и учитывая (19), находим

$$k(1/6) = \frac{2\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{3} + 1)}}{1 + \sqrt[4]{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

Далее, полагая в (23) $x = 3$, получим (с учетом (19))

$$k(6) = \frac{(1 - \sqrt[4]{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3})^2}.$$

Равенство (18) при $x = 6$ имеет вид

$$\frac{4(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{3} + 1)}{(1 + \sqrt[4]{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2})^2} + \left(\frac{1 - \sqrt[4]{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}\right)^4 = 1. \quad (27)$$

Думается, что задачи типа "упростить выражение, стоящее в левой части (27)" можно предлагать на школьных олимпиадах любого уровня.

Суммируя утверждения, доказанные в п. 2, мы можем сформулировать следующую теорему, уточняющую упоминавшуюся выше теорему Абеля.

Теорема. Пусть $x = 2^{\pm n}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{2})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{3})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{5})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{6})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \cdot \sqrt{7})^{\pm 1}$, $(2^{\pm n} \sqrt{3})^{\pm 1}$.

Тогда $k(x)$ - явно вычисляемое алгебраическое число.

Докажем, наконец, формулы удвоения для функций $K(x)$ и $E(x)$.

Предложение 5

$$K(2x) = \frac{K(x)}{1+k(2x)}. \quad (28)$$

Доказательство. Воспользуемся тождествами Якоби [3, с. 330]

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n x})^6 = 2\pi^{-3} e^{\frac{\pi x}{2}} k k' K^3, \quad (29)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\pi n x})^6 = 4\pi^{-3} e^{\frac{\pi x}{4}} k^{\frac{1}{2}} (k')^2 K^3. \quad (30)$$

Подставив $2x$ вместо x (31) и приравняв полученный результат к правой части (29), после очевидных упрощений получим

$$K^3(2x) = \frac{1}{2} \frac{k k'}{\sqrt{k(2x)(1 - k^2(2x))}} K^3.$$

Заменяв теперь $k(x)$ и $k'(x) = \sqrt{1 - k^2(x)}$ на $k(2x)$ по формуле (260), приходим к (280).

Следствие

$$K(x/2) = (1 + k(x))K(x). \quad (31)$$

Доказательство. Заменяя в (28) x на $x/2$, сразу получаем (31).

Предложение 6

$$E(x/2) = \frac{2}{1 + k(x)} E(x) - (1 - k(x))K(x). \quad (32)$$

Доказательство. Имеют место формулы [6, с. 721]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \operatorname{ech}^2 \pi n x = \frac{1}{6} + \frac{2(2 - k^2)}{3\pi^2} K^2 - \frac{2}{\pi^2} KE, \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \operatorname{ech}^2 \left(\frac{2n-1}{2n} \pi x \right) = \frac{2}{\pi^2} K(K - E). \quad (34)$$

В частности, заменяя в (33) x на $x/2$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \operatorname{ech}^2 (\pi n x / 2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3\pi^2} (2 - k^2(x/2)) K^2(x/2) - \frac{2}{\pi^2} K(x/2) E(x/2). \quad (35)$$

Очевидно, что, складывая левые части (33) и (34), мы получим левую часть (35). Поэтому

$$\frac{2 - k^2}{3} K^2 - KE + K^2 - KE = \frac{2 - k^2(x/2)}{3} K^2(x/2) - K(x/2) E(x/2).$$

Заменяя $k(x/2)$ и $K(x/2)$ по формулам (26) и (31), получаем требуемое.

Следствие

$$E(2x) = (1 - k(2x))K(x) + (1 + k(2x))E(x). \quad (36)$$

Формулы (36), (32), (31), (28) позволяют находить точные значения эллиптических интегралов при некоторых значениях модуля. Насколько нам известно, к настоящему времени найдено только два значения x , при которых $K(x)$ и $E(x)$ выражаются через значения элементарных функций и гамма-функцию: $x = 1$, $x = \sqrt{3}$. Эти четыре интеграла имеются в [3, с. 376, 379, 380]:

$$K(x)|_{x=1} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2(1/4), \quad (37)$$

$$E(x)|_{x=1} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(1/4)} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \Gamma^2(1/4), \quad (38)$$

$$K(x)|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^4\sqrt{27}} \cdot \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)}, \quad (39)$$

$$E(x)|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{12} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{3}} \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)} + 6\sqrt[4]{3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)} \right). \quad (40)$$

Первые три интеграла были вычислены Лежандром в его классической монографии [9], а последний - Рамануджаном [10].

Пример. Применим формулу (28) к равенству (37). Получим

$$K(x)|_{x=2} = (1+k(2))^{-1} K(x)|_{x=1} = (\text{см. (38) и (13)}) = \frac{1}{1+(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2(1/4).$$

Но

$$K(x)|_{x=2} = K(k(2)) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - (\sqrt{2}-1)^4 \sin^2 x \right)^{-1/2} dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\sqrt{2}-1)^4 \sin^2 x}} = \frac{2+\sqrt{2}}{16\sqrt{\pi}} \Gamma^2(1/4).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jacobi Karl G.J. Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum. – Königsberg, 1829.
2. Hautot Andre. New applications of Poisson's summation formula // J. Phys. A.: Math. And Gen. -1975. -16, - №7. -P. 1457-1460.
3. Уиттекер Е.Т. Курс современного анализа. Ч.2. Трансцендентные функции / Е.Т.Уиттекер, Г.Н.Ватсон. - Л.-М.: ГТТИ., 1934. – 468 с.
4. Kronecker L. Berliner Sitzungsberichte. -1862.
5. Abel N.H. // Journal für Math. III. -1881. – P. 377.
6. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. - М.: Наука, 1981. – 797 с.
7. Zucker I.J., Robertson M.M. A systematic approach to the evaluation of $\sum_{m,n \neq 0} (am^2 + bmn + cn^2)^{-s}$ // J. Phys. A.: Math. and Gen. – 1976. – 9, №8, - P. 1215-1225.
8. Hautot Andre. About lattice sums // J. Phys. A.: Math. and Gen. – 1975. – 8, -P. 853-862.
9. Legendre A.M. Exercices de Calcul Integral. – Paris, 1811.
10. Ramanujan S. Collected Papers, Edited by G.H.Hardy, et al. - Cambridge University Press, 1927.

ON SERIES OF HYPERBOLIC FUNCTIONS AND ELLIPTIC INTEGRALS

I.V.Ermilov

In closed form evaluates sums of some series in one and several dimensions, and elliptic integrals for some values module.