

О МЕТРИЗАЦИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

Т.Э. Каминский, А.Л. Крюкова *

В настоящей работе рассматривается возможность задания метрики на множестве интервальных округлений Φ , доказывается теорема о полноте полученного метрического пространства, устанавливается связь между алгебраическими и метрическими структурами на Φ .

Применение процедур округления при решении численных задач в настоящий момент не имеет достаточных теоретических обоснований. Теория округлений на базе интервальной арифметики IR развивается давно. Под интервальным округлением понимается отображение φ из IR в IR, удовлетворяющее трем аксиомам:

- 1) направленности: $(\forall A \in \text{IR})(A \subseteq \varphi(A))$;
- 2) монотонности: $(\forall A, B \in \text{IR})(A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B))$;
- 3) идемпотентности: $(\forall A \in \text{IR})(\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A))$.

Далее будем обозначать $\varphi(\varphi(A)) = (\varphi + \varphi)(A) = \varphi^{[2]}(A)$.

Несмотря на то, что в основу определения положены свойства, которыми должны обладать округления на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, в множестве всех интервальных округлений Φ содержатся некоторые отображения, совершенно не похожие на округления, понимаемые в интуитивном смысле.

Приведем примеры интервальных округлений (I-округлений).

1.

$$\varphi^{(k,l)}([a; b]) = [a_k^-, b_l^+], \quad (1)$$

где a_k^- (b_l^+) – результат обычного (числового) округления a (b) до k -го (l -го) десятичного разряда по недостатку (избытку) (k, l – любые целые неотрицательные числа). Их называют регулярными. Множество регулярных округлений, дополненное тождественным отображением ω и отображениями вида $\varphi^{(k,\infty)}([a; b]) = [a_k^-, b]$ и $\varphi^{(\infty,l)}([a; b]) = [a; b_l^+]$, обозначим $\Phi^{(Z)}$. Частный случай регулярных округлений – отображения вида

$$\varphi^{(k)}([a; b]) = [a_k^-, b_k^+]. \quad (2)$$

Их называют симметрическими.

* Т.Э. Каминский, А.Л. Крюкова, 2006, ВГПУ, krukova@vologda.ru.

2.

$$\varphi_M(A) = [-\max(|a|, |b|), \max(|a|, |b|)]; \quad (3)$$

3. Пусть $U = [u; v]$ – фиксированный отрезок, содержащий нуль. Положим

$$\varphi_U([a; b]) = \begin{cases} [a; b], & [a; b] \cap U = 0, \\ [\min(a, u), \max(b, u)], & [a; b] \cap U \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

4. Выберем действительное число $\delta > 0$ и положим

$$\varphi_\delta([a; b]) = \begin{cases} [\delta; b], & a \geq \delta, \\ [a, -\delta], & b \leq -\delta, \\ [a, b], & [a; b] \cap [-\delta, \delta] \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Не увеличивая числа аксиом, хотим исключить такие отображения, как (3)–(5), из рассмотрения. Ранее в [1] на множестве Φ определялись операции сложения $(\varphi + \psi)(A) = \psi(\varphi(A))$, умножения $(\varphi \cdot \psi)(A) = \varphi(A) \cap \psi(A)$. Относительно умножения множество Φ замкнуто, т.е. алгебра $\langle \Phi, \cdot \rangle$ является полугруппой. Для сложения аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно. Но имеет место

Утверждение 1. Суммы $\varphi + \psi$ и $\psi + \varphi$ I-округлений φ и ψ являются I-округлениями тогда и только тогда, когда φ и ψ коммутируют между собой: $\varphi + \psi = \psi + \varphi$.

В силу утверждения 1 алгебра $\langle \bar{\Phi}, + \rangle$, где $\bar{\Phi}$ – множество всех коммутирующих друг с другом интервальных округлений, содержащее все регулярные округления, является полугруппой. Округления (3), (4) не содержатся ни в какой из коммутативных полугрупп I-округлений, содержащих $\Phi^{(Z)}$. Таким образом, введение на некотором подмножестве множества Φ алгебраической структуры позволяет исключить из рассмотрения, по крайней мере, некоторые округления “патологического” типа.

В настоящей статье предлагается рассмотреть возможность задания метрики на множестве Φ . В [2] рассматривается несколько способов задания метрики на $\mathbb{R}$:

$$\rho(A, B) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|\}, \quad (6)$$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(\underline{a} - \underline{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2}, \quad (7)$$

$$\rho(A, B) = |\underline{a} - \underline{b}| + |\bar{a} - \bar{b}|, \quad (8)$$

где $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$. Множество $\mathbb{R}$ с любым из расстояний (6)–(8) является полным метрическим пространством. Тогда в качестве метрики на Φ можно принять

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_A (\varphi(A), \psi(A)), \quad (9)$$

где $\varphi, \psi \in \Phi$, действующие следующим образом на интервал $[a, b]$: $\varphi([a, b]) = [a_\varphi, b_\varphi]$, $\psi([a, b]) = [a_\psi, b_\psi]$, и расстояние между интервалами может пониматься в любом из смыслов (6)–(8). Заметим, что обозначения вида a_φ, b_φ совсем не означают, что результат округления правого (левого) конца зависит только от значения правого (левого) конца аргумента. Так, например, множеству Φ принадлежит (3).

Расстояние (9) является метрикой на Φ . Действительно, аксиомы направленности и монотонности выполняются очевидным образом. Так как (6)–(8) – метрики на $\mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \psi) &= \sup_A (\varphi(A), \psi(A)) \leq \sup_A [\rho(\varphi(A), \chi(A)) + \rho(\chi(A), \psi(A))] \\ &\leq \sup_A (\varphi(A), \chi(A)) + \sup_A (\chi(A), \psi(A)) = \rho(\varphi, \chi) + \rho(\chi, \psi). \end{aligned}$$

Теорема 1. Всякая фундаментальная последовательность интервальных округлений сходится к отображению, удовлетворяющему аксиомам направленности и монотонности.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для случая, когда в задании метрики (9) расстояние между интервалами понимается в смысле (6), так как во всех остальных случаях доказательство проводится аналогичным образом. Пусть $\{\varphi_k\}$ – фундаментальная последовательность интервальных округлений, то есть $(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}) (n, m > N \Rightarrow \rho(\varphi_n, \varphi_m) < \varepsilon)$, иными словами, $\sup_{[a, \bar{a}]} \max\{|\underline{a}_n - \underline{a}_m|, |\bar{a}_n - \bar{a}_m|\} < \varepsilon$, где

$$\varphi_n([\underline{a}, \bar{a}]) = [\underline{a}_n, \bar{a}_n] \quad \text{и} \quad \varphi_m([\underline{a}, \bar{a}]) = [\underline{a}_m, \bar{a}_m]. \quad \text{Тогда} \quad (\forall A) \quad (\max\{|\underline{a}_n - \underline{a}_m|, |\bar{a}_n - \bar{a}_m|\} < \varepsilon), \quad \text{т.е.}$$

$|\underline{a}_n - \underline{a}_m|, |\bar{a}_n - \bar{a}_m| < \varepsilon$, значит, $\{\underline{a}_k\}, \{\bar{a}_k\}$ – фундаментальные и, следовательно, сходящиеся последовательности действительных чисел. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k = \underline{\alpha}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{\alpha}$. Поскольку $(\forall i) (\underline{a}_i \leq \bar{a}_i)$, то и $\underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$, откуда следует, что $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ – интервал.

Определим отображение φ , полагая $\varphi([\underline{a}; \bar{a}]) = [\underline{\alpha}; \bar{\alpha}]$. Легко видеть, что $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$. Покажем, что это отображение удовлетворяет аксиомам направленности и монотонности. Пусть $A = [\underline{a}; \bar{a}]$, $B = [\underline{c}; \bar{d}]$, $\varphi(A) = [\underline{\alpha}; \bar{\beta}]$, $\varphi(B) = [\underline{\gamma}; \bar{\eta}]$. В силу монотонности любого округления последовательности $\{\varphi_k\}$ можно записать

$$a_k \leq a \leq b \leq b_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq a \leq b \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_k, \quad [a; b] \subseteq \varphi([a; b]).$$

Пусть далее $A \subseteq B$, тогда

$$c \leq a \leq b \leq d, \quad c_k \leq a_k \leq b_k \leq d_k, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d_k, \quad [\underline{\alpha}; \bar{\beta}] \subseteq [\underline{\gamma}; \bar{\eta}], \quad \varphi(A) \subseteq \varphi(B).$$

Теорема доказана.

Все дальнейшие рассуждения будут проведены для метрики (9), где расстояние между интервалами понимается в смысле (6), так как во всех остальных случаях они совершенно аналогичны.

Нетрудно видеть, что каждое симметрическое округление φ является непрерывным отображением: $\rho(\varphi(A_1), \varphi(A_2)) < \rho(A_1, A_2) + 10^{-k}$. Согласно аксиоме Архимеда, $(\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}) (n\varepsilon > 10^{-k})$, т.е. можно выбрать $\delta = n\varepsilon - 10^{-k}$, $\delta > 0$ (для каждого фиксированного k). Очевидно, что аналогичное утверждение можно доказать для регулярных округлений.

Теорема 2. *Всякая фундаментальная последовательность непрерывных интервальных округлений сходится к округлению.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ – фундаментальная последовательность непрерывных округлений и $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$. В силу теоремы 1 осталось проверить только выполнение аксиомы идемпотентности. При каждом фиксированном l имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k + \varphi_l)(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_l(\varphi_k(A)),$$

в силу непрерывности φ_l перепишем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k + \varphi_l)(A) = \varphi_l \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(A) \right) = \varphi_l(\varphi(A)).$$

Теперь рассмотрим

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k + \varphi_l)(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l(\varphi(A)) = \varphi(\varphi(A)) = \varphi^{[2]}(A),$$

при условии $l = k$ равенство примет вид $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k + \varphi_k)(A) = \varphi^{[2]}(A)$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k^{[2]}(A) = \varphi^{[2]}(A)$, значит,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(A) = \varphi^{[2]}(A)$. С другой стороны, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(A) = \varphi(A)$. Следовательно, $\varphi^{[2]} = \varphi$. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что фундаментальные последовательности регулярных и симметрических округлений сходятся к тождественному отображению ω , а фундаментальные последовательности U-округлений (4) и δ -округлений (5) сходятся к U-округлению и δ -округлению соответственно.

Метрика (9) связана с операциями, заданными на Φ . Докажем непрерывность операции сложения, то есть для любого $\delta > 0$ такого, что $\rho(\varphi + \psi, \varphi_0 + \psi_0) < \delta$, найдутся такие δ_1 и δ_2 , что $\rho(\varphi, \varphi_0) < \delta_1$ и $\rho(\psi, \psi_0) < \delta_2$. Так как

$$\begin{aligned} \rho(\varphi + \psi, \varphi + \psi_0) &= \sup_A \max \left\{ \left| (\underline{a}_\varphi)_\psi - (\underline{a}_\varphi)_{\psi_0} \right|, \left| (\bar{a}_\varphi)_\psi - (\bar{a}_\varphi)_{\psi_0} \right| \right\} \\ &\leq \sup_A (\psi(A), \psi_0(A)) = \rho(\psi, \psi_0) < \delta_2, \end{aligned}$$

то

$$\rho(\varphi + \psi, \varphi + \psi_0) < \delta_2. \quad (10)$$

Аналогично можно получить $\rho(\varphi + \psi, \varphi_0 + \psi) < \delta_1$. В последнем неравенстве заменим ψ на ψ_0 , тогда оно примет вид

$$\rho(\varphi + \psi_0, \varphi_0 + \psi_0) < \delta_1. \quad (11)$$

Из (10) и (11) запишем $\rho(\varphi + \psi, \varphi + \psi_0) + \rho(\varphi + \psi_0, \varphi_0 + \psi_0) < \delta_1 + \delta_2$. Согласно аксиоме треугольника

$$\rho(\varphi + \psi, \varphi_0 + \psi_0) \leq \rho(\varphi + \psi, \varphi + \psi_0) + \rho(\varphi + \psi_0, \varphi_0 + \psi_0),$$

то есть

$$\rho(\varphi + \psi, \varphi_0 + \psi_0) < \delta_1 + \delta_2.$$

С другой стороны, $\rho(\varphi + \psi, \varphi_0 + \psi_0) < \delta$, а это и означает, что $\forall \delta$ можно выбрать такие $\delta_1 = \delta_2 = \delta/2$, что $\rho(\varphi + \psi, \varphi_0 + \psi_0) < \delta$. Непрерывность операции умножения очевидна. Таким образом, можно сделать вывод, что алгебры $\langle \bar{\Phi}, + \rangle$, $\langle \Phi, \cdot \rangle$ являются топологическими полугруппами.

Следствием теоремы 1 можно считать тот факт, что если $\{\varphi_k\}$ – фундаментальная последовательность непрерывных округлений и $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$, то $(\forall k) (\varphi_k + \varphi = \varphi + \varphi_k)$. Более того, если непрерывное округление коммутирует с каждым членом фундаментальной последовательности, то оно коммутирует и с пределом этой последовательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каминский Т.Э. К теории интервальных округлений / Т.Э. Каминский // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики. – Вологда: Русь, 2000. – С. 23-36.
2. Зюзин В.С. О метризации интервальных множеств $I(\mathbb{R})$, $I(\mathbb{R}^n)$ / В.С. Зюзин // Интервальные вычисления. – 1992. – № 2(4). – С. 39-50.

ON METRIZATION OF INTERVAL ROUNDINGS

T.E. Kaminsky, A.L. Krukova

In this paper, we consider some distances in the set of interval roundings Φ . The set Φ is a complete metric space with any distances considered. Further, we show that algebraic and metric structures of interval roundings are interconnecting.