

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ СОВМЕСТИМОСТИ МЕЖДУ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ АВТОМАТАМИ

М.В. Ветрова, Н.В. Евтушенко, С.В. Жарикова, Н.В. Спицына *

В работе исследуются отношения совместимости между недетерминированными автоматами, которые характеризуют «похожесть» двух автоматов. В отличие от детерминированных автоматов, для которых такими отношениями являются эквивалентность и квазиэквивалентность, спектр отношений совместимости между недетерминированными автоматами значительно шире. Устанавливается ряд соотношений между различными отношениями совместимости.

Отношения совместимости между недетерминированными автоматами, в той или иной мере характеризуют похожесть систем, поведение которых описано двумя автоматами. В отличие от детерминированных автоматов, для которых такими отношениями являются эквивалентность и квазиэквивалентность, спектр отношений совместимости между недетерминированными автоматами значительно шире. Отношения эквивалентности между недетерминированными автоматами обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности и разбивают множество всех автоматов на классы «одинаковых» в интересующем нас смысле автоматов. Отношения порядка и предпорядка дают возможность упорядочить конечные автоматы. В частности, относительно некоторых отношений порядка автоматы образуют полурешетки и решетки. Отношения толерантности рефлексивны и симметричны, но не обладают свойством транзитивности. Существует ряд утверждений, характеризующих взаимосвязь между различными отношениями совместимости.

1. Конечные автоматы

Конечным автоматом или просто автоматом называется пятерка $A = (S, I, O, T, s_0)$, где S – конечное множество состояний с выделенным начальным состоянием s_0 , I – входной алфавит, O – выходной алфавит, и $T \subseteq I \times S \times S \times O$ – отношение переходов. Четверка $(i, s, n, o) \in T$ описывает переход в автомате из состояния s в состояние n под действием входного символа i с выходным символом o . В общем случае в текущем состоянии для данного входного символа может существовать более одного перехода. Если для каждой пары $(i, s) \in I \times S$ существует хотя бы один переход, то автомат называется *полностью определенным*. В противном случае автомат называется *частично определенным* или *частичным*. Автомат называется *детерминированным*, если для любой пары $(i, s) \in I \times S$ существует не более одной пары $(n, o) \in S \times O$ такой, что $(i, s, n, o) \in T$. В противном случае автомат называется *недетерминированным*. Автомат называется *наблюдаемым*, если для любой тройки $(i, s, o) \in I \times S \times O$ существует не более одного состояния $n \in S$ такого, что $(i, s, n, o) \in T$.

Автомат с множеством состояний S , входным алфавитом I и выходным алфавитом O называется *тривиальным*, если отношение переходов пусто, т.е. $T = \emptyset$. Автомат называется *максимальным*, если $(i, s, n, o) \in T$ для каждой пары (i, s) , т.е. в каждом состоянии возможен переход в любое состояние с любым выходным символом.

Отношение переходов обычным образом распространяется на последовательности в алфавитах I и O . Языком или поведением автомата A в состоянии s , обозначаемым: $L_A(s)$, называют множество последовательностей входо-выходных пар в алфавите $I \times O$, получаемых при последовательных переходах из состояния s . Формально язык $L_A(s)$ есть подмножество $(I \times O)^*$, и последовательность $(i_1 o_1) \dots (i_k o_k) \in L_A(s)$, если и только если $\exists n \in S ((i_1 \dots i_k, s, n, o_1 \dots o_k) \in T)$. По определению, пустая последовательность принадлежит языку $L_A(s)$. Язык $L_A(s_0)$ автомата в начальном состоянии s_0 называется языком автомата A и обозначается L_A . Язык тривиального автомата содержит единственную пустую последовательность. Входная последовательность α называется *допустимой* последовательностью автомата A в состоянии s , если существуют состояние n и выходная последовательность β такие, что $(\alpha, s, n, \beta) \in T$. Множество входных последовательностей, допустимых в состоянии s , обозначается далее $\Omega_A(s)$. Множество входных последовательностей, допустимых в начальном состоянии, обозначается Ω_A .

Для каждого состояния s автомата A можно ввести функцию, отображающую множество $\Omega_A(s)$ в множество подмножеств выходных последовательностей: $\beta \in out(s, \alpha)$, если $\exists n \in S [(\alpha, s, n, \beta) \in T]$. Выходная функция в начальном состоянии s_0 обозначается просто $out(\alpha)$. В максимальном автомате каждая входная последовательность отображается в множество всех выходных последовательностей той же длины.

Пусть $A = (S, I, O, TA, s_0)$ и $B = (Q, I, O, TB, q_0)$ – два недетерминированных автомата. Пересечением автоматов A и B называется связный автомат $A \cap B = (S \times Q, I, O, TA \cap TB, s_0 q_0)$, в котором отношение $TA \cap TB$

* © М.В. Ветрова, Томский госуниверситет, 2006, vetrova@webmail.tsu.ru; Н.В. Евтушенко, Томский госуниверситет, 2006, yevtushenko@elefot.tsu.ru; С.В. Жарикова, Томский госуниверситет, 2006, zharikova@elefot.tsu.ru; Н.В. Спицына, Томский госуниверситет, 2006, snv@kitidis.tsu.ru

определено следующим образом: $(sq, i, o, s'q) \in TA \cap TB \Leftrightarrow (s, i, o, s) \in TA \ \& \ (q, i, o, q) \in TB$. Если $S \cap Q = \emptyset$, то объединением автоматов A и B называется автомат $A \cup B = (S \cup Q \cup s0q0, I, O, TA \cup TB, s0q0)$, в котором отношение $TA \cup TB$ определено следующим образом: для любых $p, p' \in S \cup Q$ справедливо $(s0q0, i, o, p) \in TA \cup TB \Leftrightarrow (s0, i, o, p) \in TA$, или $(q0, i, o, p') \in TB$; $(p, i, o, p') \in TA \cup TB \Leftrightarrow (p, i, o, p') \in TA$, или $(p, i, o, p') \in TB$.

2. Отношения порядка и эквивалентности

2.1. Отношения «быть подавтоматом» и равенства

Автомат $B = (S', I', O', TB, s0)$ называется подавтоматом автомата $A = (S, I, O, TA, s0)$, если $S' \subseteq S$, $I' \subseteq I$ и $TB \subseteq TA$.

Особый интерес представляют подавтоматы, у которых входной алфавит совпадает с алфавитом исходного автомата. Множество подавтоматов автомата $A = (S, I, O, TA, s0)$ с входным алфавитом I и выходным алфавитом O образует решетку, в которой наибольшей нижней гранью двух подавтоматов $B = (P, I, O, TB, s0)$ и $C = (Q, I, O, TC, s0)$ автомата A является подавтомат $(P \cap Q, I, O, TB \cap TC, s0)$. Наименьшей верхней гранью подавтоматов B и C является подавтомат $(P \cup Q, I, O, TB \cup TC, s0)$. В данной решетке существует наименьший элемент, а именно, тривиальный автомат с множеством состояний $\{s0\}$. Наибольшим элементом решетки является автомат A .

Отношение «быть подавтоматом» является отношением порядка. Автоматы A и B равны, если A является подавтоматом B , а B – подавтоматом A . Очевидно, что два автомата равны тогда и только тогда, когда совпадают их входные и выходные алфавиты, множества состояний, начальные состояния и отношения переходов.

Отношение равенства является эквивалентностью на множестве автоматов; каждый класс эквивалентности содержит в точности один автомат.

2.2. Отношения эквивалентности и редукции

Отношения редукции и эквивалентности между автоматами характеризуют свойства автоматов с точки зрения конечно-автоматных отображений и соответственно связаны только с автоматными языками. Автомат является редукцией другого автомата, если первый автомат не может преобразовать входную последовательность иначе, чем второй автомат. Если два автомата преобразуют входные последовательности одинаково, то их называют эквивалентными. Области определения выходной функции у эквивалентных автоматов совпадают, и автоматы реализуют одно и то же отображение входных последовательностей в множество подмножеств выходных последовательностей.

Говорят, что состояние q автомата $B = (Q, I, O, TB, q0)$ есть редукция состояния s автомата $A = (S, I, O, TA, s0)$ (обозначается $q \leq s$), если $LB(q) \subseteq LA(s)$. Если состояние q есть редукция состояния s , и состояние s есть редукция состояния q , то состояния q и s называются эквивалентными (обозначение: $q \cong s$). Автомат B есть редукция автомата A (обозначение: $B \leq A$), если начальное состояние автомата B есть редукция начального состояния автомата A , т.е. $LB \subseteq LA$. Автоматы B и A эквивалентны, если эквивалентны их начальные состояния, т.е. B есть редукция A , и A есть редукция B . Для детерминированных полностью определенных автоматов понятия редукции и эквивалентности совпадают.

Отношение эквивалентности разбивает множество всех автоматов на классы, каждому из которых принадлежат все автоматы, реализующие одно и то же конечно-автоматное отображение. Отношение редукции на множестве автоматов с заданными входным и выходным алфавитами рефлексивно и транзитивно, т.е. является отношением квазипорядка или предпорядка. Наибольшая эквивалентность, содержащаяся в отношении редукции, есть отношение эквивалентности между автоматами. Таким образом, отношение редукции является отношением порядка на классах эквивалентности автоматов, которые образуют решетку относительно данного порядка. Класс, содержащий пересечение автоматов-представителей двух классов эквивалентности, есть наибольшая нижняя грань. Класс, содержащий объединение автоматов-представителей двух классов эквивалентности, есть наименьшая верхняя грань. Данная решетка является бесконечной. Однако в решетке существуют наименьший и наибольший элементы: классы, содержащие тривиальный и максимальный автоматы.

Понятия редукции и эквивалентности характеризуют только функциональные и языковые свойства автоматов. В частности, эквивалентными могут быть автоматы, диаграммы переходов которых не могут быть вложены друг в друга. Тем более, эквивалентность двух автоматов не влечет за собой их равенства, хотя равные автоматы, по определению, являются эквивалентными.

Проверка отношений редукции и эквивалентности между автоматами существенно сложнее, чем проверка предыдущих отношений равенства и «быть подавтоматом», т.к. эти отношения определяются на автоматных языках, которые в общем случае являются бесконечными. Для наблюдаемых автоматов соответствующее отношение должно сохраняться между состояниями автоматов, достижимыми по одной входо-выходной последовательности. Все такие состояния представлены в пересечении автоматов. Поэтому можно предложить эффективный алгоритм проверки отношений эквивалентности и редукции на основе пересечения автоматов.

Теорема 1. 1) Автомат B является редукцией наблюдаемого автомата A , если и только если для каждого состояния sq пересечения $A \cap B$ и любого входного символа i , на котором определено поведение автомата B в состоянии q , справедливо $out_{A \cap B}(sq, i) = out_B(q, i)$. 2) Наблюдаемые автоматы B и A эквивалентны, если и только если для каждого состояния sq пересечения $A \cap B$ и любого входного символа i , на котором определено поведение автомата B в состоянии q или автомата A в состоянии s справедливо $out_A(s, i) = out_B(q, i)$.

Теорема 1 дает возможность проверять отношения редукции и эквивалентности только на конечных множествах состояний и входных символов пересечения автоматов. Однако если автомат A не является наблюдаемым, то условия утверждения 1 теоремы становятся только достаточными. Утверждение 2 теоремы становится только достаточным, если наблюдаемым не является автомат A или автомат B . Заметим, что условия наблюдаемости автоматов в теореме 1 не нарушают общности этих утверждений, так как для каждого автомата существует эквивалентный наблюдаемый автомат [1].

Так как любой подавтомат содержит подмножество переходов автомата, то всякий подавтомат является редукцией автомата. Обратное в общем случае неверно: «быть редукцией» является более слабым требованием, чем «быть подавтоматом» [2].

Если автомат B является редукцией автомата A (эквивалентен автомату A), то область определения выходной функции автомата B содержится в (равна) области определения автомата A . В случае, когда автомат A является частичным, т.е. находится в ограниченной внешней среде, последовательности, на которых поведение автомата не определено, никогда не поступают на его вход. Поэтому такой автомат можно заменить любым автоматом, который имеет требуемое поведение только на допустимых входных последовательностях, т.е. автоматом, который имеет большую область определения (например, полностью определенным автоматом) и обладает необходимыми свойствами для заданной ограниченной внешней среды. Такую похожесть конечно-автоматных отображений можно описать посредством отношений квазиэквивалентности и квазиредукции.

2.3. Отношения квазиредукции и квазиэквивалентности

Говорят, что состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ есть *квазиредукция* состояния s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ (обозначается $q \leq s$), если $\Omega_B(q) \supseteq \Omega_A(s)$ и для любой последовательности $\alpha \in \Omega_A(s)$ справедливо $out_B(q, \alpha) \subseteq out_A(s, \alpha)$. Автомат B есть *квазиредукция* автомата A (обозначение: $B \leq A$), если начальное состояние автомата B есть квазиредукция начального состояния автомата A , т.е. $\Omega_B \supseteq \Omega_A$ и для любой последовательности $\alpha \in \Omega_A$ справедливо $out_B(q_0, \alpha) \subseteq out_A(s_0, \alpha)$.

Состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ *квазиэквивалентно* состоянию s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ (обозначается $q \equiv s$), если $\Omega_B(q) \supseteq \Omega_A(s)$ и для любой последовательности $\alpha \in \Omega_A(s)$ справедливо: $out_A(s, \alpha) = out_B(q, \alpha)$. Автомат B *квазиэквивалентен* автомату A (обозначение: $B \equiv A$), если начальное состояние автомата B квазиэквивалентно начальному состоянию автомата A , т.е. $\Omega_B \supseteq \Omega_A$ и для любой последовательности $\alpha \in \Omega_A$ справедливо $out_A(s_0, \alpha) = out_B(q_0, \alpha)$.

Отношения квазиредукции и квазиэквивалентности на множестве автоматов с заданными входным и выходным алфавитами обладают свойствами рефлексивности и транзитивности, т.е. являются отношениями квазипорядка или предпорядка. Наибольшая эквивалентность, содержащаяся в этих отношениях, есть отношение эквивалентности между автоматами. Таким образом, оба отношения являются отношениями частичного порядка на классах эквивалентности автоматов.

По отношению квазиэквивалентности классы эквивалентности образуют решетку. Класс, содержащий пересечение автоматов-представителей двух классов эквивалентности, есть наибольшая нижняя грань. Класс, содержащий объединение автоматов-представителей двух классов эквивалентности, есть наименьшая верхняя грань. Решетка является бесконечной, и в ней не существует наибольшего элемента. Любой класс, содержащий полностью определенные автоматы, является максимальным элементом решетки. Однако в решетке по отношению квазиэквивалентности существует наименьший элемент. Наименьшим элементом является класс, содержащий тривиальный автомат.

Классы эквивалентности по отношению квазиредукции образуют не решетку, а верхнюю полурешетку. Подавтомат объединения автоматов-представителей двух классов эквивалентности, определенный на области определения пересечения этих автоматов, есть наименьшая верхняя грань для этих классов. Однако наибольшая нижняя грань как класс, содержащий пересечение автоматов-представителей двух классов эквивалентности, существует не всегда, поскольку выходная функция пересечения автоматов может быть определена на меньшем множестве входных последовательностей. В решетке существует наибольший элемент, которым является класс, содержащий тривиальный автомат, т.к. по определению любой автомат есть квазиредукция тривиального автомата. Минимальными элементами являются классы, автоматы-представители которых не имеют общих квазиредукций, т.е. классы, которые содержат полностью определенные детерминированные автоматы.

2.4. Связь отношений редукции, эквивалентности, квазиредукции и квазиэквивалентности

Непосредственно из определений отношений редукции, эквивалентности, квазиредукции и квазиэквивалентности вытекает следующее утверждение об их взаимосвязи.

Теорема 2. 1) Для частичных недетерминированных автоматов $(\cong) \subseteq (\leq)$ и $(\cong) \subseteq (\exists) \subseteq (\leq)$. 2) Для полностью определенных автоматов $(\cong) = (\exists)$ и $(\leq) = (\leq)$. 3) Для детерминированных автоматов $(\cong) \subseteq (\leq)$ и $(\exists) = (\leq)$. 4) Для полностью определенных детерминированных автоматов $(\cong) = (\leq) = (\exists) = (\leq)$.

Проверка отношений квазиредукции и квазиэквивалентности осуществляется на основе пересечения автоматов по той же схеме, что и проверка отношений эквивалентности и редукции (теорема 1).

Отношения «быть подавтоматом» и равенства, редукции и эквивалентности характеризуют крайние точки отношений порядка и эквивалентности между автоматами. В первом случае требуется сохранение структуры исходного автомата вплоть до имен состояний, во втором случае структура переходов автомата как таковая нас совсем не интересует. Между ними находится ряд других отношений, которые будут рассмотрены в следующих разделах.

2.5. Гомоморфизмы и изоморфизмы

Автомат можно рассматривать как алгебраическую систему, модель. Одними из важнейших понятий в теории алгебраических систем являются понятия гомоморфизма и изоморфизма [3]. Как обычно, *изоморфизм* ψ между автоматами $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ и $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ называется взаимно однозначное отображение $\psi: S \rightarrow Q$ такое, что $\psi(s_0) = q_0$ и $(s, i, o, s') \in T_A \Leftrightarrow (\psi(s), i, o, \psi(s')) \in T_B$.

Следует отметить, что существующие понятия гомоморфизма между автоматами, например, частичными и/или недетерминированными, до сих пор не удовлетворяют исследователей. В данной работе мы вводим четыре понятия гомоморфизма, два из которых совпадают с классическими определениями гомоморфизма для алгебраических систем, моделей.

1-гомоморфизмом автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ на автомат $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ называется сюръективное отображение $\psi: S \rightarrow Q$ такое, что $\psi(s_0) = q_0$ и $\forall (s, i, o, s') \in T_A [(\psi(s), i, o, \psi(s')) \in T_B]$. Как обычно, далее через $\psi^{-1}(q)$ обозначается полный прообраз состояния $q \in Q$, т.е. $\psi^{-1}(q) = \{s: \psi(s) = q\}$.

Иными словами, для любого состояния $s \in S$ и любого перехода из состояния s в автомате A существует соответствующий переход из образа $\psi(s)$ состояния s в автомате B . Автомат B называется *1-гомоморфным образом* автомата (относительно 1-гомоморфизма ψ). Как следует из определения, каждому переходу в автомате-прообразе соответствует переход в его 1-гомоморфном образе, но не наоборот. 1-гомоморфный образ может содержать лишние (относительно прообраза) переходы. Некоторые «лишние» переходы можно удалить из гомоморфного образа, если воспользоваться другим классическим определением гомоморфизма.

1-гомоморфизм ψ автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ на автомат $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ называется *сильным*, если $\forall (q, i, o, q') \in T_B \exists s \in \psi^{-1}(q) \exists s' \in \psi^{-1}(q') [(s, i, o, s') \in T_A]$.

Иными словами, для любого перехода в автомате A существует соответствующий переход в автомате B и, кроме того, для каждого перехода (q, i, o, q') в автомате B существует соответствующий переход (s, i, o, s') в автомате A , по крайней мере, из одного состояния-прообраза $s \in \psi^{-1}(q)$. Однако мы не требуем, чтобы такой переход существовал из всех состояний прообраза $\psi^{-1}(q)$ состояния q .

Как следствие известных результатов из классической алгебры, можно сформулировать следующее утверждение. Если для автоматов B и A существует сильный взаимно однозначный 1-гомоморфизм, то автоматы являются изоморфными.

Отношения гомоморфизма первого рода между автоматами полностью согласуются с определением гомоморфизма для алгебраических систем, моделей, что дает возможность воспользоваться классическими результатами. Однако поскольку мы не требуем наличия переходов, соответствующих переходам в гомоморфном образе, из каждого состояния прообраза, то даже при сильном 1-гомоморфизме в общем случае образ не наследует многие автоматные свойства прообраза, например, такие как частичная определенность, детерминизм, наблюдаемость.

П. Штарке [3] ввел понятие специального гомоморфизма для полностью определенных недетерминированных автоматов. Мы расширяем это понятие для частичных автоматов и называем их гомоморфизмами второго рода. При гомоморфизмах второго рода автоматы-прообразы эквивалентны своим гомоморфным образам. Более того, при сильном гомоморфизме второго рода требуется, чтобы автомат-прообраз был полным прообразом; в этом случае образ наследует автоматные свойства прообраза, и прообраз обладает многими свойствами образа. В случае детерминированных полностью определенных автоматов понятия гомоморфизма и сильного гомоморфизма первого и второго рода совпадают.

2-гомоморфизмом автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ на автомат $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ называется сюръективное отображение $\psi: S \rightarrow Q$ такое, что $\psi(s_0) = q_0$ и $\forall (s, i, o, s') \in T_A [(\psi(s), i, o, \psi(s')) \in T_B]$ и $\forall (q, i, o, q') \in T_B \forall s \in \psi^{-1}(q) \exists s' \in \psi^{-1}(q') [(s, i, o, s') \in T_A]$.

Иными словами, для любого перехода в автомате A существует соответствующий переход в автомате B и, кроме того, для каждого перехода в автомате B существует соответствующий переход в автомате A из каждого состояния-прообраза.

2-Гомоморфизм ψ автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ на автомат $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$ называется *сильным*, если $\forall (q, i, o, q') \in T_B \forall s \in \psi^{-1}(q) \forall s' \in \psi^{-1}(q') [(s, i, o, s') \in T_A]$.

Иными словами, при сильном 2-гомоморфизме для любого перехода в автомате A существует соответствующий переход в автомате B и, кроме того, для каждого перехода автомата B в автомате A из каждого состояния-прообраза есть такой же переход во все соответствующие состояния прообраза, т.е. автомат A является *полным прообразом* автомата B .

При 2-гомоморфизме наследуются свойства частичной определенности, детерминированности и наблюдаемости.

По определению гомоморфизмов первого и второго рода имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. 1) Изоморфные автоматы эквивалентны. 2) Если существует (сильный) 1-гомоморфизм автомата A на автомат B , то автомат A есть редукция автомата B . 3) Если существует (сильный) 2-гомоморфизм автомата A на автомат B , то автоматы B и A эквивалентны.

Однако утверждения, обратные к утверждениям теоремы 3, не всегда имеют место.

При отношениях изоморфизма и гомоморфизма каждое состояние образа «наследует» свойства только одного состояния автомата-прообраза, т.е. отношения изоморфизма и гомоморфизма требуют существования разбиения на множестве состояний автомата с определенными свойствами. Однако автомат B может вести себя подобно другому автомату A и в случае, когда два состояния автомата B «наследуют» свойства одного и того же состояния исходного автомата A . Такие отношения называются отношениями моделирования или симуляции и соответствуют вложенности деревьев преемников соответствующих автоматов.

2.6. Отношение моделирования

Говорят, что состояние s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ *моделирует* состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$, если существует отношение $\psi \subseteq Q \times S$ такое, что $qs \in \psi$ и для любой пары $q's' \in \psi$ имеет место $\forall (q', i, o, q'') \in T_B \exists (s', i, o, s'') \in T_A [q''s'' \in \psi]$.

В этом случае мы используем обозначение $s \supseteq_\psi q$ или $q \subseteq_\psi s$. Автомат A *моделирует* автомат B или автомат B *моделируется* автоматом A , если начальное состояние автомата A моделирует начальное состояние автомата B . Иными словами, автомат A моделирует автомат B , если существует отношение $\psi \subseteq Q \times S$, включающее пару q_0s_0 и обладающее выше описанным свойством. Отношение ψ называется *отношением моделирования* между автоматами B и A (обозначение: $A \supseteq_\psi B$ или $B \subseteq_\psi A$).

Говорят, что автоматы A и B находятся в отношении *бисимуляции*, если A моделирует автомат B и B моделирует автомат A . Автоматы A и B находятся в отношении *сильной бисимуляции*, если существует отношение моделирования ψ между автоматами A и B такое, что обратное отношение ψ^{-1} есть отношение моделирования между автоматами B и A . Для наблюдаемых автоматов понятия бисимуляции и сильной бисимуляции совпадают.

Отношения моделирования между двумя автоматами можно упорядочить по отношению включения. Более того, согласно определению объединение двух отношений моделирования также является отношением моделирования, т.е. множество отношений моделирования между автоматом A и автоматом B образует верхнюю полурешетку. Т.к. полурешетка является конечной ввиду конечности множеств состояний автоматов A и B , то в полурешетке отношений моделирования существует наибольший элемент. Иными словами, среди отношений моделирования существует отношение ψ такое, что любое отношение моделирования φ , $A \supseteq_\varphi B$, есть подмножество отношения ψ .

Чтобы построить наибольшее отношение моделирования между автоматами A и B , мы начинаем с отношения $\psi = Q \times S$ и итеративно удаляем пары состояний, не удовлетворяющие определению отношения моделирования. Если удаляется пара начальных состояний, то автомат A не моделирует автомат B . В противном случае полученное отношение является наибольшим отношением моделирования.

Если автомат A является наблюдаемым, то пересечение $\psi_1 \cap \psi_2$ отношений моделирования ψ_1 и ψ_2 также является отношением моделирования, т.е. в этом случае множество отношений моделирования образует решетку, которая в силу конечности обладает наименьшим элементом, т.е. существует наименьшее (по включению) отношение моделирования. Наименьшее отношение моделирования совпадает с множеством состояний пересечения автоматов A и B .

Отношение (сильной) бисимуляции на множестве автоматов с заданными входным и выходным алфавитами рефлексивно, транзитивно и симметрично, т.е. является отношением эквивалентности. Таким образом, отношение (сильной) бисимуляции разбивает множество всех автоматов на классы, которые мы будем называть *классами* (сильной) *бисимуляции*, чтобы отличить их от классов, которые получаются для отношения эквивалентности между автоматами. По определению каждый класс сильной бисимуляции содержится в некотором классе симуляции.

Отношение моделирования на множестве автоматов с заданными входным и выходным алфавитами, так же как и отношение редукции, рефлексивно и транзитивно, т.е. является отношением квазипорядка или предпорядка. Наибольшая эквивалентность, содержащаяся в отношении моделирования, есть отношение бисимуляции.

По построению пересечение автоматов $A \cap B$ моделируется одновременно автоматами A и B . Более того, пересечение является «наибольшим» автоматом, который моделируют автоматы A и B . Кроме того, объеди-

нение $A \cup B$ моделирует одновременно автоматы A и B и является «наименьшим» автоматом, который моделирует автоматы A и B . Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 4. 1) Автомат D моделирует одновременно автоматы A и B , если и только если он моделирует их объединение $A \cup B$. 2) Автомат D моделируется одновременно автоматами A и B , если и только если он моделируется их пересечением $A \cap B$.

Классы бисимуляции автоматов образуют решетку относительно отношения моделирования. Класс, содержащий пересечение автоматов-представителей двух классов бисимуляции, есть наибольшая нижняя грань. Класс, содержащий объединение автоматов-представителей двух классов бисимуляции, есть наименьшая верхняя грань. Данная решетка является бесконечной. Однако в решетке существуют наименьший и наибольший элементы: классы, содержащие тривиальный и максимальный автоматы.

2.7. Связь между отношениями моделирования и редукции

По определению отношения редукции и эквивалентности между автоматами являются более слабыми в некотором смысле, чем отношения моделирования и бисимуляции, т.к. последние учитывают не только конечно автоматное отображение, но и структуру переходов автоматов. Всякий автомат, который моделируется автоматом A , является редукцией автомата A . Автоматы, которые находятся в отношении (сильной) бисимуляции, эквивалентны. Если автомат A моделирует автомат B , то для каждой последовательности переходов автомата B существует соответствующая последовательность переходов в автомате A . Таким образом, имеют место следующие утверждения.

Теорема 5. 1) Если автомат A моделирует автомат B , то автомат B является редукцией автомата A . 2) Если автоматы A и B находятся в отношении (сильной) бисимуляции, то автоматы A и B эквивалентны. 3) Наблюдаемый автомат A моделирует автомат B , если и только если автомат B является редукцией автомата A . 4) Наблюдаемые автоматы B и A эквивалентны, если и только если автоматы A и B находятся в отношении сильной бисимуляции.

Согласно теореме 5 для того, чтобы проверить, моделируется ли автомат B наблюдаемым автоматом A , достаточно проверить, является ли автомат B редукцией автомата A на основе пересечения автоматов (теорема 1).

По определению если автомат A моделирует автомат B , то автомат A может делать «не меньше», чем автомат B , и является «более определенным». Однако так же, как для отношения квазиредукции, когда автомат A является частичным, можно потребовать, чтобы A моделировал автомат B только там, где поведение автомата A определено.

Говорят, что состояние s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ квазимоделирует состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, q_0)$, если существует отношение $\psi \subseteq Q \times S$ со свойствами: а) $qs \in \psi$, б) для любой пары $q's' \in \psi$ и любого входного символа i справедливо: если $\exists (o, s'') \in O \times S [(s', i, o, s'') \in T_A]$, то $\forall (q', i, o', q'') \in T_B \exists (s'', i, o', s'') \in T_A [q''s'' \in \psi]$.

В этом случае мы используем обозначение: $s \succsim_\psi q$ или $q \prec_\psi s$. Автомат A квазимоделирует автомат B или автомат B квазимоделируется автоматом A , если начальное состояние автомата A квазимоделирует начальное состояние автомата B . Иными словами, автомат A квазимоделирует автомат B , если существует отношение $\psi \subseteq Q \times S$, включающее пару q_0s_0 и обладающее соответствующим свойством. Отношение ψ называется отношением квазимоделирования между автоматами B и A (обозначение: $A \succsim_\psi B$ или $B \prec_\psi A$).

Отношение квазимоделирования на множестве автоматов с заданными входным и выходным алфавитами обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, т. е. отношениями квазипорядка или предпорядка. Наибольшая эквивалентность, содержащаяся в этом отношении, есть отношение бисимуляции между автоматами. Таким образом, отношение квазимоделирования является отношением частичного порядка на классах бисимуляции автоматов.

Классы бисимуляции по отношению квазимоделирования образуют не решетку, а верхнюю полурешетку. Объединение автоматов-представителей двух классов бисимуляции, определенное на области определения пересечения, есть наименьшая верхняя грань для этих классов. Однако наибольшая нижняя грань как класс, содержащий пересечение автоматов-представителей двух классов бисимуляции, существует не всегда, подобно решетке по отношению квазиредукции. В решетке существует наибольший элемент, которым является класс, содержащий тривиальный автомат. Минимальными элементами являются классы, которые содержат полностью определенные детерминированные автоматы. Классы бисимуляции и эквивалентности совпадают для наблюдаемых автоматов, т.е. для множества наблюдаемых автоматов решетки по квазиредукции и квазимоделированию совпадают.

3. Отношения толерантности

В данном разделе исследуются отношения толерантности между недетерминированными автоматами. Эти отношения являются рефлексивными и симметричными, но не являются транзитивными.

3.1. Отношение внешней неразличимости

Состояние s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ и состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, s_0)$ называются *внешне неразличимыми* (обозначение: $s \approx q$), если $\Omega_A(s) \cap \Omega_B(q) = \emptyset$ или $\forall \alpha \in \Omega_A(s) \cap \Omega_B(q)$ справедливо: $out_B(q, \alpha) = out_A(s, \alpha)$.

Автоматы A и B называются *внешне неразличимыми*, если внешне неразличимы их начальные состояния. Если автомат B квазиэквивалентен автомату A , то автоматы являются внешне неразличимыми, однако обратное в общем случае не верно. Понятие внешней неразличимости характеризует возможность существования автомата, который квазиэквивалентен двум автоматам. Иными словами, автоматы A и B внешне неразличимы, если существует автомат C , который квазиэквивалентен автоматам A и B . Два внешне различных автомата с m и n состояниями можно различить входной последовательностью, длина которой не превосходит mn . Известно, что верхняя оценка mn является достижимой, в частности, для частичных автоматов.

Отношение внешней неразличимости рефлексивно и симметрично, но, как известно, не является транзитивным даже для детерминированных автоматов.

3.2. Отношение неразделимости

Состояние s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ и состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, s_0)$ называются *неразделимыми* (обозначение: $s \sim q$), если $\Omega_A(s) \cap \Omega_B(q) = \emptyset$ или $\forall \alpha \in \Omega_A(s) \cap \Omega_B(q)$ справедливо: $out_B(q, \alpha) \cap out_A(s, \alpha) \neq \emptyset$. Автоматы A и B называются *неразделимыми*, если неразделимы их начальные состояния. Можно показать, что внешне неразличимые автоматы A и B являются неразделимыми, однако обратное не всегда верно. Если B есть квазиредукция A , то автоматы A и B неразделимы. Обратное верно не всегда.

Два разделимых автомата с m и n состояниями можно различить входной последовательностью, длина которой не превосходит 2^{mn-1} , причем верхняя оценка 2^{mn-1} является достижимой, в том числе и для полностью определенных наблюдаемых автоматов.

Заметим также, что для неразделимых автоматов A и B не всегда существует общая квазиредукция. Причиной является тот факт, что множество автоматов является только верхней полурешеткой относительно квазиредукции. Поэтому вопрос о существовании автомата, который является квазиредукцией каждого из двух заданных автоматов, не является тривиальным.

3.3. Отношения r - и s -совместимости

Автоматы, для которых существует общая квазиредукция, называются *r -совместимыми*.

Состояние s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ и состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, s_0)$ называются *r -совместимыми* (обозначение: $s \simeq_r q$), если существует автомат C и состояние этого автомата, которое является квазиредукцией состояний s и q .

Автоматы A и B *r -совместимы*, если r -совместимы их начальные состояния (обозначение: $A \simeq_r B$), т.е. если существует автомат C , который является квазиредукцией автоматов A и B .

Если автоматы A и B наблюдаемые, то можно использовать пересечение автоматов для проверки, являются ли автоматы r -совместимыми.

Назовем состояние sq пересечения $A \cap B$ *1-недоопределенным*, если для некоторого $i \in \Omega_A(s) \cap \Omega_B(q)$ справедливо $out_B(q, i) \cap out_A(s, i) = \emptyset$. Состояние sq называется *k -недоопределенным*, $k > 1$, если состояние sq является $(k-1)$ -недоопределенным или для некоторого $i \in \Omega_A(s) \cap \Omega_B(q)$ из состояния sq существуют переходы только в $(k-1)$ -недоопределенные состояния. Состояние sq называется *недоопределенным*, если существует k такое, что sq есть k -недоопределенное состояние. Известно [1], что наблюдаемые автоматы A и B являются r -совместимыми, если и только если начальное состояние пересечения не является недоопределенным. Для ненаблюдаемых автоматов условия сформулированного выше утверждения не являются необходимыми. Известно, что в общем случае для проверки r -совместимости автоматов требуется больше одной входной последовательности. Однако верхняя оценка длины множества входных последовательностей, различающих два r -несовместимых автомата с m и n состояниями, остаются неизвестными.

Состояние s автомата $A = (S, I, O, T_A, s_0)$ и состояние q автомата $B = (Q, I, O, T_B, s_0)$ называются *s -совместимыми* (обозначение: $s \simeq_s q$), если существует автомат C и состояние этого автомата, которое квазимоделируется состояниями s и q . Автоматы A и B *s -совместимы*, если s -совместимы их начальные состояния (обозначение: $A \simeq_s B$). Известно [1], что автоматы A и B являются s -совместимыми, если и только если начальное состояние пересечения $A \cap B$ не является недоопределенным.

Как остальные отношения совместимости, отношения r - и s -совместимости состояний (автоматов) рефлексивны и симметричны, но в общем случае не являются транзитивными.

Понятия r - и s -совместимых автоматов можно распространить на k автоматов, где $k > 2$.

Автоматы $A_1 = (S_1, I, O, T_1, s_{10})$, ..., $A_k = (S_k, I, O, T_k, s_{k0})$, $k > 1$ называются *r -совместимыми* (s -совместимыми), если существует автомат, который является одновременно квазиредукцией всех автоматов (квазимоделируется каждым из автоматов). Наблюдаемые автоматы A_1 , ..., A_k являются r -совместимыми, если и только если начальное состояние пересечения $A_1 \cap \dots \cap A_k$ не является недоопределенным.

3.4. Связь между отношениями совместимости

Следующая теорема устанавливает некоторые соотношения между отношениями совместимости.

Теорема 6. 1) $B \sqsubseteq A \Rightarrow A \approx B \Rightarrow A \sim B$; 2) $A \sim B \not\Rightarrow A \approx B$; 3) $A \approx B \not\Rightarrow B \sqsubseteq A$; 4) $B \lesssim A \Rightarrow A \sim B$; 5) $A \sim B \not\Rightarrow B \lesssim A$.

В данной работе мы рассмотрели ряд отношений порядка (квазипорядка), эквивалентности и толерантности между автоматами и установили некоторые взаимосвязи между отношениями. Все рассмотренные отношения принадлежат к отношениям совместимости, т.к. в той или иной степени характеризуют «похожесть» систем, поведение которых описано автоматами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куфарева И.Б. Применение недетерминированных автоматов в задачах синтеза проверяющих тестов для систем логического управления: Дис. канд. техн. наук. – Томск, 2000.
2. Ветрова М.В. Разработка алгоритмов синтеза и тестирования конечно автоматных компенсаторов: Дис. канд. техн. наук, - Томск, 2004.
3. Starke P.H. *Abstract Automata*. – N.Y.: American Elsevier Publishing Company, 1972.

**STUDYING THE COMPATIBILITY RELATIONS
BETWEEN NON-DETERMINISTIC FINITE STATE MACHINES**

M.V. Vetrova, N.V. Yevtushenko, S.V. Zharikova, N.V. Spitsyna

The work is devoted to studying compatibility relations between non-deterministic finite state machines. The compatibility relations describe the similarity of two FSMs and range from the equality relation to non-distinguishability relations. Some statements about the relationship between different compatibility relations are established.