

ПАРАМЕТРЫ ВЛОЖЕНИЯ ИНВОЛЮЦИЙ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИБЕВА ТИПА РАНГА 1¹

О.В. Голованова*

Гипотеза о параметрах вложения инволюций конечных простых групп в статье подтверждается для классов групп Ри, Сузуки и $PSL_2(q)$.

Понятие параметра вложения инволюции введено в 1995 г. В.П. Шунковым [6]. Как обычно, централизатор элемента τ в группе G обозначаем через $C_G(\tau)$, класс сопряженных элементов группы G с представителем τ — через τ^G .

Определение 1. Параметром вложения инволюции τ в группе G называется число

$$t(G, \tau) = \max_{g \in G} |gC_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G|.$$

По известной теореме Р. Брауэра существует только конечное число конечных простых групп с данным централизатором инволюции. В 2001 г. В.П. Шунков предложил подход к обобщению теоремы Брауэра с помощью параметра вложения инволюции. Он высказал следующую гипотезу.

Гипотеза В.П. Шункова. Пусть m — произвольное натуральное число. Тогда существует только конечное число конечных простых неабелевых групп, у которых параметр вложения инволюции не больше m .

См. также [8]. В подтверждение гипотезы В.П. Шункова достаточно показать, что для любого бесконечного семейства конечных простых неабелевых групп параметры вложения инволюций не ограничены в совокупности. Здесь достаточно подтвердить гипотезу для любого бесконечного семейства каждого из известных 17 типов конечных простых неабелевых групп. Для знакопеременных групп гипотеза была подтверждена ранее [5].

В статье гипотеза В.П. Шункова подтверждается в бесконечных семействах групп $PSL_2(q)$ (теорема 1), групп Ри (теорема 2) и групп Сузуки (теорема 3).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00576-а).

* © О.В. Голованова, Красноярский государственный университет, 2006, listova@ksc.krasn.ru.

1. Параметры вложения инволюций групп $PSL_2(q)$

Цель этого параграфа подтвердить гипотезу В.П. Шункова для простых групп $PSL_2(q)$.

Нам потребуется следующая функция:

$$f(q) = \begin{cases} q, & \text{для четного } q, \\ q-1, & \text{для } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{q+1}{2}, & \text{для } q \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Теорема 1. Параметры вложения инволюций простых групп $PSL_2(q)$ ограничены снизу функцией $f(q)$.

Заметим, что $f(q)$ является возрастающей функцией с натуральными значениями. Поэтому из теоремы сразу вытекает

Следствие 1. Параметры вложения инволюций любого бесконечного семейства простых групп $PSL_2(q)$ не ограничены в совокупности.

Сопряженные в группе инволюции имеют одинаковые параметры вложения. Поэтому параметр вложения инволюций в группе нужно рассматривать только для представителей из каждого класса сопряженных инволюций.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд лемм.

Лемма 1. В произвольной группе G с инволюцией τ параметр вложения инволюции τ не превосходит порядка ее централизатора.

Доказательство сразу же следует из определения 1.

Лемма 2. Если τ – инволюция группы G , и класс сопряженных инволюций τ^G содержит множество $C_G(\tau) \setminus \{e\}$, то параметр вложения инволюции τ равен порядку ее централизатора или, другими словами, выполняется равенство $t(G, \tau) = |C_G(\tau)|$.

Доказательство. Согласно определению 1 имеем

$$t(G, \tau) = \max_{g \in G} |gC_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G| \geq |C_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G| = |C_G(\tau)|.$$

Последнее равенство получаем в силу того, что по условию $\tau^G \supseteq C_G(\tau) \setminus \{e\}$. Следовательно, $C_G(\tau) \subseteq \tau^G \tau^G$. С одной стороны, $t(G, \tau) \geq |C_G(\tau)|$, с другой стороны, по лемме 1 $|C_G(\tau)| \geq t(G, \tau)$. Следовательно, $t(G, \tau) = |C_G(\tau)|$. Лемма доказана.

Определение 2 [3]. Назовем группу G строго вещественной, если любой ее неединичный элемент строго вещественный, т.е. сопряжен некоторой инволюцией из G со своим обратным элементом.

Лемма 3 [3]. В строго вещественной группе G каждый ее неединичный элемент можно представить в виде произведения двух инволюций.

Доказательство. Пусть G – строго вещественная группа, тогда по определению 2 для любого ее неединичного элемента g существует инволюция $\tau \in G$ такая, что $\tau g \tau = g^{-1}$. Отсюда $\tau g \tau g = g^{-1} g = e$, следовательно $(\tau g)^2 = e$ и τg – инволюция. Отсюда, если $g \neq \tau$, то $g = \tau g^{-1} \tau = \tau \tau g$ есть произведение двух инволюций τ и τg . Обратно, если $g = \sigma \tau$, где σ, τ – две различные инволюции, то $\tau = \sigma g$. Подставим τ в исходное равенство, получим $g = \sigma \sigma g = \sigma g^{-1} \sigma$, т.е. элемент g сопряжен со своим обратным элементом, а значит по определению 2 является строго вещественным. Лемма доказана.

Лемма 4. Если в строго вещественной группе G порядка больше 2 только один класс сопряженных инволюций, то параметр вложения инволюции τ в группе G равен порядку ее централизатора

$$t(G, \tau) = |C_G(\tau)|.$$

Доказательство. Из определения 1 имеем

$$t(G, \tau) = \max_{g \in G} |gC_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G| \geq |C_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G| = |C_G(\tau)|.$$

Последнее равенство получаем в силу того, что по условию G – строго вещественная группа, следовательно по лемме 3 любой элемент c централизатора $C_G(\tau)$ можно представить в виде произведения двух инволюций σ, τ , принадлежащих группе G . Но, по условию, в G только один класс сопряженных инволюций. Значит, $\sigma \in \tau^G$ и $c = \sigma \tau \in \tau^G \tau^G$. Отсюда, $C_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G = C_G(\tau)$. С одной стороны, $t(G, \tau) \geq |C_G(\tau)|$, с другой стороны, по лемме 1 $|C_G(\tau)| \geq t(G, \tau)$. Следовательно, $t(G, \tau) = |C_G(\tau)|$. Лемма доказана.

Случай четного q

Пусть $G = PSL_2(q)$, где q – четное, $q > 2$. Тогда в группе G силовская 2-подгруппа $UT_2(q)$ является элементарной абелевой 2-подгруппой. В группе $UT_2(q)$ – всего инволюций $q-1$, и все они сопряжены диагональными элементами с инволюцией $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. В конечной группе все силовские p -подгруппы сопряжены по теореме Силова. Поэтому любая инволюция из G сопряжена с инволюцией из $UT_2(q)$, и, следовательно, сопряжена с инволюцией τ . В частности, все инволюции в G образуют один класс сопряженных элементов. Кроме того, $C_G(\tau) = UT_2(q)$. Следовательно, $C_G(\tau) \setminus \{e\} \subseteq \tau^G$ и, по лемме 2, $t(G, \tau) = |C_G(\tau)|$. Так как $|UT_2(q)| = q$, то $t(G, \tau) = q$. Теорема 1 для четного q доказана.

Случай $q \equiv 1 \pmod{4}$

Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q \equiv 1 \pmod{4}$, и τ – инволюция в группе G . В G все инволюции сопряжены (1 класс) и над полем $GF(q)$ приводятся сопряжением к диагональному виду $\tau = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, где $i^2 = -1$. Нормализатор N диагональной подгруппы D в группе G есть диэдральная подгруппа порядка $q-1$, $|N : D| = 2$ и при $q > 11$ подгруппа N максимальна в группе G [2, глава 12]. Так как $q \equiv 1 \pmod{4}$, то $\tau \in D$ и $C_G(\tau) = N$. Из [3] известно, что группа $G = PSL_2(q)$, где $q \equiv 1 \pmod{4}$, – строго вещественная. Следовательно, по лемме 4 параметр вложения инволюции τ в группе G $t(G, \tau) = |C_G(\tau)| = q-1$. Теорема 1 для $q \equiv 1 \pmod{4}$ доказана.

Случай $q \equiv -1 \pmod{4}$

Для доказательства последнего случая нам потребуется

Лемма 5. В группе $PSL_2(q)$, где $q \equiv -1 \pmod{4}$, всякая инволюция сопряжена с центральной инволюцией τ диэдральной подгруппы T порядка $q+1$ и $C_{PSL_2(q)}(\tau) = T$.

Доказательство. Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q \equiv -1 \pmod{4}$. Следовательно, $\frac{q-1}{2}$ – нечетное число, и поэтому произвольная инволюция $\tau \in G$ не сопряжена в G с диагональной матрицей из G . Поэтому характеристический многочлен матрицы τ является неприводимым степени 2 многочленом над $GF(q)$, и над квадратичным расширением $GF(q^2)$ поля $GF(q)$ матрица τ сопряжена с диагональной матрицей из $PSL_2(q^2)$. Таким образом, существует матрица $Q \in PSL_2(q^2)$, для которой $Q\tau Q^{-1}$ есть диагональная инволюция в $PSL_2(q^2)$, т.е.

$$Q\tau Q^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \text{ где } i^2 = -1.$$

Отсюда

$$\text{trace}(\tau) = \text{trace}(Q\tau Q^{-1}) = 0.$$

Так как [2] всякие две матрицы из $PSL_2(q)$ с одинаковой жордановой нормальной формой в $PSL_2(q^2)$ сопряжены в $PSL_2(q)$, то отсюда получаем, что инволюции в G составляют один класс сопряженных элементов. В G есть диэдральная подгруппа T порядка $q+1$, делящегося на 4, содержащая инволюцию в центре. Отсюда в группе G , где $q \equiv -1 \pmod{4}$, всякая инволюция сопряжена с центральной инволюцией τ диэдральной подгруппы T порядка $q+1$ и $C_G(\tau) = T$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q \equiv -1 \pmod{4}$. В диэдральной подгруппе T есть циклическая подгруппа C порядка $\frac{q+1}{2}$ с центральной инволюцией τ . Множество $T \setminus C$ имеет порядок $\frac{q+1}{2}$ и состоит только из инволюций, сопряженных τ в группе G по лемме 5, т.е.

$$(T \setminus C) \subset \tau^G. \quad (1)$$

Согласно определению 1 имеем

$$t(G, \tau) = \max_{g \in G} |gC_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G| \geq |C_G(\tau) \cap \tau^G \tau^G| = |T \cap \tau^G \tau^G|.$$

Из (1) и $\tau \in \tau^G$ следует, что

$$T \cap \tau^G \tau^G \supseteq (T \setminus C)\tau.$$

Поэтому

$$t(G, \tau) \geq |(T \setminus C)\tau| = |T \setminus C| = \frac{q+1}{2}.$$

Теорема 1 доказана.

2. Параметры вложения инволюций групп Ри

В этом параграфе доказывается

Теорема 2. Параметры вложения инволюций группы Ри $Re(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, $n \in N$, ограничены снизу числом $\frac{q(q-1)}{2}$.

Заметим, что функция $f(q) = \frac{q(q-1)}{2}$ принимает натуральные значения и, очевидно, является возрастающей функцией. Поэтому из теоремы сразу вытекает

Следствие 2. Параметры вложения инволюций любого бесконечного семейства простых групп Ри $Re(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, $n \in N$, не ограничены в совокупности.

Доказательство теоремы 2. Положим

$$G_1 = Re(q), \quad q = 3^{2n+1}, \quad n \geq 1.$$

Известны следующие свойства группы Ри (см. [4]):

- 1) 2-подгруппы равных порядков сопряжены в группе Ри;
- 2) централизатор диагональной инволюции η в группе Ри равен

$$C_{G_1}(\eta) = \langle \eta \rangle \times L(q), \quad (2)$$

где $L(q) \cong PSL_2(q)$. Свойство 1) показывает, что все инволюции группы G_1 сопряжены между собой, а значит они сопряжены с диагональной инволюцией η и составляют один класс сопряженных инволюций η^{G_1} . Ясно, что $q \equiv -1 \pmod{4}$. Группа

$$G = PSL_2(q)$$

имеет всего один класс сопряженных инволюций. Его представителем выберем, как и в лемме 5, центральную инволюцию τ диэдральной подгруппы T порядка $q+1$ в G . Тогда $C_G(\tau) = T$. Поскольку $|C_G(\tau)| = q+1$, то получаем равенства

$$|\tau^G| = \frac{|G|}{|C_G(\tau)|} = \frac{q(q^2-1)}{2(q+1)} = \frac{q(q-1)}{2}.$$

В группе $L(q) \cong PSL_2(q)$ один класс сопряженных инволюций с представителем, скажем, σ . Порядок класса равен $\frac{q(q-1)}{2}$. Отсюда и из определения 1 находим

$$t(G_1, \eta) = \max_{g \in G_1} |gC_{G_1}(\eta) \cap \eta^{G_1} \eta^{G_1}| \geq |C_{G_1}(\eta) \cap \eta^{G_1} \eta^{G_1}| \geq |\sigma^{L(q)}|.$$

Последнее неравенство получаем в силу того, что из равенства (2) вытекает включение $\eta\sigma \in C_{G_1}(\eta)$ для любого $\sigma \in \sigma^{L(q)}$. Кроме того, $\eta\sigma \in \eta^{G_1} \eta^{G_1}$, так как $\eta \in \eta^{G_1}$ и $\sigma \in \eta^{G_1}$ в силу сопряженности всех инволюций в группе G_1 . Число таких произведений $\eta\sigma$ равно порядку $|\sigma^{L(q)}| = \frac{q(q-1)}{2}$ класса сопряженных в $L(q)$ инволюций. Следовательно,

$$t(G_1, \eta) \geq \frac{q(q-1)}{2}.$$

Теорема 2 доказана.

3. Параметры вложения инволюций групп Сузуки

Целью этого параграфа является подтверждение гипотезы В.П. Шункова для простых групп Сузуки. Нам потребуются свойства групп Сузуки, открытых им в работе [7]. Их построение и свойства можно найти также в [1].

Пусть $GF(q)$ есть конечное поле из $q = 2^{2n+1}$, $n \geq 1$, элементов. Если $r^2 = 2q$, то $\theta: \alpha \rightarrow \alpha^r$ – такой автоморфизм поля $GF(q)$, что $\theta^2 = 2$. Каждому ненулевому элементу k основного поля сопоставим диагональную матрицу

$$h(k) = \text{diag} (k^{1+\theta^{-1}}, k^{\theta^{-1}}, k^{-\theta^{-1}}, k^{-1-\theta^{-1}}).$$

Совокупность таких матриц образует циклическую группу K порядка $q-1$. Сопоставляя произвольным элементам α и β из $GF(q)$ матрицу

$$(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{1+\theta} + \beta & \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \alpha^{2+\theta} + \alpha\beta + \beta & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

в силу соотношений

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \alpha\gamma^\theta + \beta + \delta) \quad (3)$$

получаем матричную группу

$$S = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in GF(q) \}.$$

С учетом соотношений

$$h(k)^{-1}(\alpha, \beta)h(k) = (\alpha k, \beta k^{1+\theta}) \quad (4)$$

матричные группы K и S порождают группу Фробениуса $B = S \ltimes K$ порядка $q^2(q-1)$. Известно, что группа B и инволюция

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

порождают группу Сузуки

$$Sz(q) = \langle K, S, \tau \rangle, \quad q = 2^{2n+1}, n \geq 1,$$

порядка $q^2(q-1)(q^2+1)$. Для нее выполняется разложение Брюа $Sz(q) = B \langle \tau \rangle B$.

Группа Сузуки является простой, за исключением случая $q = 2$. Справедлива

Теорема 3. Параметры вложения инволюций простой группы Сузуки $Sz(q)$ ограничены снизу числом q .

Доказательство. Подгруппа S порядка q^2 является силовой 2-подгруппой группы $G = Sz(q)$ с центром

$$Z = \{ (0, \beta) \mid \beta \in GF(q) \}.$$

Все инволюции в S центральны, причем централизатор $C_G(\eta)$ в G инволюции $\eta = (0, 1)$ совпадает с S . Кроме того, все инволюции из G образуют один класс сопряженных элементов.

Формула (4) показывает, что сопряжения диагональными элементами $h(k)$ действуют на множестве инволюций из S транзитивно. Поэтому класс η^G содержит $Z \setminus \{1\}$. Отсюда

$$C_G(\eta) \cap (\eta^G \eta^G) \supseteq (Z \setminus \{1\}) (Z \setminus \{1\}) = Z$$

и, следовательно, $t(G, \eta) \geq q$. Теорема доказана.

Так как функция $f(q) = q$ принимает натуральные значения и, очевидно, является возрастающей функцией, из теоремы 3 сразу вытекает

Следствие 3. Параметры вложения инволюций любого бесконечного семейства простых групп Сузуки $Sz(q)$ неограничены в совокупности.

Следствия 1, 2, 3 подтверждают гипотезу В.П. Шункова в классах простых групп Ри, Сузуки и $PSL_2(q)$.

Автор благодарит своих научных руководителей В.М. Левчука и В.П. Шункова за внимание к статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы - М.: Наука, 1968.

2. Dickson L.E. Linear groups with an exposition of the Galois Field theory. - Dover, New York, 1958.
3. Kolesnikov S.G., Nuzin J.A.N. On Strong Reality of Finite Simple Groups // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – № 85. – P. 195-203.
4. Левчук В.М., Нужин Я.Н. О строении групп Ри // Алгебра и логика. – 1985. – Т. 24 – № 1. – С. 26-41.
5. Листова О.В. Параметры вложения инволюций знакопеременных групп // Algebra and Model Theory. Collection of papers. Edited by A.G. Pinus and K.N. Ponomarev.-Novosibirsk State Technical University 2003. – Т. 4 – С. 62-68.
6. Рябинина Н.А., Сучков Н.М., Шунков В.П. Об особых подгруппах конечных групп с инволюциями // Алгебраические системы: сб. научн. трудов. – Красноярск: Препринт ВЦ СО РАН. – 1995. – № 10. – С. 3-11.
7. Suzuki M. On class of doubly transitive groups, I, II // Ann. Math. – 1962. – № 75. – P. 105-145; 1964. – № 79. – P. 514-589.
8. Шунков В.П. Группы с инволюциями // Международный семинар по теории групп, посвященный 70-летию А.И. Старостина и 80-летию Н.Ф. Сесекина, Екатеринбург, 17-21 декабря 2001 г.: тез. докл. – Екатеринбург: Ин-т мат. и мех. УрО РАН; изд-во Урал. ун-та, 2001. – С. 245-246.

**PARAMETERS OF EMBEDDING INVOLUTIONS
OF FINITE SIMPLE LIE TYPE GROUPS OF RANK 1**

O.V. Golovanova

In this paper the hypothesis about parameters of embedding involutions is confirmed for classes of groups Ree, Suzuki and $PSL_2(q)$.