

О НОРМАЛИЗОВАННЫХ КВАЗИЭНТРОПИЯХ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Д.В.Семенова*

В работе предложена модификация классической формы определения энтропии вероятностного распределения для определения новых числовых характеристик эвентологического распределения множества случайных событий $\mathfrak{X}$, которые были названы нормализованными квазиэнтропиями эвентологического распределения. Сформулированы и доказаны теоремы о максимумах нормализованных квази-энтропий.

1. Об Э-распределениях

Рассмотрим множество случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, или (что эквивалентно) случайное множество событий

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}})$$

под конечным множеством событий $\mathfrak{X}$ [1].

Произвольное эвентологическое распределение (Э-распределение) множества избранных случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ можно представить несколькими эквивалентными распределениями вероятностей событий-террасок [2]:

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}(\text{ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— эвентологическое распределение вероятностей пересечений;

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \mathbf{P}(\text{ter}_X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$$

— Э-распределение надвероятностей пересечений;

$$p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X) = \mathbf{P}(\text{ter}^X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— Э-распределение подвероятностей пересечений;

$$u(X) = 1 - \mathbf{P}(K = X^c) = \mathbf{P}(\text{Ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x \bigcup_{x \in X^c} x^c\right)$$

— эвентологическое распределение вероятностей объединений;

$$u_X = 1 - \mathbf{P}(K \subseteq X^c) = \mathbf{P}(\text{Ter}_X) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right)$$

— Э-распределение надвероятностей объединений;

$$u^X = 1 - \mathbf{P}(X^c \subseteq K) = 1 - \mathbf{P}(\text{Ter}^X) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x^c\right)$$

— Э-распределение подвероятностей объединений.

Каждое из этих распределений вероятностей событий-террасок замечательно тем, что его одного достаточно для полного определения эвентологического распределения множества случайных событий $\mathfrak{X}$. Вероятностные распределения, определяющие множество случайных событий $\mathfrak{X}$ и случайное множество событий K , попарно связаны взаимно-обратными формулами обращения Мёбиуса [2].

*© Д.В.Семенова, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2006.

Следует заметить, что только одно из всех — *распределение вероятностей пересечений событий* $p(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, обладает привычным для распределения вероятности свойством нормировки, $\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) = 1$, которое очевидно следует из того, что соответствующие события-терраски $\text{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, образуют разбиение пространства элементарных событий $\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}(X)$. А поскольку остальные события-терраски образуют не разбиение, а всего лишь покрытие Ω , то соотношение нормировки для соответствующих им распределений вероятностей, разумеется, не выполняется. Поэтому суммы вероятностей этих событий-террасок всегда больше единицы. Согласно лемме о суммировании вероятностей событий-террасок [1] значения этих сумм и формулы для их вычисления имеют вид

$$\begin{aligned} z(\mathfrak{X}) &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) = 1, & Z(\mathfrak{X}) &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} u(X) = 2^{|\mathfrak{X}|} - 1, \\ z_{\mathfrak{X}} &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p_X = \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}|}, & Z^{\mathfrak{X}} &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} u^X = 2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}|}, \\ z^{\mathfrak{X}} &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p^X = \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}, & Z_{\mathfrak{X}} &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} u_X = 2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}|} &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} 2^{|\mathfrak{K}|} \mathbf{P}(K = X) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} 2^{|\mathfrak{K}|} p(X), \\ \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|} &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} 2^{|\mathfrak{K}^c|} \mathbf{P}(K^c = X) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} 2^{|\mathfrak{K}^c|} p(X) \end{aligned}$$

— это математические ожидания целочисленных случайных величин $2^{|\mathfrak{K}|}$ и $2^{|\mathfrak{K}^c|}$, которые полностью определяются эвентологическим распределением множества случайных событий $\mathfrak{X}$ и очевидно интерпретируются как средние значения числа подмножеств случайных множеств событий K и K^c соответственно.

1.1. Энтропия множества случайных событий

Энтропией множества случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ (*энтропией эвентологического распределения множества событий* $\mathfrak{X}$) называется величина

$$S(\mathfrak{X}) = - \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) \ln p(X), \quad (2)$$

(по определению считается, что $0 \log 0 = 0$).

Энтропия — это теоретико-информационная мера степени неопределенности случайного множества. Будем рассматривать логарифм по основанию e , что соответствует выбору *nat* (натуральная единица) в качестве единицы измерения.

Хорошо известна интерпретация этой энтропии: математическое ожидание информации, полученной в результате соответствующего случайного эксперимента. Так же известен принцип максимальной энтропии: если мы делаем выводы на основе неполной информации, то должны опираться на такое распределение вероятностей, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую уже имеющейся априорной информацией.

2. Нормализованные квазиэнтропии Э-распределений

Несмотря на то, что пять из шести Э-распределений вероятностей не выдерживают обычное для вероятностных распределений соотношение нормировки, возникает желание определить для них числовую характеристику, которая своими свойствами напоминала бы энтропию, справедливо полагая, что имеющих Э-распределений вероятностей должен иметь и возможность вычислять энтропию каждого из этих Э-распределений. Ранее [3] было введено понятие квазиэнтропий Э-распределений и рассмотрены их экстремальные свойства.

В работе предлагается модификация классической формы определения энтропии вероятностного распределения, согласно которой определяются шесть новых числовых характеристик эвентологического распределения множества случайных событий $\mathfrak{X}$, которые будем называть *нормализованными квазиэнтропиями эвентологического распределения*

Пусть $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — одно из Θ -распределений вероятностей событий-террасок, порожденных множеством избранных событий $\mathfrak{X}$. Нормализованной квазиэнтропией Θ -распределения вероятностей f называется величина

$$s_f(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{z_f(\mathfrak{X})} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} f(X) \ln f(X), \quad (3)$$

где $z_f(\mathfrak{X}) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} f(X)$ — нормирующая константа.

Согласно (3) определим нормализованные квазиэнтропии эвентологического распределения шести видов — трех видов, соответствующих распределениям вероятностей пересечений событий-террасок:

$$s(\mathfrak{X}) = -\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) \ln p(X), \quad s_p(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{z_{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p_X \ln p_X, \quad s^p(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{z^p_{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p^X \ln p^X,$$

и трех видов, соответствующих распределениям вероятностей объединений событий-террасок:

$$S(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{Z(\mathfrak{X})} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} u(X) \ln u(X), \quad S_u(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{Z_{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} u_X \ln u_X,$$

$$S^u(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{Z^u_{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} u^X \ln u^X,$$

где $z_{\mathfrak{X}}, z^{\mathfrak{X}}, Z(\mathfrak{X}), Z_{\mathfrak{X}}, Z^{\mathfrak{X}}$ определяются по формулам (1) соответственно.

Следует заметить, что энтропия множества случайных событий $\mathfrak{X}$, определенная выше классическим способом (2), как энтропия случайного элемента K со значениями из $2^{\mathfrak{X}}$, определяется, как ей и положено, при помощи распределения нормированных вероятностей пересечений $p(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$.

Классическая энтропия обладает рядом свойств, оправдывающих ее выбор в качестве характеристики степени неопределенности. Во-первых, она достигает максимума для "наиболее случайного" эксперимента, когда все $p(X) = 2^{-|\mathfrak{X}|}$, а, во-вторых, она обращается в нуль для "наименее случайного" эксперимента, когда одно из значений $x \subseteq \mathfrak{X}$ случайного множества событий достоверно $p(X) = 1$, а другие — невозможны.

Для того чтобы интерпретировать предложенные нормализованные квазиэнтропии на эвентологическом языке, необходимо изучить их свойства. В работе подробно разбирается одно из свойств предложенных функционалов — максимум нормализованных квазиэнтропий случайного множества событий.

Рассмотрим Θ -распределение вероятностей $f(X)$, порожденное множеством избранных событий $\mathfrak{X}$: $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Зафиксируем сумму вероятностей $z_f = z$ и рассмотрим распределение вероятностей

$$\{q(X) = f(X)/z, X \subseteq \mathfrak{X}\}. \quad (4)$$

Для распределения вероятностей q выполняется условие нормировки $\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} q(X) = 1$. Определим энтропию распределения q классическим способом (2). Известно, что энтропия $S_q(\mathfrak{X})$ распределения вероятностей q достигает максимума $\max S_q = \ln 2^{|\mathfrak{X}|}$ на равномерном распределении:

$$q(X) = \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}. \quad (5)$$

Нормализованная квазиэнтропия $s_f(\mathfrak{X})$ распределения вероятностей $f(X)$ связана с энтропией $S_q(\mathfrak{X})$ нормализованного распределения вероятностей q по формуле

$$s_f(\mathfrak{X}) = S_q(\mathfrak{X}) - \ln z. \quad (6)$$

Очевидно, что нормализованная квазиэнтропия $s_f(\mathfrak{X})$ вида (3) будет достигать своего максимума на том же распределении вероятностей, что и энтропия $S_q(\mathfrak{X})$ нормализованного распределения q .

Сформулируем результаты поиска максимума нормализованных квазиэнтропий в виде теорем.

При доказательстве теорем будет использоваться формула [1]

$$\sum_{Z \subseteq Y \subseteq X} (-1)^{|Y|-|Z|} = \delta(X, Z) = \begin{cases} 1, & X = Z; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — множество избранных событий, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий, а K — случайное множество событий, определенное под $\mathfrak{X}$. Пусть заданы Θ -распределения вероятностей пересечений $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ с фиксированной суммой вероятностей $z(\mathfrak{X}) = 1$ и вероятностей объединений $\{u(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ с фиксированной суммой вероятностей

$Z(\mathfrak{X})$. Тогда соответствующие нормализованные квазиэнтропии $s(\mathfrak{X})$ и $S(\mathfrak{X})$ случайного множества событий достигают максимума в классе равномерных распределений $\mathcal{K}_1(\mathfrak{X})$:

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{X}) = \left\{ p(X), \quad X \subseteq \mathfrak{X} : p(X) = \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}} \right\}, \quad (8)$$

зависящих от параметра $|\mathfrak{X}|$. Соответствующие максимумы:

$$\max s(\mathfrak{X}) = |\mathfrak{X}| \ln 2, \quad \max S(\mathfrak{X}) = \ln \frac{2^{|\mathfrak{X}|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}.$$

Доказательство. 1. Так как распределение вероятностей пересечений является распределением вероятностей в обычном смысле, то энтропия $s(\mathfrak{X})$ достигает максимума $\max S(K) = \ln 2^{|\mathfrak{X}|}$ на равномерном распределении: $p(X) = 2^{-|\mathfrak{X}|}, \forall X \in 2^{\mathfrak{X}}$.

2. Рассмотрим $\mathfrak{A}$ -распределение вероятностей объединений $u(X)$, порожденное множеством избранных событий $\mathfrak{X}: \{u(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Зафиксируем сумму вероятностей (1) $Z(\mathfrak{X}) = z$ и рассмотрим распределение вероятностей

$$\{q(X) = u(X)/z, X \subseteq \mathfrak{X}\}. \quad (9)$$

Энтропия S_q будет достигать своего максимума на распределении вида (5). Следовательно, нормализованная квазиэнтропия $S(\mathfrak{X})$ будет достигать своего максимума на том же распределении вероятностей, что и энтропия S_q нормализованного распределения q . Применяя (1), (9) получаем:

$$u(X) = \frac{Z(\mathfrak{X})}{2^{|\mathfrak{X}|}} = \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|}} = 1 - \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Воспользуемся формулами обращения Мебиуса [1]:

$$p^{X^c} = \sum_{X \subseteq Y} (1 - u(Y)) = \sum_{X \subseteq Y} \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}} = \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}} \sum_{X \subseteq Y} 1 = \frac{2^{|X^c|}}{2^{|\mathfrak{X}|}}.$$

Следует заметить, что такое распределение подвероятностей пересечения соответствует равномерному распределению вероятностей пересечений, т.е. $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X} : p(X) = 2^{-|\mathfrak{X}|}\}$.

Таким образом получаем класс $\mathcal{K}_1(\mathfrak{X})$ равномерных распределений вероятностей (8), которые доставляют максимум нормализованной квазиэнтропии $S(\mathfrak{X})$. Значение этого максимума составляет:

$$\max S(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \left(1 - \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}}\right) = \ln \frac{2^{|\mathfrak{X}|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}.$$

Теорема 2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — множество избранных событий, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий, а K — случайное множество событий, определенное под $\mathfrak{X}$. Пусть заданы $\mathfrak{A}$ -распределения надвероятностей пересечений $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ с фиксированной суммой вероятностей $z_{\mathfrak{X}}$ и подвероятностей объединений $\{u^X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ с фиксированной суммой вероятностей $Z^{\mathfrak{X}}$. Тогда соответствующие нормализованные квазиэнтропии $s_p(\mathfrak{X})$ и $S^u(\mathfrak{X})$ случайного множества событий достигают максимума в классе распределений $\mathcal{K}_2(\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|}, |\mathfrak{X}|)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|}, |\mathfrak{X}|) &= \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X} : \\ p(\emptyset) &= \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad p(\mathfrak{X}) = \frac{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad p(X) = 0, \quad X \subset \mathfrak{X}\}, \end{aligned} \quad (10)$$

зависящих от параметров $|\mathfrak{X}|$, и $\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|}$. Соответствующие максимумы:

$$\max s_p(\mathfrak{X}) = \frac{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|}} \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \right), \quad \max S^u(\mathfrak{X}) = \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{X}|}} \right).$$

Доказательство. 1. Рассмотрим $\mathfrak{A}$ -распределение надвероятностей p_X , порожденное множеством избранных событий $\mathfrak{X}: \{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Зафиксируем сумму вероятностей (1) $z_{\mathfrak{X}} = z$ и рассмотрим распределение вероятностей $\{q(X) = p_X/z, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Заметим, что надвероятность пустого множества событий $p_{\emptyset} = 1$, следовательно, $q(\emptyset) = 1/z$. Тогда условие нормировки можно переписать как

$$\sum_{X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}} q(X) = 1 - \frac{1}{z}.$$

Энтропия распределения q будет такова:

$$S_q(\mathfrak{X}) = - \sum_{X \in \mathfrak{X}} q(X) \ln q(X) = \frac{\ln z}{z} - \sum_{X \in \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}} q(X) \ln q(X).$$

Несложно показать, что энтропия $S_q(\mathfrak{X})$ будет достигать своего максимума на распределении вида

$$q(\emptyset) = \frac{1}{z}, \quad q(X) = \frac{z-1}{z(2^{|\mathfrak{X}|-1})}, \quad X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}. \quad (11)$$

Нормализованная квазиэнтропия $s_p(\mathfrak{X})$ распределения вероятностей p_X связана с энтропией S_q нормализованного распределения вероятностей q по формуле (6). Следовательно, нормализованная квазиэнтропия $s_p(\mathfrak{X})$ будет достигать своего максимума на том же распределении вероятностей, что и энтропия S_q нормализованного распределения q .

Применяя (4), (11), получаем:

$$p_\emptyset = 1, \quad p_X = \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} = \frac{\mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|-1}}{2^{|\mathfrak{X}|-1}}, \quad X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}. \quad (12)$$

Воспользуемся формулами обращения Мебиуса [1]. Рассмотрим сначала все $p(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}$:

$$\begin{aligned} p(X) &= \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y = \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} = \\ &= \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \delta(\mathfrak{X}, X) = \begin{cases} \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} = \frac{\mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|-1}}{2^{|\mathfrak{X}|-1}}, & X = \mathfrak{X}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим $p(\emptyset)$.

$$\begin{aligned} p(\emptyset) &= p_\emptyset + \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \sum_{Y \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|Y|} = p_\emptyset + \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \left(\sum_{Y \subseteq \mathfrak{X}} (-1)^{|Y|} - (-1)^{|\emptyset|} \right) = \\ &= 1 + \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \delta(\mathfrak{X}, \emptyset) - 1 = 1 - \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} = \frac{2^{|\mathfrak{X}|-1} - \mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|}}{2^{|\mathfrak{X}|-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем класс $\mathcal{K}_2(\mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|}, |\mathfrak{X}|)$ распределений вероятностей вида (10), которые доставляют максимум нормализованной квазиэнтропии $s_p(\mathfrak{X})$. Значение этого максимума:

$$\max s_p(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{z_{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}} \frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \ln \left(\frac{z_{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}} \right) = \frac{\mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|-1}}{\mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|}} \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|-1}}{\mathbf{E}2^{|\mathcal{K}|}} \right).$$

2. Рассмотрим $\mathcal{E}$ -распределение подвероятностей объединений u^X , порожденное множеством избранных событий $\mathfrak{X}$: $\{u^X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Зафиксируем сумму вероятностей (1) $Z^{\mathfrak{X}} = z$ и рассмотрим распределение вероятностей $\{q(X) = u^X/z, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Заметим, что подвероятность всего множества событий $u^{\mathfrak{X}} = 0$, следовательно, $q(\mathfrak{X}) = 0$. Тогда условие нормировки можно переписать в виде $\sum_{X \subset \mathfrak{X}} q(X) = 1$. Нетрудно показать, что энтропия S_q распределения q будет достигать своего максимума на распределении вида

$$q(\mathfrak{X}) = 0, \quad q(X) = \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|-1}}, \quad X \subset \mathfrak{X}. \quad (13)$$

Нормализованная квазиэнтропия $S^u(\mathfrak{X})$ распределения вероятностей u^X связана с энтропией S_q нормализованного распределения вероятностей q по формуле (6). Следовательно, нормализованная квазиэнтропия $S^u(\mathfrak{X})$ будет достигать своего максимума на том же распределении вероятностей, что и энтропия S_q нормализованного распределения q .

Применяя (4), (13), получаем:

$$u^{\mathfrak{X}} = 0, \quad u^X = \frac{Z^{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|-1}}, \quad X \subset \mathfrak{X}.$$

Воспользуемся формулами обращения Мебиуса [1]:

$$p^{X^c} = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|Y|} (1 - u^{Y^c}) = (1 - u^{\emptyset^c}) + \sum_{Y \subseteq X \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|Y|} (1 - u^{Y^c}) =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{Z^{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}\right) \sum_{Y \subseteq X \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|Y|} = 1 + \left(1 - \frac{Z^{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}\right) (\delta(X, \emptyset) - 1).$$

Тогда получаем распределение подвероятностей пересечений:

$$p^{\emptyset^c} = p^{\mathfrak{X}} = 1, \quad p^{X^c} = \frac{Z^{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} = \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|K|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}.$$

Далее, согласно формулам обращения Мебиуса

$$\begin{aligned} p_X &= \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|Y|} p^{Y^c} = p^{\emptyset^c} + \sum_{Y \subseteq X \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|Y|} p^{Y^c} = 1 + \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|K|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \sum_{Y \subseteq X \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|Y|} = \\ &= 1 + \frac{\mathbf{E}2^{|K|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} (\delta(X, \emptyset) - 1) = \begin{cases} 1, & X = \emptyset; \\ \frac{\mathbf{E}2^{|K|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, пришли к распределению надвероятностей вида (12), откуда получаем класс $\mathcal{K}_2(\mathbf{E}2^{|K|}, |\mathfrak{X}|)$ распределений вероятностей вида (10), которые доставляют максимум нормализованной квазиэнтропии $S^u(\mathfrak{X})$. Значение этого максимума составляет:

$$\max S^u(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{Z^{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \frac{Z^{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \ln \left(\frac{Z^{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \right) = \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{Z^{\mathfrak{X}}} \right) = \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|K|}} \right).$$

Теорема 3. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — множество избранных событий, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий, а K — случайное множество событий, определенное под $\mathfrak{X}$. Пусть заданы $\mathcal{E}$ -распределения подвероятностей пересечений $\{p^X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ с фиксированной суммой вероятностей $z^{\mathfrak{X}}$ и надвероятностей объединений $\{u_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$ с фиксированной суммой вероятностей $Z_{\mathfrak{X}}$. Тогда соответствующие нормализованные квазиэнтропии $s^p(\mathfrak{X})$ и $S_u(\mathfrak{X})$ случайного множества событий достигают максимума в классе распределений $\mathcal{K}_3(\mathbf{E}2^{|K^c|}, |\mathfrak{X}|)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(\mathbf{E}2^{|K^c|}, |\mathfrak{X}|) &= \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X} : \\ p(\emptyset) &= \frac{\mathbf{E}2^{|K^c|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad p(\mathfrak{X}) = \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|K^c|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad p(X) = 0, \quad X \subset \mathfrak{X}, \end{aligned} \quad (14)$$

зависящих от параметров $|\mathfrak{X}|$ и $\mathbf{E}2^{|K|}$. Соответствующие максимумы:

$$\max s^p(\mathfrak{X}) = \left(1 - \frac{1}{\mathbf{E}2^{|K^c|}}\right) \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{\mathbf{E}2^{|K^c|} - 1} \right), \quad \max S_u(\mathfrak{X}) = \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|K^c|}} \right).$$

Доказательство. 1. Рассмотрим $\mathcal{E}$ -распределение подвероятностей p^X , порожденное множеством избранных событий $\mathfrak{X}$: $\{p^X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Зафиксируем сумму вероятностей (1) $z^{\mathfrak{X}} = z$ и рассмотрим распределение вероятностей $\{q(X) = p^X/z, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Заметим, что подвероятность всего множества событий $\mathfrak{X}$ $p^{\mathfrak{X}} = 1$, следовательно, $q(\mathfrak{X}) = 1/z$. Тогда условие нормировки можно переписать в виде $\sum_{X \subset \mathfrak{X}} q(X) = 1 - 1/z$.

Тогда энтропия S_q распределения q будет

$$S_q(\mathfrak{X}) = - \sum_{X \subset \mathfrak{X}} q(X) \ln q(X) = \frac{\ln z}{z} - \sum_{X \subset \mathfrak{X}} q(X) \ln q(X).$$

Нетрудно показать, что энтропия S_q будет достигать своего максимума на распределении вида

$$q(\mathfrak{X}) = \frac{1}{z}, \quad q(X) = \frac{z - 1}{z(2^{|\mathfrak{X}|} - 1)}, \quad X \subset \mathfrak{X}. \quad (15)$$

Нормализованная квазиэнтропия $s_p(\mathfrak{X})$ распределения вероятностей p_X связана с энтропией S_q нормализованного распределения вероятностей q по формуле (6). Следовательно, нормализованная квазиэнтропия $s^p(\mathfrak{X})$ будет достигать своего максимума на том же распределении вероятностей, что и энтропия S_q нормализованного распределения q .

Применяя (4), (15), получаем:

$$p^{\mathfrak{X}} = 1, \quad p^X = \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} = \frac{\mathbf{E}2^{|K^c|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad X \subset \mathfrak{X}. \quad (16)$$

Воспользуемся формулами обращения Мебиуса:

$$\begin{aligned} p(X) &= \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X|-|Y|} p^Y = \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{(2^{|\mathfrak{X}|} - 1)} \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X|-|Y|} = \\ &= \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \delta(X, \emptyset) = \begin{cases} \frac{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, & X = \emptyset; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $p(\mathfrak{X})$.

$$p(\mathfrak{X}) = 1 + \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \sum_{Y \subset \mathfrak{X}} (-1)^{|\mathfrak{X}|-|Y|} = 1 + \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} (\delta(\mathfrak{X}, \emptyset) - 1) = 1 - \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} = \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}.$$

Таким образом, получаем класс $\mathcal{K}_3(\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}, |\mathfrak{X}|)$ распределений вероятностей вида (10), которые доставляют максимум нормализованной квазиэнтропии $s^p(\mathfrak{X})$. Значение этого максимума составляет:

$$\max s^p(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{z^{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subset \mathfrak{X}} \frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \ln \left(\frac{z^{\mathfrak{X}} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \right) = \left(1 - \frac{1}{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}} \right) \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|} - 1} \right).$$

2. Рассмотрим Θ -распределение надвероятностей объединений u_X , порожденное множеством избранных событий $\mathfrak{X}$: $\{u_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Зафиксируем сумму вероятностей (1) $Z_{\mathfrak{X}} = z$ и рассмотрим распределение вероятностей

$$\{q(X) = u_X/z, X \subseteq \mathfrak{X}\}. \quad (17)$$

Заметим, что надвероятность пустого множества событий $u_{\emptyset} = 0$, следовательно, $q(\emptyset) = 0$. Тогда условие нормировки можно переписать в виде: $\sum_{X \in \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}} q(X) = 1$. Энтропия S_q распределения q будет достигать своего максимума на распределении

$$q(\emptyset) = 0, \quad q(X) = \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}.$$

Нормализованная квазиэнтропия $S_u(\mathfrak{X})$ распределения вероятностей u_X связана с энтропией S_q нормализованного распределения вероятностей q по формуле (6). Следовательно, нормализованная квазиэнтропия $S_u(\mathfrak{X})$ будет достигать своего максимума на том же распределении вероятностей, что и энтропия S_q нормализованного распределения q . Пользуясь (4), (17) получаем:

$$u_{\emptyset} = 0, \quad u_X = \frac{Z_{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}, \quad X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}.$$

Воспользуемся формулами обращения Мебиуса:

$$p^{X^c} = 1 - u_x, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

чтобы прийти к распределению подвероятностей пересечений вида (16):

$$p^{\emptyset^c} = p^{\mathfrak{X}} = 1, \quad p^{X^c} = 1 - \frac{Z_{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} = 1 - \frac{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} = p^X, \quad X \subset \mathfrak{X}.$$

Откуда получаем класс $\mathcal{K}_3(\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}, |\mathfrak{X}|)$ распределений вероятностей вида (10), которые доставляют максимум нормализованной квазиэнтропии $S_u(\mathfrak{X})$. Значение этого максимума составляет:

$$\max S_u(\mathfrak{X}) = -\frac{1}{Z_{\mathfrak{X}}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}} \frac{Z_{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \ln \left(\frac{Z_{\mathfrak{X}}}{2^{|\mathfrak{X}|} - 1} \right) = \ln \left(\frac{2^{|\mathfrak{X}|} - 1}{2^{|\mathfrak{X}|} - \mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}} \right).$$

Замечание. Θ -распределения из классов $\mathcal{K}_2(\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}|}, |\mathfrak{X}|)$ и $\mathcal{K}_3(\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}, |\mathfrak{X}|)$ соответствуют событиям с вложенной структурой зависимостей [2]. Параметры $\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}|}$ и $\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}$ имеют хорошую эвентологическую интерпретацию: $\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}|}$ — это среднее число множеств, которые можно образовать из событий, наступивших в $\mathfrak{X}$, а $\mathbf{E}2^{|\mathfrak{K}^c|}$ — это среднее число множеств, которые можно образовать из событий, не наступивших в $\mathfrak{X}$.

В работе предложено использовать модификацию классической формы определения энтропии вероятностного распределения для определения новых числовых характеристик эвентологического распределения множества случайных событий $\mathfrak{X}$, которые были названы *нормализованными квазиэнтропиями*

эвентологического распределения. Из введенных квазиэнтропий одна совпадает с классически определенной энтропией.

Для того чтобы интерпретировать предложенные квазиэнтропии на эвентологическом языке, необходимо изучить их свойства. В работе подробно разбирается одно из свойств предложенных функционалов — максимум нормализованных квазиэнтропий случайного множества событий.

В дальнейшем необходимо исследовать все свойства этих новых числовых функционалов от распределений вероятностей событий-террасок, которые позволят научиться понимать классическую энтропию в более широком эвентологическом смысле, чтобы в итоге забыть о приставке "квази" и все называть энтропиями эвентологического распределения.

Список литературы

- [1] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Избранные вопросы эвентологии риска. Сет-функции и их свойства* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ // е-Записки ФАМ семинара'2004. Т. 8. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2004. – С. 30-72.
- [2] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Экономическая эвентология. Эвентологические структуры и эвентологический скоринг* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ // е-Записки ФАМ семинара'2004. Т. 8. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2004. – С. 73-113.
- [3] SEMENOVA D. *On New Notion of Quasi-Entropies of Eventological Distribution* / D.SEMENOVA // Proceedings of the Second IASTED International Multi-Conference on Automation Control And Information Technology, Novosibirsk, June 20-24, 2005. – P. 380-385.

ON NORMOLIZED QUASI ENTROPIES OF EVENTOLOGICAL DISTRIBUTIONS

D.V. Semenova

In work was offered to use updating of the classical form of definition of probability distribution entropy for definition of new numerical characteristics eventological distributions of set of random events $\mathfrak{X}$ which have been named normolized quasi-entropy of eventological distributions. Theorems of maxima normalized quasi-entropy are formulated and proved.