

## СТАТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ИЗГИБА УПРУГОЙ КОНСОЛИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ: ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ<sup>1</sup>

Ю.В. Захаров, А.Ю. Власов, К.Г. Охоткин\*

*В работе получены точные решения для геометрически нелинейного случая больших изгибов упругой консоли, вращающейся с постоянной угловой скоростью относительно точки закрепления и изгибаемой сосредоточенной на ее конце силой в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения. Решения выражены в эллиптических функциях. Показано, что для всех мод, кроме первой, равновесные формы возможны лишь при определенных соотношениях поперечной и растягивающей составляющих нагрузки. Получены также приближенные зависимости для стрелы прогиба консоли от нагрузки.*

Изгиб консоли в поле центробежных сил, когда жесткая заделка равномерно вращается, на свободный конец действуют перпендикулярно плоскости вращения поперечная сжимающая, а в плоскости продольная растягивающая силы, является, возможно, чрезмерным, упрощением турбинной лопатки или лопасти вертолета. В связи с этим изучение статически равновесных форм изгиба после потери устойчивости, а также пороговых значений нагрузок актуально и требует дополнительного рассмотрения. Ранее для консоли с сосредоточенной на конце массой задачи изгиба в плоскости вращения под действием силы, перпендикулярной ей, при условии малости прогибов, рассматривались в работе [1]. Решение в геометрически нелинейной постановке, применительно к расчету изгиба консоли в механизме центробежного регулятора скорости вращения вала, получено в работе [2], где точные выражения для стрелы прогиба были выражены через три эллиптических параметра. Наиболее общий случай изгибно-крутильных колебаний пространственного стержня в поле центробежных сил с учетом центробежных и кориолисовых сил инерции при условии малости прогиба изложен в работе [3]. В работах [4-6] были даны случаи продольно-поперечного нелинейного изгиба консоли при поступательном перемещении сосредоточенной на свободном конце силы, направленной под произвольным заданным углом, и случай следящего перемещения, когда вектор действующей силы сохраняет в процессе изгиба постоянный угол с направлением касательной к консоли в точке приложения силы.

В настоящей работе, следуя развитому в [4, 5] методу, приводится аналитическое решение задачи изгиба консоли для общего случая перемещения действующей на свободный конец консоли сосредоточенной силы, вектор которой при изменении компонент изменяется по направлению и модулю. Показано, как из общего решения следует решение для задачи изгиба консоли в поле центробежных сил при изгибе в плоскости, перпендикулярной к плоскости вращения. При этом находятся пороги потери устойчивости консоли, связанные с поперечной и продольной нагрузками, и выражения для профиля консоли, в зависимости от одного параметра — эллиптического модуля.

Схема нагружения консоли сосредоточенной на конце силой при изгибе в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения показана на рис. 1. Запишем уравнение равновесия стержня, следуя [5], в виде, где  $\theta$  угол между осью  $Ox$  и касательной к оси стержня в случае, если за положительный отсчет углов выбрано направление против часовой стрелки:

$$EI \frac{d^2\theta}{dl^2} - P_{x'} \sin \theta + P_{y'} \cos \theta = 0, \quad (1)$$

где  $P_{x'}$ ,  $P_{y'}$  — проекции результирующей силы на оси координат  $Ox'$ ,  $Oy'$  соответственно.

Преобразуем уравнение (1) к уравнению типа нелинейного маятника. Для упрощения уравнения введем модуль  $P = (P_{x'}^2 + P_{y'}^2)^{1/2}$  действующей сосредоточенной силы постоянного направления и угол  $\varphi_0$  наклона вектора силы к оси  $Ox'$ . Угол наклона результирующей силы изменяется в пределах  $\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi$ . Угол  $\varphi_0 = \pi$  соответствует ситуации, когда стержень совпадает с осью  $Ox$ ; поперечная компонента силы равна нулю и деформация типа чистого изгиба невозможна. Произвольность в изменении вектора результирующей нагрузки достигается за счет изменения его компонент, как это возможно при вращении консоли за счет увеличения растягивающей нагрузки с увеличением угловой скорости вращения. В соответствии с рис. 1 компоненты действующей силы будут представлены в виде

$$P_{x'} = -P \cos \varphi_0, \quad P_{y'} = P \sin \varphi_0. \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при подготовке гранта РФФИ №06-01-00602.

\* © Ю.В.Захаров, Красноярский государственный университет; А.Ю.Власов, Сибирский государственный технологический университет, 2006. E-mail: vay@atomlink.ru; К.Г. Охоткин, Сибирский государственный аэрокосмический университет, 2006. E-mail: okg2000@mail.ru

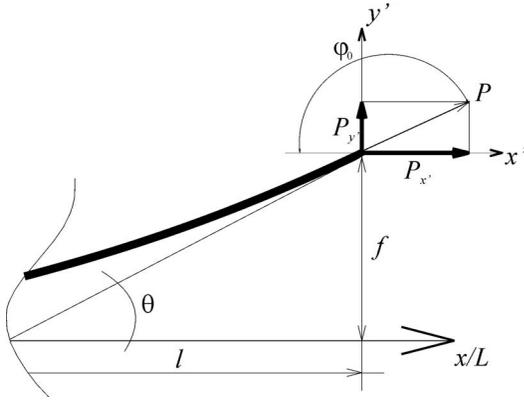


Рис. 1: Схема нагружения консоли при изгибе в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения:  $P_{x'}$ ,  $P_{y'}$  — проекции результирующей силы  $P$  на оси координат,  $\varphi_0$  — угол приложения результирующей силы,  $f$  — прогиб конца консоли

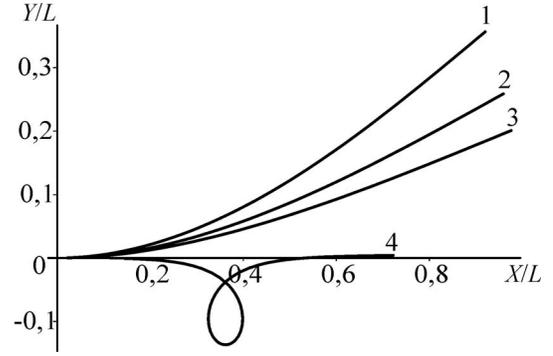


Рис. 2: Профили стержня — случай изгиба в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения. Первая мода при  $P_{y'}/P_c = 0,5$ : 1 —  $P_{x'}/P_c = 0$ ; 2 —  $P_{x'}/P_c = 0,5$ ; 3 —  $P_{x'}/P_c = 1$ . Вторая мода 4 —  $P_{x'}/P_c = 84,16$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим уравнение равновесия гибкого стержня при произвольном угле приложения нагрузки:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{P}{EI} \sin(\theta + \varphi_0) = 0. \quad (3)$$

Введем безразмерную длину  $t = l/L$ , изменяющуюся от 0 до 1, и сделаем замену  $\gamma = \theta + \varphi_0$ . Введем обозначение для собственного числа  $q^2 = PL^2/EI$ . Тогда получим уравнение для угла  $\gamma$  типа уравнения нелинейного маятника:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + q^2 \sin \gamma = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$\gamma(t) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \quad (5)$$

$$d\gamma(t)/dt = 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k), \quad (6)$$

где функции  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{cn}$  — эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций  $k$  и параметр  $F_1$  играют роль констант интегрирования, и их связь с силой  $P$  и углом  $\varphi_0$  определяется из граничных условий для каждого конкретного случая изгиба стержня.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1.$$

Используя выражение (5), получим

$$\cos \gamma(t) = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad \sin \gamma(t) = 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$

Интегрируя соотношения  $dx/dl = \cos \theta$ ,  $dy/dl = \sin \theta$ , получим координаты произвольной точки стержня:

$$x/L = X_0 \cos \varphi_0 + Y_0 \sin \varphi_0, \quad y/L = Y_0 \cos \varphi_0 - X_0 \sin \varphi_0. \quad (7)$$

Выражения для  $X_0$  и  $Y_0$  записываются в следующем виде:

$$X_0 = t + 2[E(\operatorname{am} u) - E(\operatorname{am} F_1)]/q, \quad Y_0 = 2k[\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cnu}]/q, \quad (8)$$

где  $E(\operatorname{am} u)$  — неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды. Выражения (7) и (8) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром  $t$  — приведенной криволинейной длиной.

Из граничного условия, соответствующего заземлению в заделке  $\theta(0) = 0$ , константа  $F_1$  имеет вид

$$F_1 = F \left[ \arcsin \left( \frac{\sin \varphi_0/2}{k} \right), k \right]. \quad (9)$$

Соответственно, модуль  $k$  изменяется в пределах, определяемых углом, под которым действует результирующая сила,  $\sin(\varphi_0/2) < k < 1$ . Применив второе условие, соответствующее равенству нулю на конце стержня изгибающего момента  $d\theta/dl(L) = 0$ , получим спектр собственных значений  $P/P_c(k)$ , который в свою очередь определяет систему порогов внешней нагрузки:

$$\frac{P}{P_c} \equiv \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 q^2 = \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \{ (2n-1) K(k) - F_1 \}^2, \quad (10)$$

где  $P = (\pi/2)^2 EI/L^2$  — эйлерова критическая сила,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — номер моды решения;  $K(k)$  и  $F(\varphi, k)$  — соответственно, полный и неполный эллиптические интегралы первого рода. Значения угла  $\varphi_0$  применительно к задаче изгиба консоли в поле центробежных сил в зависимости от компонент результирующей силы даются выражением

$$\varphi_0 = \pi/2 + \operatorname{arctg}(P_{x'}/P_{y'}). \quad (11)$$

Пороговые значения результирующей нагрузки будут реализовываться при  $k = \sin(\varphi_0/2)$ . Тогда, учитывая (10), получим

$$\frac{P}{P_c} = \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 (n-1)^2 K^2(\sin \varphi_0/2). \quad (12)$$

При  $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$  выражение (12) переходит в известное выражение для пороговых нагрузок [4] в случае действия только поперечной силы. Представим выражение (12) для случая изгиба консоли в поле центробежных сил, учитывая (11) и схему нагружения, показанную на рис. 1, в виде

$$\left( \frac{P_{y'}}{P_c} \right)^2 + \left( \frac{P_{x'}}{P_c} \right)^2 = \left( \frac{4}{\pi} \right)^4 (n-1)^4 K^4 \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{P_{y'}}{\sqrt{P_{y'}^2 + P_{x'}^2}}} + \sqrt{1 - \frac{P_{y'}}{\sqrt{P_{y'}^2 + P_{x'}^2}}} \right) \right). \quad (13)$$

Соотношение (13) определяет возможные конфигурации для действующих сил, при которых реализуются статически равновесные формы изгиба консоли для разных мод. Зависимость поперечной нагрузки от растягивающей в соответствии с выражением (13) для второй и третьей моды показана на рис. 3. При отсутствии растягивающей нагрузки пороги для поперечной нагрузки принимают известные значения [4]. Профили консоли в зависимости от нагрузки  $P_{x'}/P_c, P_{y'}/P_c$  даются соотношениями (7), (8), (10) и для первой и второй мод примут вид, показанный на рис 2.

Найдем выражение для стрелы прогиба консоли, отнесенной к длине консоли. Для этого, учитывая, что  $t = 1$ , запишем в выражение (7) для первой моды  $n = 1$

$$f \equiv \frac{y}{L} = \frac{2k \operatorname{cn} F_1}{(K - F_1)} \cos \varphi_0 + \left( 1 - \frac{2[E - E(\operatorname{am} F_1)]}{(K - F_1)} \right) \sin \varphi_0. \quad (14)$$

Для решения задачи о приближенных формулах стрелы прогиба получим разложения разностей эллиптических интегралов, входящих в выражение (14), в окрестности произвольной точки  $k_0 = \sin(\varphi_0/2)$ . С учетом первых двух членов разложения разность интегралов будет представлена в общем (в смысле произвольности выбора угла, под которым действует нагрузка) виде:

$$K(k) - F_1(k) \approx \frac{\sqrt{2}\sqrt{k-k_0}}{\sqrt{1-k_0^2}\sqrt{k_0}} \left( 1 - c_0(k-k_0) + c_1(k-k_0)^2 + \dots \right), \quad (15)$$

$$E(k) - E_1(k) \approx \frac{\sqrt{2}\sqrt{k-k_0}}{\sqrt{1-k_0^2}\sqrt{k_0}} \left( 1 - k_0^2 + c_2(k-k_0) - c_3(k-k_0)^2 + \dots \right), \quad (16)$$

где  $c_0 = \frac{(5-23k_0^2+31k_0^4-13k_0^6)}{12(1-k_0^2)^3 k_0}$ ,  $c_1 = \frac{(129-403k_0^2+803k_0^4-529k_0^6)}{480(1-k_0^2)^3 k_0^2}$ ,  $c_2 = \frac{(3k_0^4+2k_0^2-5)}{12k_0(1-k_0^2)}$ ,  $c_3 = \frac{(15k_0^4+242k_0^2-129)}{480k_0^2(1-k_0^2)}$ .

Получим зависимость  $\sqrt{k-k_0}$  от приведенной результирующей нагрузки. Возьмем первые два члена разложения в выражении (10) для спектра собственных значений в точке  $\sqrt{k-k_0}$  и, используя выражение (15), получим уравнение

$$x^3 - \frac{x}{c} + \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{k_0(1-k_0^2)} \lambda}{c\sqrt{2}} = 0.$$

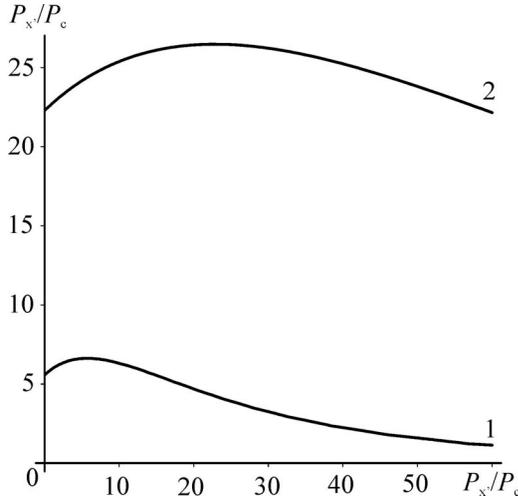


Рис. 3: Возможные значения пороговых нагрузок в соответствии с (13) для случая 1 — вторая мода, 2 — третья мода

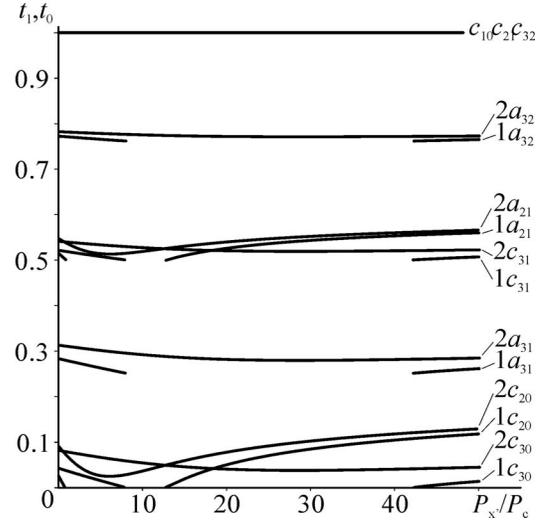


Рис. 4: Координаты точек перегиба  $t_1$  и точек сжатия  $t_0$  при различных значениях коэффициента поперечной нагрузки  $P_{y'}/P_c$  и поперечной нагрузки:  $1t_0^{nm}$  и  $1t_1^{nm} - P_{y'}/P_c = 5,9$ ;  $2t_0^{nm}$  и  $2t_1^{nm} - P_{y'}/P_c = 7$

На интервале изменения углов  $\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi$  это кубическое уравнение относительно  $x = \sqrt{k - k_0}$  имеет единственное действительное решение, которое находится по формуле Ферро-Кардано. Предполагая, что результирующая нагрузка мала, получившееся решение раскладываем в ряд по параметру  $\lambda = P/P_c$ , тогда

$$(k - k_0) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - k_0^2) k_0 \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{c\pi^2}{8} k_0 (1 - k_0^2) \lambda^2\right). \quad (17)$$

Приближенное выражение для стрелы прогиба в зависимости от угла приложения и модуля малой нагрузки, учитывая (15), (16) и (17), дается выражением

$$f \approx \frac{\pi^2}{12} \sin \varphi_0 \lambda + \frac{\pi^4}{240} \sin 2\varphi_0 \lambda^2 \dots \quad (18)$$

Очевидно, что при  $\varphi_0 = \pi/2$  соотношение (18) перейдет в хорошо известное из курса сопротивления материалов [9] выражение для стрелы прогиба консоли при малых поперечных нагрузках. Учитывая выражение (11) для угла  $\varphi_0$  и приведенной нагрузки  $\lambda$ , а также малость продольной составляющей нагрузки  $P_{x'}$ , получим приближенное выражение для стрелы прогиба в зависимости от поперечной и продольной составляющих нагрузок:

$$f \approx \frac{\pi^2}{12} \frac{P_{y'}}{P_c} - \frac{\pi^4}{120} \frac{P_{x'} P_{y'}}{P_c^2} + \dots \quad (19)$$

Зависимости (18), (19) в случае малой результирующей нагрузки могут использоваться для определения стрел прогиба консоли при перемещениях свободного конца до 20 % длины с относительно ошибкой менее 3 %.

Точки изогнутой упругой линии, в которых обращается в ноль ее кривизна  $d\theta/dl$ , являются точками перегиба упругой линии стержня. Обозначим искомую криволинейную координату такой точки  $t_1$ . Используя выражение для кривизны (6), учитывая свойства нулей эллиптического косинуса Якоби  $\text{sn}[(2m + 1)K(k)] = 0$  и выражение (10) для собственного числа, получим

$$[(2n-1)K(k) - F_1] t_1 + F_1 = (2m+1)K(k),$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — номер моды решения, а  $m$  — номер нуля эллиптического косинуса, совпадающий с порядковым номером точки перегиба. Окончательно находим

$$t_1^{nm} = \frac{(2m + 1) K(k) - F_1}{(2n - 1) K(k) - F_1}, \quad (20)$$

где параметр  $F_1$  дается выражением (9), а соответствующие варианту нагружения выражения для  $\varphi_0$  определяются с учетом (11). Число точек перегиба зависит от номера моды решения и изменяется в

следующих пределах  $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ . На первой моде имеется одна точка перегиба на конце стержня,  $t_1^{10} = 1$ . На второй моде появляются две точки перегиба, первая постепенно перемещается вдоль стержня при  $\sin(\varphi_0/2) \leq k \leq 1$  в пределах:  $0 \leq t_1^{20} \leq 1/3$  и вторая  $t_1^{21} = 1$ . На третьей моде три точки перегиба –  $0 \leq t_1^{30} \leq 1/5, 1/2 \leq t_1^{31} \leq 3/5, t_1^{32} = 1$ .

Точки, в которых совпадают угол наклона касательной и угол наклона сжимающей силы к оси  $Ox$ , назовем точками сжатия. Обозначим искомую криволинейную координату такой точки  $t_0$ . Положив в выражении для угла наклона касательной (5)  $\gamma(t_0) = 0$ , найдем

$$0 = 2\arcsin[k\operatorname{sn}(qt_0 + F_1, k)].$$

Отсюда, учитывая свойства нулей эллиптического синуса  $\operatorname{sn}[2mK(k)] = 0$  и выражение (6) для собственного числа  $q$ , получим, что

$$[(2n-1)K(k) - F_1]t_0 + F_1 = 2mK(k),$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – номер моды решения, а  $m$  – номер нуля эллиптического синуса, совпадающий с порядковым номером точки сжатия. Окончательно находим

$$t_0^{nm} = \frac{2mK(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}, \quad (21)$$

где параметр  $F_1$  дается выражением (9). Число точек сжатия зависит от номера моды решения и изменяется в следующих пределах  $m = 1, \dots, (n-1)$ . На первой моде точек сжатия нет. При  $n = 2$  появляется одна точка сжатия, которая при  $\sin(\varphi_0/2) \leq k \leq 1$  лежит в пределах:  $1/2 \leq t_0^{21} \leq 2/3$ . При  $n = 3$  две точки сжатия:  $1/4 \leq t_0^{31} \leq 2/5, 3/4 \leq t_0^{32} \leq 4/5$ .

На рис. 4 представлены точки перегиба и сжатия в случае фиксированной поперечной нагрузки и изменяющейся продольной. Видно, что существуют области значений нагрузок, при которых устойчивые состояния отсутствуют. Это связано с тем, что в случае фиксации поперечной нагрузки получить решения, соответствующие второй моде, возможно при определенной растягивающей нагрузке, обеспечивающей пороговое или запороговое значение результирующей нагрузки. При отсутствии продольной составляющей выражения (20), (21) определяют точки перегиба и сжатия на кривой для второй, третьей мод в результате действия только поперечной силы.

Использованный подход работ [4], [5] позволил получить точные решения для геометрически нелинейного случая больших изгибов упругой консоли, вращающейся с постоянной угловой скоростью относительно точки закрепления и изгибаемой сосредоточенной на ее конце силой в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения. На основе точных аналитических выражений получены приближенные формулы для стрел прогиба, пригодные для инженерных расчетов. Отличие от работы [2] состоит в том, что выражения для прогибов зависят от одного параметра – эллиптического модуля  $k$ , определяемого внешней нагрузкой и модой решения. Установлено, что равновесные состояния для мод выше первой могут реализовываться только при определенных значениях растягивающей и поперечной нагрузок.

Авторы благодарят В.Г. Суховольского за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] ПАНОВКО Я.Г. *Устойчивость и колебания упругих систем* / Я.Г. ПАНОВКО, И.И. ГУБАНОВА. – М.: Наука, 1979.
- [2] ПОПОВ Е.П. *Теория и расчет гибких упругих стержней* / Е.П. ПОПОВ. – М.: Наука, 1986.
- [3] ФИЛИППОВ А.П. *Колебания деформируемых систем* / А.П. ФИЛИППОВ. – М.: Машиностроение, 1970.
- [4] ЗАХАРОВ Ю.В. *Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли* / Ю.В. ЗАХАРОВ, А.А. ЗАХАРЕНКО // Вычисл. технол. – 1999. – Т. 4. – №1. – С. 48-54.
- [5] ЗАХАРОВ Ю.В. *Нелинейный изгиб тонких упругих стержней* / Ю.В. ЗАХАРОВ, К.Г. ОХОТКИН // ПМТФ. – 2002. – Т. 43. – №5. – С. 124-131.
- [6] ЗАХАРОВ Ю.В. *Изгиб стержней под действием следящей нагрузки* / Ю.В. ЗАХАРОВ, К.Г. ОХОТКИН, А.Д. СКОРОВОГАТОВ // ПМТФ. – 2004. – Т. 45. – №5. – С. 167-175.
- [7] ЗАХАРОВ Ю.В. *Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении* / Ю.В. ЗАХАРОВ, К.Г. ОХОТКИН, А.Ю. ВЛАСОВ // ПМТФ. – 2002. – Т. 43. – №5. – С. 132-134.

- [8] ШКУТИН Л.И. Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней / Л.И.ШКУТИН // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – №2. – С. 141 - 147.
- [9] ПИСАРЕНКО Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С.ПИСАРЕНКО, А.П.ЯКОВЛЕВ, В.В.МАТВЕЕВ. – Киев: Наукова думка, 1975.

**ELASTIC BUCKLING OF CANTILEVER UNDER THE IMPACT OF CENTRIFUGAL FORCE: EXACT AND APPROACH SOLUTION**

**Yu.V.Zakharov, A.Yu.Vlasov, K.G.Okhotkin**

*In case of geometrical nonlinear buckling of cantilever which rotated with constant angular velocity relative to the fixing end exact solutions were obtained. Cantilever has bended by the force which act on the free end in the plane which is perpendicular of rotation plane. Solutions are expressed in elliptic functions. With some relation between transversal and stretching load for all solutions modes except when the first stable form of elastic buckling are showed. Approach relations for bending deflection of cantilever which depend from load are obtained.*