УДК 517.55+511.3

О РЕШЕНИИ ОБЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ ПО КОНТУРУ[1]

Е.Н.Михалкин*

Приводится интегральная формула для решения общего алгебраического уравнения, в которой подынтегральное выражение является элементарной функцией, а контур интегрирования – петлёй.

История вопроса и формулировка теоремы

Общее алгебраическое уравнение имеет вид

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0.$$

Его решение (как алгебраическая функция коэффициентов) обладает двойной однородностью и простой заменой сводится [1] к уравнению вида

$$z^q = z^p + x_1 z^{m_1} + ... + x_s z^{m_s},\ q > p \geq 0,\ m_1 > ... > m_s > 0; \tag{1}$$

иными словами, любые два коэффициента мы можем "заморозить полагая их равными $+1$ и -1.

В 1927 году Биркелан ([2], [3]) используя формулу Лагранжа, привёл разложение в гипергеометрический ряд для $q-p$ корней $z_j(x)$, не обращающихся при $x_1 = ... = x_s = 0$ в нуль, уравнения (1). Формула Биркелана следующая:

$$z_j(x) = \varepsilon^j \frac{1}{q-p} \sum_{|k| \geq 0} \varepsilon^{jv} \frac{(\tau, r-1)}{k_1!...k_s!} x_1^{k_1} ... x_s^{k_s}, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{q-p}},\ r = \sum_{\nu=1}^{s} k_\nu,\ v = \sum_{\nu=1}^{s} (m_\nu - q) k_\nu,\ \tau = \frac{1+v}{q-p} + 1,$$

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1) \cdot ... \cdot (\lambda + k - 1) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)},\ (\lambda, 0) = 1,$$

(см. [4], $111-112$). Ветвь $z_0(x)$ определяется условием $z(0) = 1$; её называют главным решением уравнения (1).

В настоящей статье предлагается интегральная формула для главного решения уравнения (1) при $p = 0$, т. е. уравнения

$$z^q = 1 + x_1 z^{m_1} + ... + x_s z^{m_s}. \tag{3}$$

Для формулировки теоремы договоримся под символом $\int\limits_0^{1+}$ понимать интеграл, взятый вдоль петли, которая начинается в точке $t = 0$, обходит $t = 1$ в положительном направлении и возвращается в исходную точку. Итак, основным результатом данной статьи является следующая

Теорема. *Главное решение $z_0(x)$ уравнения (3) допускает представление в виде интеграла*

$$z_0(x) = 1 - \frac{1}{2\pi q i} \int\limits_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \ln\Big(1 - \sum_{k=1}^{s} t^{\frac{m_k}{q}} (t-1)^{\frac{q-m_k}{q}} x_k\Big)\, dt, \tag{4}$$

в котором ветвь логарифма вблизи $x = 0$ выбирают условием $\ln 1 = 0$. Интеграл (4) сходится в области пространства $\mathbb{C}^s$ переменного $x = (x_1, \ldots, x_s)$, полученной удалением из $\mathbb{C}^s$ двух семейств комплексных гиперплоскостей:

$$\textstyle\sum_- = \bigcup\limits_{t \in (0;1)} \{\sum\limits_{k=1}^{s} x_k t^{\frac{m_k}{q}} (1-t)^{\frac{q-m_k}{q}} e^{\frac{m_k}{q}\pi i} = -1\},$$

$$\textstyle\sum_+ = \bigcup\limits_{t \in (0;1)} \{\sum\limits_{k=1}^{s} x_k t^{\frac{m_k}{q}} (1-t)^{\frac{q-m_k}{q}} e^{-\frac{m_k}{q}\pi i} = -1\}.$$

[1]Автор поддержан грантом ведущих научных школ РФ № НШ-1212.2003.1.

Замечание. *В случае, когда q – степень уравнения (3) (т.е. $q > m_1 > \ldots > m_s$), в (4) все показатели $\frac{q-m_k}{q}$ степени $(1-t)$ положительные. Это позволяет заменить интеграл $\int\limits_0^{+1}$ по петле на два интеграла $\int\limits_0^1$ и $\int\limits_1^0$, и мы получим формулу (см. [5])*

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi q i}\int\limits_0^1 t^{\frac{1-q}{q}}(1-t)^{-\frac{1+q}{q}}\left[e^{\frac{\pi i}{q}}\ln\left(1-\sum_{k=1}^s e^{\frac{m_k-q}{q}\pi i}\, t^{\frac{m_k}{q}}(1-t)^{\frac{q-m_k}{q}}x_k\right)-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{\pi i}{q}}\ln\left(1-\sum_{k=1}^s e^{\frac{q-m_k}{q}\pi i}\, t^{\frac{m_k}{q}}(1-t)^{\frac{q-m_k}{q}}x_k\right)\right]dt.$$

Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы запишем главное решение уравнения (3) в виде ряда Биркелана (2):

$$z_0(x) = \frac{1}{q}\sum_{|k|\geq 0}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s (m_\nu - q)k_\nu}{q} + \sum\limits_{\nu=1}^s k_\nu\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s (m_\nu - q)k_\nu}{q}+1\right)k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!}x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_s^{k_s} =$$

$$= 1 + \frac{1}{q}\sum_{|k|\geq 1}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s m_\nu k_\nu}{q}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s (m_\nu - q)k_\nu}{q}+1\right)k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!}x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_s^{k_s}.$$

Далее моном $x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_s^{k_s}$ будем обозначать x^k.

Пользуясь формулой дополнения $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z)\sin\pi z}{\pi}$, перепишем последний ряд в виде

$$z_0(x) = 1 - \frac{1}{\pi q}\sum_{|k|\geq 1}\Gamma\left(\frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s m_\nu k_\nu}{q}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s (m_\nu - q)k_\nu}{q}\right)\times$$

$$\times\frac{\sin\pi\left(\dfrac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s (m_\nu - q)k_\nu}{q}\right)}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!}x^k.$$

Теперь, применяя формулу

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x,y)\Gamma(x+y),$$

связывающую функции гамма и бета, получим

$$z_0(x) = 1 - \frac{1}{\pi q}\sum_{|k|\geq 1}B\left(\frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s m_\nu k_\nu}{q}, -\frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^s (m_\nu - q)k_\nu}{q}\right)\Gamma\left(\sum_{\nu=1}^s k_\nu\right)\times$$

$$\times \frac{\sin \pi \left(\dfrac{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{s} (m_\nu - q) k_\nu}{q} \right)}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!} x^k. \tag{5}$$

Сейчас воспользуемся интегральным представлением бета-функции для случая, когда один из её аргументов отрицателен. Здесь, согласно [6], бета-функция допускает представление в виде контурного интеграла

$$B(x,y)\sin(\pi y) = \frac{1}{2i} \int\limits_0^{1+} t^{x-1}(t-1)^{y-1} dt, \quad Re\, x > 0. \tag{6}$$

Поясним, как получается эта формула:

$$\int\limits_0^{1+} t^{x-1}(t-1)^{y-1}dt = \int\limits_0^{1} t^{x-1} e^{(y-1)(\ln(1-t)-i\pi)} dt + \int\limits_{C_r} t^{x-1}(t-1)^{y-1}\, dt + \int\limits_1^{0} t^{x-1} e^{(y-1)(\ln(1-t)+i\pi)} dt,$$

где C_r – окружность радиуса $r < 1$ с центром в $t = 1$. Если $Re\, y > 0$, то $\int\limits_{C_r} t^{x-1}(t-1)^{y-1}\, dt \to 0$ при $r \to 0$. Действительно,

$$\Big| \int\limits_{C_r} t^{x-1}(t-1)^{y-1}\, dt \Big| \le A \Big| (re^{\varphi i})^{y-1} \Big| 2\pi r = A\, 2\pi |r^y| \to 0$$

при $r \to 0$, где A – некоторая постоянная (при фиксированном x). Таким образом,

$$\int\limits_0^{1+} t^{x-1}(t-1)^{y-1}dt = -\int\limits_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1} e^{-i\pi y} dt + \int\limits_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1} e^{i\pi y} dt =$$

$$= (e^{i\pi y} - e^{-i\pi y}) B(x,y) = 2i\, B(x,y) \sin \pi y\, .$$

Равенство (6) получено в предположении, что $Re\, x > 0$, $Re\, y > 0$. Но в силу того, что выражения, стоящие в обеих частях (6), являются аналитическими функциями от x, y при всех y и $Re\, x > 0$, оно справедливо для всех y.

После применения равенства (6) к (5) получим

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi q i} \sum_{|k| \ge 1} \frac{\Gamma\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} k_\nu \right) x^k}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!} \int\limits_0^{1+} t^{\frac{1 + \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu k_\nu}{q} - 1} (t-1)^{-\frac{1 + \sum_{\nu=1}^{s} (m_\nu - q) k_\nu}{q} - 1} dt.$$

Сменим в последнем равенстве порядок интегрирования и суммирования, в результате чего $z_0(x)$ примет вид

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi q i} \int\limits_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \sum_{|k| \ge 1} \frac{\Gamma\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} k_\nu \right) t^{\frac{\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu k_\nu}{q}} (t-1)^{-\frac{\sum_{\nu=1}^{s} (m_\nu - q) k_\nu}{q}}}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!} x^k dt.$$

В последнем выражении изменён порядок суммирования и интегрирования в силу следующего соображения. Элементы последнего ряда мажорируются величинами

$$\frac{|k|!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!} \left[x_1 t^{\frac{m_1}{q}} (t-1)^{\frac{q-m_1}{q}} \right]^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left[x_s t^{\frac{m_s}{q}} (t-1)^{\frac{q-m_s}{q}} \right]^{k_s},$$

которые составляют ряд геометрической прогрессии для функции

$$\frac{1}{1 - \sum\limits_{i=1}^{s} \left(x_i t^{\frac{m_i}{q}} (t-1)^{\frac{q-m_i}{q}} \right)},$$

абсолютно сходящийся к этой функции при малых $|x_i|$.

Теперь воспользуемся равенством $\Gamma(n) = (n-1)!$. Тогда получим

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi q i} \int\limits_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \times$$

$$\times \sum_{|k|\geq 1} \frac{(k_1+\ldots+k_s-1)!\, t^{\frac{m_1}{q}k_1}\cdot\ldots\cdot t^{\frac{m_s}{q}k_s}\,(t-1)^{\frac{q-m_1}{q}k_1}\cdot\ldots\cdot(t-1)^{\frac{q-m_s}{q}k_s}}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!}\, x^k dt\,.$$

Наконец, применяя к последнему выражению равенство

$$\sum_{|k|\geq 1} \frac{(k_1+\ldots+k_q-1)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_q!} {z_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot {z_q}^{k_q} = -\ln(1-z_1-\ldots-z_q),$$

получаем следующее выражение для главного решения уравнения (3):

$$z_0(x) = 1 - \frac{1}{2\pi q i}\int\limits_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}}(t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \ln\Big(1-\sum_{k=1}^{s} t^{\frac{m_k}{q}}(t-1)^{\frac{q-m_k}{q}} x_k\Big)\, dt. \tag{7}$$

Теперь выберем в последнем равенстве ветвь логарифма так, чтобы выполнялось условие $z_0(0)=1$. Нетрудно видеть, что выполнение последнего условия будет обеспечено выбором ветви логарифма в (7) соотношением $\ln 1 = 0$.

Далее, при движении t от 0 к 1 и от 1 к 0, логарифм в (7) примет, соответственно, вид

$$\ln\Big(1-\sum_{k=1}^{s} t^{\frac{m_k}{q}}(1-t)^{\frac{q-m_k}{q}} e^{-\frac{q-m_k}{q}\pi i} x_k\Big),\ \ln\Big(1-\sum_{k=1}^{s} t^{\frac{m_k}{q}}(1-t)^{\frac{q-m_k}{q}} e^{\frac{q-m_k}{q}\pi i} x_k\Big). \tag{8}$$

Логарифмические функции в (8) голоморфны в $\mathbb{C}^s\backslash\{\sum_-\bigcup\sum_+\}$, где $\sum_\pm$ определены в формулировке теоремы. Таким образом, теорема доказана.

Список литературы

[1] Passare M. *Algebraic equations and hypergeometric series* / M.Passare, A.Tsikh // In the book "The legacy of Niels Henrik Abel". Springer. 2004. P. 653–672.

[2] Birkeland R. *Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques* / R.Birkeland // Ark. Norske Vid.-Akad. Oslo, 1927, №8, P. 1-23.

[3] Birkeland R. *Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen* / R.Birkeland // Math. Ztschr., 1927, №26, P. 566-578.

[4] Чеботарёв Н.Г. *Теория Галуа* / Н.Г.Чеботарёв. – М.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.

[5] Михалкин Е.Н. *О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций* / Е.Н.Михалкин // Сибирский математический журнал (в печати).

[6] Бейтмен Г. *Высшие трансцендентные функции* / Г.Бейтмен, А.Эрдейи. – М.: Наука, 1973.

ON THE SOLUTION ALGEBRAIC EQUATIONS BY MEANS OF CONTOUR INTEGRALS

E.N.Mikhalkin

In the present article integral formula for the solution of algebraic equation is represented, using as integrand only the elementary function with loop integrate.