УДК 517.55

# К ТЕОРЕМЕ БОГОЛЮБОВА О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ С ОСТРИЯ В КЛИН[1]

**И. А. Антипова, Е. В. Исаева***

*В работе представлена версия классической теоремы Боголюбова "острие клина", а также обобщение этой теоремы для случая* $n = 2$.

Вопросам продолжения функций в клин посвящено большое количество работ. Случай, когда острием клина является гиперповерхность, начиная с классической теоремы Г. Леви, был детально изучен Бауэнди, Тревом и Трепро. Продолжения с многообразия в полномерный клин рассмотрены в работах Айрапетяна и Хенкина, Боджиса, Полкинга и Питса, Бауэнди и Ротшильд, Трепро, Туманова. Результаты перечисленных авторов были обобщены в работе Туманова [1], где доказано, что гладкое порождающее многообразие *M* продолжаемо в клин ранга *r* ($1 \le r \le codimM$) в точке *p*, если избыточная размерность $M$ $exdim_p M = r$. Такое продолжение обусловлено внутренними свойствами многообразия *M*.

Кроме того, продолжение в клин может возникнуть из-за того, что по некоторым направлениям оно уже задано, как, например, в классической теореме Боголюбова "острие клина" ("edge of the wedge"). Эта теорема утверждает, в частности, что функция $f(z)$, голоморфная в трубчатом конусе $T = \mathbb{R}^n + i\Gamma$ ($\Gamma$ - световой конус $y_1^2 > |\tilde{y}|^2$) и непрерывная в его замыкании $\overline{T}$, голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n$. Если требовать голоморфность $f(z)$ лишь в конечной части $T \cap \{|z| < r\}$, то она будет продолжаться в полную шаровую окрестность $\{|z| < r/8\}$. Это утверждение было также распространено на случай обобщенных функций (см., например, [2, гл.5]). Некоторые обобщения теоремы Боголюбова рассматривались Айрапетяном и Хенкиным, Гончаром, Чиркой, но наиболее общая ситуация такого типа была описана Тумановым: в качестве острия клина выступало гладкое порождающее многообразие *M* коразмерности *m*, являющееся общим краем *r* многообразий $M_j$ ($1 \le r \le m$). Согласно теореме Туманова все непрерывные $CR$-функции на $\bigcup_{j=1}^{r} \overline{M_j}$ допускают $CR$-продолжение в клин $W_r$ с острием *M* и ребрами $M_r$ (см. [1]).

В данной работе представлена другая версия классической теоремы Боголюбова "острие клина" (теорема 1) и обобщение этой теоремы для случая $n = 2$ (теорема 2).

---

[1] И.А. Антипова использовала поддержку гранта ККФН, код проекта 15G069
* © И.А. Антипова, Красноярский государственный технический университет, antipova@akadem.ru; Е.В. Исаева, Красноярский государственный университет, aitria@rol.ru , 2005.

Обозначим через $U$ единичный круг $\{|t|<1\}$ комплексной плоскости C и через $CU$ - его внешность. Рассмотрим множество $\Omega = \overline{U^n} \cup (\mathbb{C}U)^n$ (диаграмма Рейнхарта на рис.1). Основной результат работы составляет следующая

**Теорема 1.** Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus \Omega) \cap C(\overline{\mathbb{C}^n \setminus \Omega})$. Тогда $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.

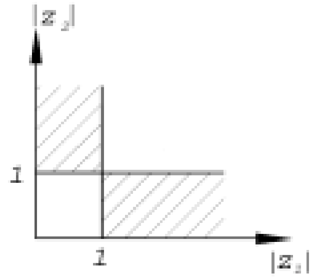


*Рис. 1*

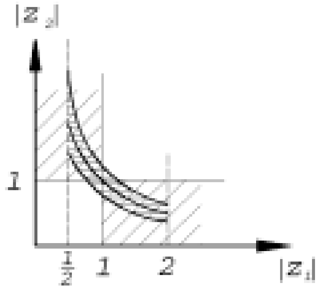


*Рис. 2*

**Доказательство.** Рассмотрим следующий полиэдр Вейля (рис. 2):

$$W_\varepsilon = \left\{ (z_1,\dots,z_n) : 1-\varepsilon < |z_1 \cdot \ldots \cdot z_n| < \frac{1}{1-\varepsilon},\ \frac{1}{2} < |z_1| < 2, \dots,\ \frac{1}{2} < |z_{n-1}| < 2 \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

При малых $\varepsilon$ остов полиэдра $\partial_0 W_\varepsilon$ состоит из $2^n$ связных компонент

$$|z_1 \cdot \ldots \cdot z_n| = (1-\varepsilon)^{\pm 1}, |z_1| = 2^{\pm 1}, \dots, |z_{n-1}| = 2^{\pm 1},$$

принадлежащих $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$.

Для полиэдра $W_\varepsilon$ и функции $f$ напишем интеграл типа Вейля:

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial_0 W_\varepsilon} \frac{f(\zeta) H(\zeta,z) d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_1 \cdots \zeta_n - z_1 \cdots z_n)}, \quad z \in W_\varepsilon, \tag{1}$$

где $H(\zeta,z)$ - гефериан системы полиномов $P_1 = \zeta_1, \dots, P_{n-1} = \zeta_{n-1}, P_n = \zeta_1 \cdots \zeta_n$. Простой счет показывает, что коэффициенты Гефера можно выбрать так, что $H(\zeta,z) = \zeta_1 \cdots \zeta_{n-1}$. Поскольку подынтегральное выражение непрерывно по совокупности переменных $(\zeta,z) \in \partial_0 W_\varepsilon \times W_\varepsilon$ и голоморфно зависит от параметра $z$, то $F(z)$ голоморфна в $W_\varepsilon$.

Докажем, что $F(z) = f(z)$ на $W_\varepsilon \cap (\mathbb{C}^n \setminus \Omega)$. Вначале покажем, что $F(z) = f(z)$ на любом гиперболоиде $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = e^{i\theta}$, проходящем через остов поликруга $\{|z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1\}$.

В интеграле (1) произведем интегрирование по $\zeta_n$ с применением одномерной формулы Коши. Получим:

$$F(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_\gamma \frac{f\left(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}, z_1 \cdots z_n / (\zeta_1 \cdots \zeta_{n-1})\right)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_{n-1} - z_{n-1})} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_{n-1}, \tag{2}$$

где

$$\gamma = \left\{ (|\zeta_1| = 2) - (|\zeta_1| = \frac{1}{2}) \right\} \times \cdots \times \left\{ (|\zeta_{n-1}| = 2) - (|\zeta_{n-1}| = \frac{1}{2}) \right\}$$

(множитель $(-1)^{n-1}$ появляется в связи с тем, что дифференциал $d\zeta_n$ стоял на последнем месте, а при интегрировании внутри интеграла (1) он переходит на первое место).

Если $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = e^{i\theta}$, то (2) представляет интеграл типа Коши в произведении колец

$$R = \left\{ \frac{1}{2} < |\zeta_1| < 2 \right\} \times \cdots \times \left\{ \frac{1}{2} < |\zeta_{n-1}| < 2 \right\}$$

для $f\left(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}, e^{i\theta} / (\zeta_1 \cdots \zeta_{n-1})\right)$ - сужения нашей функции на комплексный гиперболоид $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = e^{i\theta}$.

Для $n>2$ произведение $\{|\zeta_1|=1\}\times\cdots\times\{|\zeta_{n-1}|=1\}$ компактно принадлежит *R*, и, в силу теоремы о стирании компактных особенностей, функция *f* будет голоморфна во всем произведении колец *R*. Следовательно, интеграл (2) является интегралом Коши, представляющим функцию $f\left(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1},e^{i\theta}/(\zeta_1\cdots\zeta_{n-1})\right)$ во всем *R*.

Для $n=2$ эта функция будет голоморфна в кольцах $\left\{\frac{1}{2}<|\zeta_1|<1\right\}$ и $\{1<|\zeta_1|<2\}$ и непрерывна на окружности $\{|\zeta_1|=1\}$. Значит, интеграл (2) можно представить как сумму двух интегралов по кольцам $\left\{\frac{1}{2}<|\zeta_1|<1\right\}$ и $\{1<|\zeta_1|<2\}$, где интеграл (2) является интегралом Коши, представляющим функцию *f*. В силу непрерывности функции на окружности $\{|\zeta_1|=1\}$ и того, что интегрирование по окружности идет с разной ориентацией, получаем, что функция *f* голоморфна в кольце $\left\{\frac{1}{2}<|\zeta_1|<2\right\}$, и, следовательно, представляется там интегралом Коши вида (2).

Таким образом, интеграл (1) совпадает с функцией *f* на гиперболоиде $z_1\cdot\ldots\cdot z_n=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$, т.е. на множестве $\{|z_1\cdot\ldots\cdot z_{n-1}|=1\}$, которое представляет собой вещественную гиперповерхность в $W_\varepsilon$. Такое множество является множеством единственности, и мы заключаем совпадение $F(z)=f(z)$ всюду в $W_\varepsilon\cap(\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$.

Продолжив функцию $f(z)$ в окрестность множества $\{|z_1|=\ldots=|z_n|=1\}$ с помощью интеграла (1), применим теорему о стирании компактных особенностей, и получим голоморфное продолжение функции *f* в поликруг $U^n$. Эта новая область, где функция *f* будет голоморфной, является полной областью Рейнхарта, логарифмически выпуклая оболочка которой совпадает с $\mathbb{C}^n$, следовательно, мы получаем естественное голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$, т. е. $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Теорема доказана.

**Замечание 1.** В случае $n=2$ утверждение теоремы остается в силе, если клин $\mathbb{C}^n\setminus\Omega$ заменить на любой другой клин *K*, содержащий внутри себя гиперболу $|zw|=1$ (рис. 3).

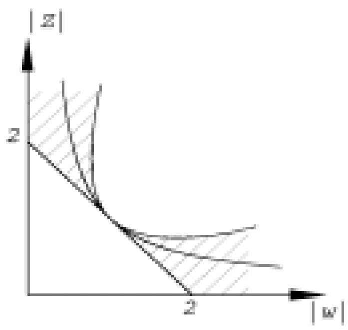


***Рис. 3***

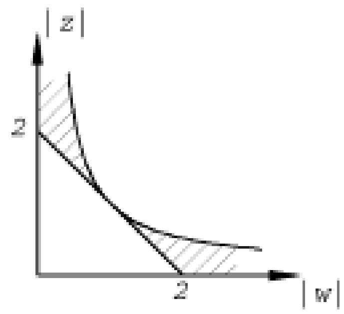


***Рис. 4***

Следующий пример показывает, что без этого условия на клин *K* утверждение теоремы неверно.

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$f(z,w)=(1-zw)\ln(1-zw),$$

голоморфную в клине (рис. 4):

$$K=\{|zw|<1,\quad |z|+|w|>2\}.$$

Эта функция определена и непрерывна всюду, кроме комплексной гиперболы $zw=1$, и, в соответствии с правилом Лопиталя, непрерывно продолжается нулем на эту гиперболу.

Предположим, что существует голоморфное продолжение $F(z,w)$ в $\mathbb{C}^2$ (или хотя бы в некоторую окрестность острия $\{|z|=|w|=1\}$).

Будучи равной нулю на комплексной кривой $zw=1$, функция должна делиться на $1-zw$ (см. [3, с. 163]):

$$F=(1-zw)h,$$

где $h\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ (или *h* - голоморфна в некоторой окрестности клина *K*).

Тогда как в клине *K* имеем

$$h(z,w)=\frac{F(z,w)}{1-zw}=\frac{f(z,w)}{1-zw}=\ln(1-zw)\underset{(z,w)\to(1,1)}{\to}-\infty\,.$$

Получаем противоречие с голоморфностью $h$ в окрестности острия $\{|z|=|w|=1\}$.

**Замечание 2.** Произведя голоморфную замену переменных

$$w_j = iLnz_j = i(\ln|z_j| - iArgz_j) = Argz_j + i\ln|z_j|,$$

область Рейнхарта (заданную соотношениями лишь на модули $z_j$) переведем в трубчатую область (заданную соотношениями на мнимые части).

Следуя замечанию 1, получим существенное обобщение Теоремы Боголюбова об острие клина при $n=2$.

**Теорема 2.** Пусть $\{g_k(y)=0\}, k=1,2$ - две гладкие кривые в $\mathbb{R}^2$ с изолированным пересечением в точке $y=0$. Если замыкание множества

$$\Gamma=\{y: g_1(y)g_2(y)>0\}$$

содержит хотя бы одну прямую, то всякая функция $f\in\mathcal{O}(T)\cap C(\overline{T})$, где $T$ - трубчатая область над $\Gamma$, голоморфно продолжается в некоторую окрестность точки $z=0$ (рис. 5):

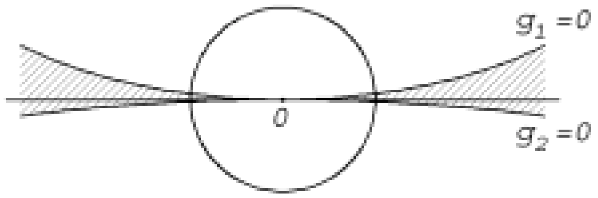


***Рис. 5***

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Туманов А.Е. Продолжение CR-функций в клин / А.Е. Туманов // Математич. сборн. - 1990 . – Т.181. - №7
2. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных / В.С. Владимиров. - М.:Наука, 1964.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных / Б.В. Шабат. - М.:Наука, 1985.

**TOWARDS THE BOGOLUBOV'S THEOREM "EDGE OF THE WEDGE"**

**I. A. Antipova, E. V. Isaeva**

*In the paper we present one version of the classical Bogolubov's theorem "edge of the wedge".*