УДК 517.55

О ФОРМУЛЕ ПУАНКАРЕ-БЕРТРАНА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА БОХНЕРА-МАРТИНЕЛЛИ НА КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ[1]

Ю.А.Богучаров, А.М.Кытманов*

Доказывается формула перестановки особого интеграла Бохнера-Мартинелли на кусочно-гладких поверхностях.

1 Постановка задачи

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с границей класса $\mathcal{C}^1$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

называемую ядром Бохнера-Мартинелли. Здесь $d\zeta = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ удалением дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

Интеграл Бохнера-Мартинелли

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D, \tag{1}$$

играет важную роль в многомерном комплексном анализе (см., например, [1]). Он обладает многими свойствами интеграла Коши на комплексной плоскости, только голоморфность интеграла Коши заменяется на гармоничность интеграла Бохнера-Мартинелли.

В случае, когда точка $z \in \partial D$, интеграл (1) становится особым и, вообще говоря, расходящимся. В этом случае рассматривают главное значение по Коши для данного интеграла, т.е.

$$\text{v.p.} \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \in \partial D,$$

где $B(z, \varepsilon)$ — открытый шар с центром в точке z и радиуса $\varepsilon > 0$. Как известно, для функций f, удовлетворяющих на границе ∂D условию Гельдера, главное значение определено и является также функцией, удовлетворяющей условию Гельдера на ∂D (см., например, [1, гл. 1]). В дальнейшем, если точка $z \in \partial D$, то всегда будем рассматривать интеграл Бохнера-Мартинелли в смысле главного значения по Коши и знак v.p. будем опускать.

Для данного интеграла известна формула перестановки Пуанкаре-Бертрана [1, гл. 5]:

$$\int_{\partial D_w} U(w, z) \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta, w) U(\zeta, w) = \frac{1}{4} f(z, z) + \int_{\partial D_\zeta} \int_{\partial D_w} f(\zeta, w) U(w, z) U(\zeta, w), \ z \in \partial D,$$

аналогичная формуле Пуанкаре-Бертрана для интеграла Коши, где функция $f(\zeta, w)$ на $\partial D \times \partial D$ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным.

В статье рассматривается формула перестановки Пуанкаре-Бертрана в случае, когда поверхность ∂D является кусочно-гладкой. Это означает, область D является гладким полиэдром, т.е.

$$D = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \rho_j(\zeta) < 0, j = 1, \ldots, k\},$$

где вещественнозначные гладкие функции ρ_j таковы, что

$$d\rho_{j_1} \wedge \ldots \wedge \rho_{j_s} \neq 0$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ККФН, грант 12F0063C, и ФЦП "Интеграция".

на множестве $\{\rho_{j_1}(\zeta) = \ldots = \rho_{j_s}(\zeta)\}$ для любых наборов $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_s \leqslant n$ и любых $s = 1, \ldots, k$.

Пусть в точке $z \in \partial D$ телесный угол касательного конуса к D равен α. Покажем, что в этом случае формула перестановки примет следующий вид:

$$\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta,w) U(\zeta,w) =$$

$$= (\alpha - \alpha^2 + C) f(z,z) + \int\limits_{\partial D_\zeta} \int\limits_{\partial D_w} f(\zeta,w) U(w,z) U(\zeta,w), \quad z \in \partial D,$$

где C — некоторая константа, связанная с касательным конусом в точке z.

2 Вспомогательные леммы

Лемма 1 *Пусть* $f \in \mathcal{C}^1(B(z,r))$.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{S(z,\varepsilon) \cap \Pi_z} f(\zeta) U(\zeta,z) = \frac{f(z)(n-1)!}{2\pi^n} \operatorname{mes}(S(z,1) \cap \Pi_z),$$

где Π_z *— открытый (или замкнутый) конус с вершиной в точке* z*;* $S(z,\varepsilon)$ *— сфера с центром в* z *радиуса* ε*.*

Заметим, что $\operatorname{mes}(S(z,1) \cap \Pi_z)$ есть телесный угол конуса Π_z.

Доказательство. Пусть $z = 0$, $\zeta = t\varepsilon$, тогда $t \in S(0,1)$.

Рассмотрим одно из слагаемых:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S(0,1) \cap \Pi_0} f(t\varepsilon) \frac{\bar{t}_k \varepsilon}{|t\varepsilon|^{2n}} \varepsilon^{2n-1} d\bar{t}[k] \wedge dt = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S(0,1) \cap \Pi_0} f(t\varepsilon) \frac{\bar{t}_k}{|t|^{2n}} d\bar{t}[k] \wedge dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S(0,1) \cap \Pi_0} f(t\varepsilon) \bar{t}_k d\bar{t}[k] \wedge dt.$$

Тогда вся сумма примет вид:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S(0,1) \cap \Pi_0} f(t\varepsilon) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \bar{t}_k d\bar{t}[k] \wedge dt.$$

Перейдем к пределу под знаком интеграла, получим выражение

$$f(0) \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S(0,1) \cap \Pi_0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \bar{t}_k d\bar{t}[k] \wedge dt.$$

Сузим выражение, стоящее под интегралом, на сферу по лемме 3.5 из [1]:

$$f(0) \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{S(0,1) \cap \Pi_0} d\sigma = f(0) \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \operatorname{mes}(S(0,1) \cap \Pi_0),$$

здесь $d\sigma$ — поверхностная мера Лебега на $S(0,1)$.

Остается вместо $z = 0$ взять произвольное. □

Лемма 2 *Справедлива формула*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{D_w \cap S(z,\varepsilon)} U(w,z) U(\zeta,w) = \alpha U(\zeta,z), \quad \zeta, z \in \partial D, \quad \zeta \neq z,$$

где $\alpha = \alpha(z)$ *— телесный угол касательного конуса к* D *в точке* z*.*

Доказательство. Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{D\cap S(z,\varepsilon)} U(w,z)U(\zeta,w)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-2n}\int\limits_{D_w\cap S(z,\varepsilon)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\overline{w}_k-\overline{z}_k)d\overline{w}[k]\wedge dwU(\zeta,w).$$

Положим $z=0, w=\varepsilon t$ и используем лемму 1, тогда

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-2n}\int\limits_{D_{\varepsilon t}\cap S(0,1)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\varepsilon\bar{t}_k\varepsilon^{2n-1}d\bar{t}[k]\wedge dtU(\zeta,\varepsilon t)=$$

$$=U(\zeta,0)\frac{(n-1)!}{2\pi^n}\int\limits_{\Pi_0\cap S(0,1)}\sum_{k=1}^{n}t_k\bar{t}_k d\sigma=U(\zeta,0)\frac{(n-1)!}{2\pi^n}\int\limits_{\Pi_0\cap S(0,1)}d\sigma=\alpha U(\zeta,0),$$

где $\Pi_z=\Pi_0$ — касательный конус к D в точке z. □

Рассмотрим дифференциальные формы:

$$U_{p,q}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q-1)}\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}{\sum_{I,J}}'\sum_{k\notin I}\sigma(I,k)\sigma(J)\frac{(\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k)}{|\zeta-z|^{2n}}d\bar{\zeta}[I,k]\wedge d\zeta[J]d\bar{z}_I\wedge dz_J,$$

где $I=(i_1,\ldots,i_q)$, $J=(j_1,\ldots,j_p)$ — мультииндексы,

$$dz_J=dz_{j_1}\wedge\ldots\wedge dz_{j_p}$$

форма $d\zeta[I]$ получается из формы $d\zeta$ вычеркиванием дифференциалов $d\zeta_{j_1},\ldots,d\zeta_{j_p}$. Знаки $\sigma(I,k)$ и $\sigma(J)$ определяются так: $\sigma(I,k)dz=dz_k\wedge dz_I\wedge dz[I,k]$, а $\sigma(J)dz=dz_J\wedge dz[J]$.

Лемма 3 *Справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial D_w}U(w,z)U(\zeta,w)=\overline{\partial}_\zeta\int\limits_{D_w}U(w,z)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)U(\zeta,z),\quad z,\zeta\in\partial D,\quad z\neq\zeta,$$

для почти всех ζ (а именно для всех ζ, являющихся точками гладкости).

Доказательство. По определению,

$$\int\limits_{\partial D_w}U(w,z)U(\zeta,w)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon))}U(w,z)U(\zeta,w).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\partial D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon))}U(w,z)U(\zeta,w)=\int\limits_{\partial(D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon)))}U(w,z)U(\zeta,w)-$$

$$-\int\limits_{D\cap S(z,\varepsilon)}U(w,z)U(\zeta,w)-\int\limits_{D\cap S(\zeta,\varepsilon)}U(w,z)U(\zeta,w).$$

По лемме 2 имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{D\cap S(z,\varepsilon)}U(w,z)U(\zeta,w)=\alpha U(\zeta,z).$$

Вычислим второй интеграл, предполагая, что ζ — точка гладкости (при вычислении используется лемма 1.13 из [1]):

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{D\cap S(\zeta,\varepsilon)} U(w,z)U(\zeta,w)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{D\cap S(\zeta,\varepsilon)} U(w,z)U(\zeta,w)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-2n}\int\limits_{D\cap S(\zeta,\varepsilon)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\overline{w}_k-\overline{z}_k}{|w-z|^{2n}}d\overline{w}[k]\wedge dw\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\overline{\zeta}_j-\overline{w}_j)d\overline{\zeta}[j]\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{(n-1)!}{2n(2\pi i)^n}\sum_{k,j=1}^{n}(-1)^{j-1}\delta_{jk}\frac{\overline{\zeta}_k-\overline{z}_k}{|\zeta-z|^{2n}}d\overline{\zeta}[j]\wedge d\zeta=\frac{1}{2n}U(\zeta,z).$$

Данная часть доказательства повторяет доказательство леммы 22.7 из [1].

Используя свойства дифференциальных форм $U_{p,q}(\zeta,z)$ и лемму 1.15 из [1], имеем:

$$\int\limits_{\partial(D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon)))} U(w,z)U(\zeta,w)=-\int\limits_{D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon))} U(w,z)\wedge\overline{\partial}_w U(\zeta,w)=$$

$$=\int\limits_{D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon))} U(w,z)\wedge\overline{\partial}_\zeta U_{0,1}(\zeta,w)=-\int\limits_{D\setminus(B(z,\varepsilon)\cup B(\zeta,\varepsilon))} U(w,z)\wedge\overline{\partial}_\zeta U_{n,n-2}(w,\zeta)\to$$

$$\to -\text{v.p.}\int\limits_D U(w,z)\wedge\overline{\partial}_\zeta U_{n,n-2}(w,\zeta)=-\overline{\partial}_\zeta\int\limits_D U(w,z)\wedge U_{n,n-2}(w,\zeta)-\frac{(n-1)}{2n}U(\zeta,z)=$$

$$=\overline{\partial}_\zeta\int\limits_D U(w,z)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)-\frac{(n-1)}{2n}U(\zeta,z).$$

Отсюда следует доказательство леммы 3. □

Замечание. Если ζ не является точкой гладкости, то пределы интегралов в лемме 3 также будут существовать, но при дальнейшем интегрировании по ζ не окажут влияния на итоговую формулу.

3 Основной результат

Теорема 1 *Пусть $f\in\mathcal{C}^\beta(\partial D\times\partial D)$ $(0<\beta\leqslant 1)$, D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, точка $z\in\partial D$ и α — телесный угол касательного конуса Π_z области D в точке z. Тогда справедлива следующая формула перестановки*

$$\int\limits_{\partial D_w} U(w,z)\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta,w)U(\zeta,w)=$$

$$=(\alpha-\alpha^2+C)f(z,z)+\int\limits_{\partial D_\zeta}\int\limits_{\partial D_w} f(\zeta,w)U(w,z)U(\zeta,w),\quad z\in\partial D,$$

где

$$C=\frac{2(n-1)!^2(-1)^n}{(2\pi i)^{2n}(n-1)}\sum_{j<k}\int\limits_{\partial\Pi_\zeta\cap S(0,1)} d\overline{\zeta}[j,k]\wedge d\zeta\int\limits_{r=0}^{\infty}\frac{dr}{r}\int\limits_{\partial\Pi_v\cap S(0,1)}\frac{dv[j,k]\wedge d\overline{v}}{|r\zeta-v|^{2n-2}}.$$

При $n=1$ константа $C=0$.

Доказательство. Преобразуем интеграл:

$$\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta,w)U(\zeta,w) = \int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} (f(\zeta,w)-f(w,w))U(\zeta,w)+$$
$$+\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} (f(w,w)-f(z,w))U(\zeta,w)+$$
$$+\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} (f(z,w)-f(z,z))U(\zeta,w)+f(z,z)\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} U(\zeta,w).$$

В первых трех слагаемых можно поменять порядок интегрирования по теореме 22.5 из [1], а по лемме 2.1 из [1]:

$$\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} U(\zeta,w) = \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta,w)U(\zeta,w) = \int\limits_{\partial D_\zeta}\int\limits_{\partial D_w} (f(\zeta,w)-f(z,z))U(w,z)U(\zeta,w)+\frac{\alpha}{2}f(z,z).$$

Покажем теперь, что

$$\int\limits_{\partial D_\zeta}\int\limits_{\partial D_w} U(w,z)U(\zeta,w) = \left(\alpha^2-\frac{\alpha}{2}\right)+C,$$

если $z\in\partial D$. По определению и леммам 2, 3,

$$\int\limits_{\partial D_\zeta}\int\limits_{\partial D_w} U(w,z)U(\zeta,w) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\zeta\setminus B(z,\varepsilon)}\int\limits_{\partial D_w} U(w,z)U(\zeta,w) =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\zeta\setminus B(z,\varepsilon)}\left(\overline{\partial}_\zeta\int\limits_{D_w} U(w,z)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)U(\zeta,z)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\zeta\setminus B(z,\varepsilon)}\left(\overline{\partial}_\zeta\int\limits_{D_w} U(w,z)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)\right)+\left(\alpha^2-\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\zeta\cap S(z,\varepsilon)}\int\limits_{D_w} U(w,z)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)+\left(\alpha^2-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Поскольку ядра $U_{p,q}$ инвариантны относительно сдвигов и унитарных преобразований, можно считать, что $z=0$, и, сделав замену $\zeta\to\dfrac{\zeta}{\varepsilon}$, $w\to\dfrac{w}{\varepsilon}$, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\zeta\cap S(z,\varepsilon)}\int\limits_{D_w} U(w,z)\wedge U_{0,1}(\zeta,w) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\frac{1}{\varepsilon}\partial D_\zeta\cap S(0,1)}\int\limits_{\frac{1}{\varepsilon}D_w} U(w,0)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)=$$
$$=\int\limits_{(\partial\Pi_0\cap S(0,1))_\zeta}\int\limits_{(\Pi_0)_w} U(w,0)\wedge U_{0,1}(\zeta,w),$$

где Π_0 — касательный конус к D в точке $z=0$; $\partial\Pi_0$ — касательный конус к ∂D в точке $z=0$, т.е. граница Π_0.

Интеграл

$$\int\limits_{(\Pi_0)_w} U(w,0)\wedge U_{0,1}(\zeta,w)=$$

$$= \frac{((n-1)!)^2}{(2\pi i)^{2n}} \sum_{j<k} (-1)^{n+k} \int\limits_{(\Pi_0)_w} \frac{\bar{w}_k(\bar{\zeta}_j - \bar{w}_j) - \bar{w}_j(\bar{\zeta}_k - \bar{w}_k)}{|w|^{2n}|\zeta - w|^{2n}} d\bar{w} \wedge dw d\bar{\zeta}[j,k] \wedge d\zeta,$$

т.е. состоит из слагаемых вида

$$\int\limits_{\Pi_0} \frac{\overline{w}_k(\overline{\zeta}_j - \overline{w}_j) - \overline{w}_j(\overline{\zeta}_k - \overline{w}_k)}{|w|^{2n}|\zeta - w|^{2n}} d\overline{w} \wedge dw.$$

Перейдем в нем к полярным координатам $w = rv$, $|v| = 1$, тогда $d\bar{w} \wedge dw = (2i)^n r^{2n-1} dr \wedge d\sigma$, где, по-прежнему, $d\sigma$ — поверхностная мера на $S(0,1)$. Отсюда

$$\int\limits_{\Pi_0} \frac{\overline{w}_k(\overline{\zeta}_j - \overline{w}_j) - \overline{w}_j(\overline{\zeta}_k - \overline{w}_k)}{|w|^{2n}|\zeta - w|^{2n}} d\overline{w} \wedge dw = (2i)^n \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi_0 \cap S(0,1)} \frac{\overline{v}_k\overline{\zeta}_j - \overline{v}_j\overline{\zeta}_k}{|v|^{2n}|\zeta - rv|^{2n}} dr \wedge d\sigma =$$

$$= (2i)^n \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{\Pi_0 \cap S(0,1)} \frac{\overline{v}_k\overline{\zeta}_j - \overline{v}_j\overline{\zeta}_k}{|\zeta - rv|^{2n}} d\sigma.$$

Заметим, что $|\zeta - rv|^2 = |r\zeta - v|^2$, поскольку $|\zeta| = |v| = 1$.

Выражение, стоящее под знаком интеграла, представимо в следующем виде:

$$\frac{1}{r} d_v \left(\frac{1}{|r\zeta - v|^{2n-2}} \right) \wedge dv[j,k] \wedge d\overline{v} = \frac{1}{r} d_v \left(\frac{1}{\sum\limits_{s=1}^{n} (r\zeta_s - v_s)(r\overline{\zeta}_s - \overline{v}_s)} \right)^{n-1} \wedge dv[j,k] \wedge d\overline{v} =$$

$$= \frac{n-1}{r} \frac{(r\overline{\zeta}_j - \overline{v}_j) dv_j + (r\overline{\zeta}_k - \overline{v}_k) dv_k}{|r\zeta - v|^{2n}} \wedge dv[j,k] \wedge d\overline{v} =$$

$$= 2^{n-1} i^n \frac{n-1}{r} \frac{(-1)^{j+n+k}(r\overline{\zeta}_j - \overline{v}_j)\overline{v}_k + (-1)^{k+n+j-1}(r\overline{\zeta}_k - \overline{v}_k)\overline{v}_j}{|r\zeta - v|^{2n}} d\sigma =$$

$$= (-1)^{j+k+n}(n-1)2^{n-1} i^n \frac{\overline{v}_k\overline{\zeta}_j - \overline{v}_j\overline{\zeta}_k}{|\zeta - rv|^{2n}} d\sigma.$$

Значит, рассматриваемый интеграл можно переписать так:

$$\int\limits_{\Pi_0} \frac{\overline{w}_k(\overline{\zeta}_j - \overline{w}_j) - \overline{w}_j(\overline{\zeta}_k - \overline{w}_k)}{|w|^{2n}|\zeta - w|^{2n}} d\overline{w} \wedge dw =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+k+j}}{n-1} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{\Pi_0 \cap S(0,1)} d_v \left(\frac{1}{|r\zeta - v|^{2n-2}} \right) \wedge dv[j,k] \wedge d\overline{v} =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+k+j}}{n-1} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{\partial\Pi_0 \cap S(0,1)} \frac{dv[j,k] \wedge d\overline{v}}{|r\zeta - v|^{2n-2}},$$

здесь $n > 1$. При $n = 1$ эти интегралы равны нулю.

Таким образом, C (в условии теоремы) имеет вид:

$$\frac{2(n-1)!^2(-1)^n}{(2\pi i)^{2n}(n-1)} \sum_{j<k} \int\limits_{\partial\Pi_\zeta \cap S(0,1)} d\bar{\zeta}[j,k] \wedge d\zeta \int\limits_{r=0}^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{\partial\Pi_v \cap S(0,1)} \frac{dv[j,k] \wedge d\overline{v}}{|r\zeta - v|^{2n-2}}. \quad \square$$

Заметим, что если z — точка гладкости, то $\alpha = 1/2$, а $C = 0$, поэтому в данном случае получится известная формула перестановки.

Список литературы

[1] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения* / А.М.Кытманов. – Новосибирск: Наука, 1992.

ON THE POINCARÉ-BERTRAND FORMULA FOR THE BOCHNER-MARTINELLI INTEGRAL OVER PIECEWISE SMOOTH SURFACES

Yu.A.Bogucharov, A.M.Kytmanov

It is proved the Poicaré-Bertrand formula for the Bochner-Martinelli integral over piecewise smooth surfaces.