

ГИДРОДИНАМИКА

УДК 532.5.013

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ¹

В.К. Андреев, А.Е. Картошкина, А.А. Родионов*

Исследуются свойства решений уравнения 3-го порядка, возникающего при моделировании термодиффузионных движений в плоских слоях со свободной границей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Оно описывается системой уравнений Навье–Стокса:

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + u_{1y} + \frac{1}{\rho} p_x = \nu(u_{1xx} + u_{1yy}); \quad (1)$$

$$u_{2t} + u_1 u_{2x} + u_2 u_{2y} + \frac{1}{\rho} p_y = \nu(u_{2xx} + u_{2yy}) - g; \quad (2)$$

$$u_{1x} + u_{2y} = 0, \quad (3)$$

где $u_1(x, y, t)$, $u_2(x, y, t)$ — компоненты вектора скорости; $p(x, y, t)$ — давление; $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости; $\nu = \text{const}$ — кинематическая вязкость; $g = \text{const}$ — ускорение силы тяжести, направленное в сторону, которая противоположна координате y .

Будем искать решение этой задачи в виде

$$u_1 = u(y, t)x, \quad u_2 = v(y, t), \quad p = p(y, t). \quad (4)$$

Можно показать [1], что это частично-инвариантное решение. Подстановка в уравнения (1)–(3) дает систему:

$$u_t + v u_y + u^2 = \nu u_{yy}; \quad (5)$$

$$u + v_y = 0; \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} p_y = \nu v_{yy} - v v_y - v_t - g. \quad (7)$$

Ясно, что уравнения (5), (6) образуют замкнутую подсистему. На самом деле, функция $u(y, t)$ легко исключается из (5) с помощью (6); в результате приходим к одному уравнению 3-го порядка для $v(y, t)$:

$$v_{yt} + v v_{yy} - v_y^2 = \nu v_{yyy}. \quad (8)$$

По известной v давление восстанавливается квадратурой из (7).

Решение вида (4) может описывать нестационарные движения: а) плоского слоя с одной или двумя свободными границами [1]; б) твердыми стенками. В случае а) $y = l(t)$ — толщина слоя, $y = 0$ — твердая стенка либо $l(t)$ — полутолщина слоя, когда обе границы $y = \pm l(t)$ — свободные. Для ситуации б) $l = l_0 = \text{const}$ есть толщина слоя и $y = 0$, l_0 — суть твердые стенки.

Замечание 1. Если изучается термодиффузионное движение в приближении Буссинеска, то в правую часть уравнения (2) войдет слагаемое $-g[1 - \beta_1(\theta - \theta_0) + \beta_2(c - c_0)]$, где β_1, β_2 — постоянные, θ — температура, а c — концентрация. Конечно, к системе (1)–(3) следует добавить уравнения для переноса θ и c . При этом они будут квадратичными функциями координаты x [2].

Перейдем к постановке начальных и граничных условий для функции $v(y, t)$. При $t = 0$

$$v(y, 0) = v_0(y). \quad (9)$$

Предположим, что имеется движение с твердыми стенками $y = 0$, $y = l_0$. Учитывая представление решения (4), уравнение неразрывности (6), получим граничные условия:

$$\begin{aligned} v(0, t) = 0, \quad v_y(0, t) = 0; \\ v(l_0, t) = 0, \quad v_y(l_0, t) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

¹ Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00934.

* © В.К.Андреев, А.Е.Картошкина, А.А.Родионов, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2005.

т.е. переопределенную задачу (8)–(10) для функции $v(y, t)$. Поэтому далее рассматривается только задача со свободной границей $y = l(t)$; при этом вторая группа условий (10) не учитывается.

На свободной границе должны быть выполнены два условия:
кинематическое

$$\frac{dl}{dt} = v(l(t), t), \quad l(0) = l_0 > 0 \quad (11)$$

и динамическое

$$(p_{gas} - p)\mathbf{n} + 2\rho\nu\mathcal{D}\mathbf{n} = 0, \quad (12)$$

где p_{gas} — давление газа вне жидкости, а

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{2}u_y x \\ \frac{1}{2}u_y x & v_y \end{pmatrix}$$

— тензор скоростей деформаций для решения (4). Поскольку $\mathbf{n} = (0, 1)$, то (12) эквивалентно двум равенствам:

$$v_{yy} = 0, \quad y = l(t); \quad (13)$$

$$p_{gas} - p + 2\rho\nu v_y = 0, \quad y = l(t). \quad (14)$$

Ясно, что для начальной функции $v_0(y)$ из (9) должны быть выполнены условия согласования:

$$v_0(0) = v_{0y}(0) = v_{0yy}(0) = 0, \quad v_{0yy}(l_0) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, для функций $v(y, t)$, $l(t)$ имеем начально-краевую задачу (8), (9), первые два условия (10), (11), (13) и (15). Решение этой задачи описывает движение плоского слоя со свободной границей $y = l(t)$ и неподвижной твердой стенкой $y = 0$. Условие (14) служит для определения функции времени, которая появится при нахождении давления из (7).

Можно видеть, что нечетным по y решением описывается движение и со второй свободной границей $y = -l(t)$. Для него достаточно потребовать выполнения равенства

$$v_{yy}(0, t) = 0 \quad (16)$$

и условия согласования

$$v_{0yy}(0) = 0, \quad v_{0yy}(l_0) = 0. \quad (17)$$

Здесь необходимо решать задачу (8), (9), (13), (16), (17).

Замечание 2. Замена переменных $v = \nu\bar{v}/l_0$, $y = l_0\bar{y}$, $t = l_0^2\bar{t}/\nu$ приводит рассмотренные выше задачи к безразмерному виду, причем можно считать $\nu = 1$, $l_0 = 1$. Поэтому всюду ниже $\nu = 1$, $l_0 = 1$.

Замечание 3. Если из (5), (6) исключить функцию v , то получим интегродифференциальное уравнение на $u(y, t)$:

$$u_t + u^2 - u_y \int_0^y u(z, t) dz = u_{yy} \quad (18)$$

с начальным условием

$$u(y, 0) = u_0(y) = -v_{0y}(y). \quad (19)$$

Граничные условия и условия согласования для задачи с одной свободной границей таковы:

$$u_y(l(t), t) = 0, \quad \frac{dl}{dt} = - \int_0^{l(t)} u(z, t) dz, \quad l(0) = 1; \quad (20)$$

$$u(0, t) = 0; \quad (21)$$

$$u_0(0) = u_{0yy}(0) = 0, \quad u_{0y}(1) = 0, \quad (22)$$

а для задачи с двумя свободными границами к (20) вместо (21) и (22) добавляются условия

$$u_y(0, t) = 0; \quad (23)$$

$$u_{0y}(0) = u_{0y}(1) = 0. \quad (24)$$

Если $f_0 \in C^{2+\alpha}[0, 1]$, $0 < \alpha < 1$, то, согласно [3], задача (18)–(22), а также (18)–(20), (23), (24) однозначно разрешимы в подходящих пространствах Гёльдера при достаточно малом t . Что касается глобального поведения решения по времени, то оно для этих задач существенно различается [4]. Именно, для задачи с двумя свободными границами решение существует $\forall t \geq 0$, если $u_0(y) \geq 0$. Если же $u_0(y) \geq \delta > 0$, $y \in [0, 1]$, то

$$u(y, t) = t^{-1}[1 + O(t^{-1})], \quad t \rightarrow \infty, \quad (25)$$

равномерно при $y \in [0, l(t)]$; $l(t) = kt^{-1}[1 + O(t^{-1})]$ с постоянной $k = k(u_0) > 0$.

Если $\bar{u}_0 = \int_0^1 u_0(y) dy < 0$, то время существования решения $t_* \leq -1/\bar{u}_0$ и (при некоторых дополнительных условиях на $u_0(y)$)

$$u(y, t) \sim -\cos^2 \left[y \sqrt{\gamma(t_* - t)} \right] (t_* - t)^{-1} \quad (26)$$

при $t \rightarrow t_*$ для $0 \leq y \leq l(t)$, где $\gamma = \gamma(u_0) > 0$ – постоянная. Поведение свободной границы таково: $l(t) \sim \pi/[2\sqrt{\gamma(t_* - t)}]$. При наличии твердой стенки глобальное единственное решение существует [2], если дополнительно к (22) $u_0 \in C^{3+\alpha}[0, 1]$; $u_{0y} > 0$ (или $u_{0y} < 0$), $y \in [0, 1]$; $u_{0yyy}(1) = 0$.

Нас будет интересовать численное решение рассмотренных выше задач и групповые свойства уравнения (8), в котором надо положить $\nu = 1$.

2. Групповые свойства и точные решения

Вычисления показывают, что основная алгебра Ли уравнения (8) образована операторами

$$X_1 = 2t\partial_t + y\partial_y - v\partial_v, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3(f(t)) = f(t)\partial/\partial y + f'(t)\partial/\partial v. \quad (27)$$

Сравнение (27) с алгеброй Ли уравнений двумерного движения вязкой жидкости [5] показывает, что операторы $X_1, X_2, X_3(f(t))$ “индуцированы” соответствующими операторами системы Навье–Стокса.

Решение на операторе $X_3(f(t))$. Инварианты оператора таковы: $v - f'(t)f^{-1}(t)y, t$. Решение следует искать в виде $v = \Phi(t)y + V(t)$. Подстановка в (8) дает

$$v = -\frac{ky}{1 + kt} + V(t), \quad k = \text{const}, \quad (28)$$

с произвольной функцией $V(t)$. При $V(t) \equiv 0$ оно удовлетворяет (13), (16), (17), причем $l(t) = 1/(1 + kt)$, $v_0(y) = -ky$. Это хорошо известное [6], [7] движение полосы жидкости с двумя свободными границами.

Решение на операторе X_1 . Инварианты оператора: $v\sqrt{t}, y/\sqrt{t}$. Следовательно, $v = t^{-1/2}f(\xi)$, где $\xi = y/\sqrt{t}$ – автомодельное решение. Для функции $f(\xi)$ из (8) получается обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$f''' + \left(\frac{\xi}{2} - f \right) f'' + f'^2 + f' = 0.$$

К сожалению, не удается найти решение этого уравнения, удовлетворяющее всем граничным условиям.

Решение на операторе $X_3(f'(t)) - X_2$. Инварианты оператора: $v + f'(t), y + f(t)$. Следовательно, $v = -f'(t) + g(\xi), \xi = y + f(t)$. Функция $g(\xi)$ удовлетворяет уравнению $g''' + g'^2 - gg'' = 0$, оно допускает понижение порядка, однако точно не интегрируется. Укажем два простых частных решения для g : $g = a + be^{a\xi}, a, b = \text{const}; g = -6/(\xi + d), d = \text{const}$. Они порождают частные решения уравнения (8):

$$v(y, t) = -f'(t) + a + b \exp[a(y + f(t))], \quad v(y, t) = -f'(t) - \frac{6}{y + f(t) + d}.$$

Однако и эти решения не удовлетворяют граничным условиям.

Неинвариантное решение. В случае двух свободных границ начально-краевая задача (8), (10), (11), (13), (9) имеет решение вида

$$v(y, t) = -a(t)y - \frac{b(t)l(t)}{n\pi} \sin \left[\frac{n\pi y}{l(t)} \right], \quad (29)$$

где функции $a(t)$, $b(t)$, $l(t)$ есть решение задачи Коши

$$a' = -a^2 - b^2, \quad b' = -b \left[2a + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right], \quad l' = -al, \quad (30)$$

$$a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0, \quad l(0) = 1.$$

Свойства решения задачи (30) зависят от знака постоянной a_0 [4]. Если $a_0 > 0$, то решение существует при всех $t > 0$; асимптотическое поведение $v(y, t)$ подобно (25). В случае $a_0 \leq 0$, $b_0 \neq 0$ решение существует лишь конечное время $t_* < \infty$. При этом $a \rightarrow -\infty$, $l \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$, более точно $a \sim (t - t_*)^{-1/2}$, $b \sim \text{sgn } b_0 / [2(t - t_*)]$, $l \sim \pi / [2\sqrt{\gamma(t_* - t)}]$ при $t \rightarrow t_*$, $\gamma = \gamma(a_0, b_0, n) > 0$. Если $b_0 = 0$, то $a(t) = a_0(1 + a_0 t)^{-1}$, $l(t) = (1 + a_0 t)^{-1}$, т.е. (29) сводится к решению (28) с $v(t) \equiv 0$.

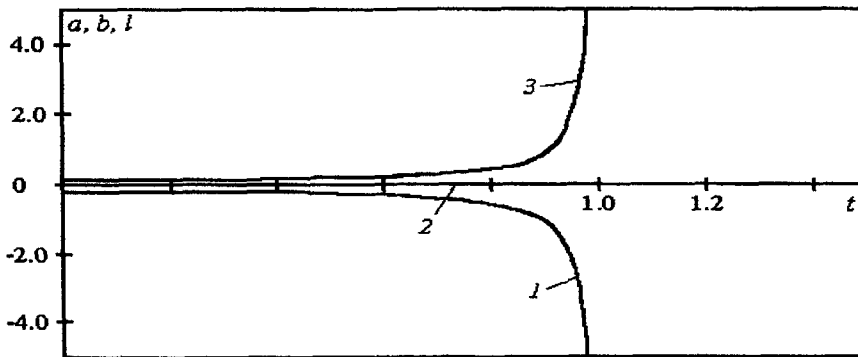


Рис. 1: 1 — кривая $a(t)$, 2 — $b(t)$, 3 — $l(t)$; начальные условия: $a_0 = -1$, $b_0 = l_0 = 1$, $n = 5$; при $t \rightarrow t_* \simeq 0,997961$ кривая $a(t) \rightarrow -\infty$, $l(t) \rightarrow +\infty$; $b(t) \approx 10^{-16} \sim 10^{-12}$ при $t \in (0, t_*)$, $b(t)$ слабо растет при $t \rightarrow t_*$

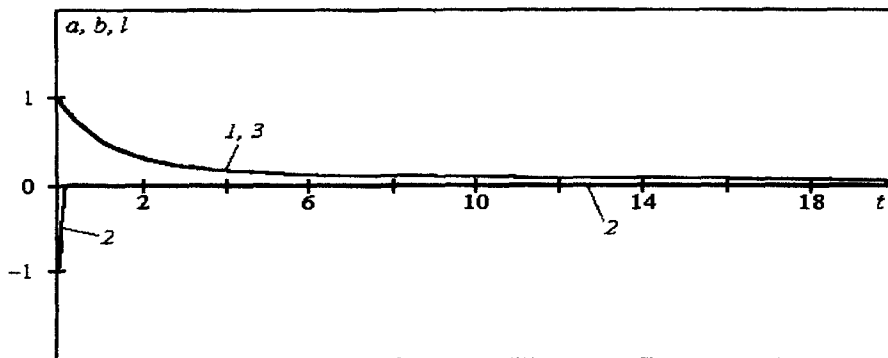


Рис. 2: 1 — кривая $a(t)$, 2 — $b(t)$, 3 — $l(t)$; начальные условия: $a_0 = l_0 = 1$, $b_0 = -1$, $n = 5$; при $t \rightarrow +\infty$ кривые 1, 2, 3 стремятся к оси t (кривая 2 — очень быстро)

Численное решение задачи Коши (30) хорошо подтверждает ее описанное качественное поведение. На рис. 1 приведено поведение $a(t)$ — кривая 1, $b(t)$ — кривая 2 и $l(t)$ — кривая 3 для $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, $n = 5$. Кривая 2 очень быстро приближается к оси t ; то же самое происходит и с кривыми 1, 3. Постоянная k в равенстве $l = kt^{-1}[1 + O(t^{-1})]$ убывает с ростом n : при $n = 1$ она равна 1.042, а при $n = 5$ — 1.001. Рис. 2 дает представление о поведении тех же функций при $a_0 = -1$, $b_0 = 1$,

$n = 5$; вычисления показывают, что здесь $t_* \sim 0.997961$. С ростом n происходит незначительное увеличение t_* : для $n = 1$ $t_* \sim 0.898949$, для $n = 3$ $t_* \sim 0.994272$.

3. Численное решение

В этом пункте приводится численное решение задачи (18)–(22) и (18)–(20), (23), (24). Решение ищется методом Галёркина, причем для задачи с двумя свободными границами достаточно ограничиться только четными полиномами Лежандра, см. [2]:

$$u^n(y, t) = \sum_{m=0}^n u^m(t) P_{2m}(y).$$

Для задачи с одной твердой стенкой

$$u^n(y, t) = \sum_{m=0}^n u^m(t) P_m(y).$$

В результате возникают задачи Коши для коэффициентов $u^m(t)$ (подробности изложены в [2]).

Задача со свободными границами. В качестве начальной $u_0(y)$ была взята функция

$$u_0(y) = a \left(-\frac{105}{80} y^4 + \frac{21}{8} y^2 - \frac{103}{80} \right), \quad (31)$$

где a — произвольная константа, удовлетворяющая условиям (24); в расчетах всюду $n = 3$.

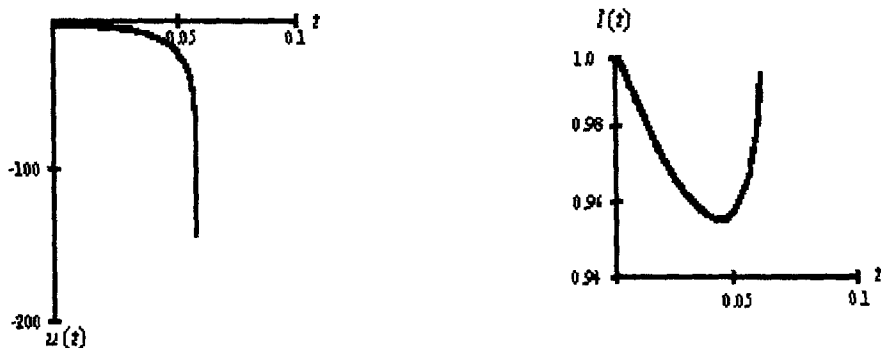


Рис. 3: Поведение функций $u(1, t)$, $l(t)$ при $u_0(y) < 0$ (для задачи с двумя свободными границами)

На рис. 3 представлены графики функций $u(1, t)$ и $l(t)$ при $a = -5$. Здесь $u(1, t)$ убывает и за конечное время уходит на $-\infty$, $l(t)$ возрастает и стремится к $+\infty$.

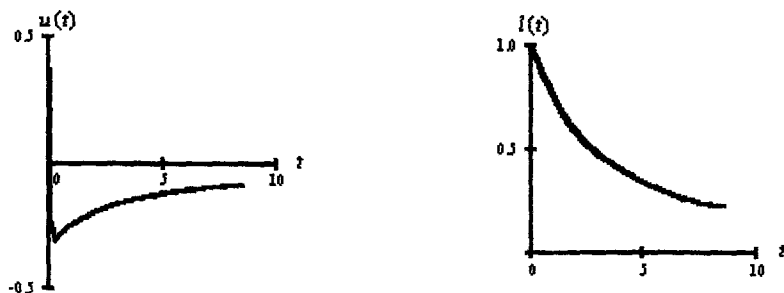


Рис. 4: Поведение функций $u(1, t)$, $l(t)$ при $u_0(y) > 0$ (для задачи с двумя свободными границами)

На рис. 4 ($a = 1$) $u(1, t)$ убывает и меняет знак, затем возрастает и стремится к нулю, т.е. жидкость вначале оттекает от точки $x = 0$, после чего меняет направление движения и начинает

притекать к этой точке; $l(t)$ убывает и стремится к нулю. Эти результаты находятся в согласии с качественными выводами работы [1], см. п. 1.

Задача с твердой стенкой. В качестве начальной была взята функция

$$u_0(y) = a(y^3 - 3y), \quad (32)$$

где a — произвольная константа, удовлетворяющая условиям (22).

На рис. 5 приведены графики при $a = -5$: при $t \rightarrow \infty$ $u(1, t)$ убывает и стремится к нулю, а $l(t)$ возрастает и стремится к бесконечности.

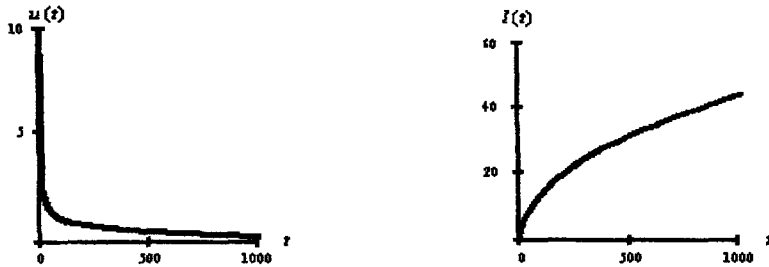


Рис. 5: Поведение функций $u(1, t)$, $l(t)$ при $u_0(y) > 0$ (для задачи с твердой стенкой)

Если $a > 0$, то функция $u(1, t)$ возрастает, рис. 6 ($a = 1$), меняет знак и уходит на бесконечность за конечное время, а $l(t)$ убывает и стремится к нулю.

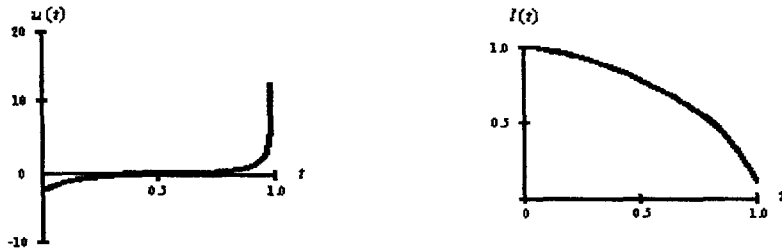


Рис. 6: Поведение функций $u(1, t)$, $l(t)$ при $u_0(y) < 0$ (для задачи с твердой стенкой)

Список литературы

- [1] АНДРЕЕВ В.К. *Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения* / В.К. Андреев, В.В. Пухначев // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983. – Т. 14. – № 5. – С. 3-23.
- [2] АНДРЕЕВ В.К. *О движении плоского слоя жидкости со свободной границей под действием эффекта Соре* / В.К. Андреев, А.Е. Картошкина // Вестник КрасГУ: физико-математические науки / Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 2004. – Вып. 1. – С. 182-191.
- [3] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
- [4] ПУКНАЧОВ V.V. *On a problem of viscous strip deformation with a free boundary* / V.V. Pukhnachov // C.R. Acad. Scien. Paris, t. 328, Serie 1, 1999. – P. 357-362.
- [5] АНДРЕЕВ В.К. *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике* / В.К. Андреев, О.В. Капцов, В.В. Пухначев, А.А. Родионов. – Новосибирск: Наука, 1994. – 319 с.

- [6] Овсянников Л.В. *Общие уравнения и примеры* / Л.В. Овсянников // Сб. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. – С. 5-75.
- [7] Пухначев В.В. *Нестационарные движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнений Навье-Стокса* / В.В Пухначев // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972. – Вып. 10. – С. 125-137.

ON ONE VISCOUS FLUID DYNAMICS EQUATION

V.K.Andreev, A.E.Kartoshkina, A.A.Rodionov

The solutions of 3-rd order partial differential equation arising from the model of thermal diffusion motion in flat layers with free boundary are studied.