

ОПТИКА И ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 53.082.55

ОСОБЕННОСТИ КАЛИБРОВКИ ЧЕТЫРЕХДЕТЕКТОРНЫХ СТОКС-ПОЛЯРИМЕТРОВ

А.Н.Остыловский, А.В.Сорокин*

Рассмотрены особенности калибровки четырехдетекторных Стокс-поляриметров, связанные с решением матричных уравнений. Проведены анализ точности вычислительных процедур и оптимизация калибровочных наборов векторов Стокса для определения аппаратной матрицы различных моделей поляриметров. Установлена необходимая точность счета при заданных погрешностях измерений отдельных параметров Стокса.

Поляризационные оптико-физические измерения в различных спектральных диапазонах являются мощным исследовательским инструментом. Примерами тому являются эллипсометрические методы, астрофизические исследования, использование поляризованного синхротронного излучения в физике твердого тела.

Матричные методы в поляризационных измерениях в оптике используются давно [1].

Известны различные варианты устройств, определяющих полные наборы четырех параметров Стокса [2-9]. Однозначное определение этих параметров возможно при преобразовании анализируемого пучка в четыре путем контролируемого деления амплитуды или волнового фронта. Каждый из четырех пучков проходит по каналу с определенной поляризационной матрицей и преобразуется в электрический сигнал. Возможности выбора вариантов каналов практически неограничены, однако точность определения параметров Стокса существенно зависит как от вариантов набора каналов, так и от точности численной обработки результатов измерений [10, 11].

В матричной форме работа Стокс-поляриметра описывается уравнением

$$AS = I, \quad (1)$$

где A — аппаратная 4×4 -матрица элемента, определяемая характеристиками поляриметра; S — четырехкомпонентный вектор Стокса анализируемого пучка; I — четырехкомпонентный вектор токовых откликов детекторов четырех каналов поляриметра. Процедура калибровки конкретного прибора состоит в нахождении элементов аппаратной матрицы путем нахождения токовых откликов I_k от четырех пучков с векторами S_k с известными линейно независимыми состояниями поляризации.

В работе [7] подробно описана калибровка конкретного четырехдетекторного Стокс-поляриметра и последующие испытания прибора на контрольных пучках. Авторы работы [8] подробно анализируют погрешности измерений стоксовых компонент, связанные непосредственно с устойчивостью системы линейных уравнений (1) на примере поляриметра, у которого каналы различались по одному параметру — ориентации осей фазовой пластины. Однако общая постановка задачи в указанных выше работах не рассматривалась.

В реальной практике представляет интерес исследование математических особенностей обобщенной модели четырехдетекторного Стокс-поляриметра: необходимую вычислительную точность определения элементов аппаратной матрицы при заданной точности параметров Стокса, оптимальные варианты набора калибровочных векторов; влияние погрешностей измерений токовых откликов.

В частности, для оптимизации вариантов оптических схем и точности измерений токовых откликов необходим некоторый универсальный критерий, позволяющий однозначно выбирать оптимальные варианты.

Рассмотрим обобщенную модель четырехдетекторного Стокс-поляриметра, сформированную на основе реальных вариантов, предложенных в работах [9, 10]. Определим тип таких поляриметров как последовательные, поскольку в каждый из четырех детекторов последовательно попадают части исходного анализируемого пучка, предварительно прошедшие через соответствующие фильтры F_1 – F_4 . С каждого из детекторов электрический сигнал поступает на многоканальный аналого-цифровой преобразователь, сопряженный с компьютерным портом.

* © А.Н.Остыловский, А.В. Сорокин, Красноярский государственный университет, e-mail: sorav@lan.krasu.ru, 2005.

Для последующего анализа модели и процедуры калибровки важным является возможность варьирования набора калибровочных пучков с заданными параметрами Стокса и их точностью, а также точностью определения токовых откликов I_1-I_4 .

Генератором калибровочных пучков будет служить устройство, содержащее лазер с линейно поляризованным пучком, проходящим через четвертьволновую пластину. В предположении идеальности линейной поляризации исходного пучка и фазовой пластины, нормированные вектора Стокса калибровочных пучков задаются выражениями:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1, \\ S_1 &= [\cos 2\alpha + \cos(4\beta - 2\alpha)]/2, \\ S_2 &= [\sin 2\alpha + \sin(4\beta - 2\alpha)]/2, \\ S_3 &= \sin(2\beta - 2\alpha), \end{aligned}$$

где α — азимут угла линейного поляризатора и β — азимут угла быстрой оси четвертьволновой пластины в фиксированной лабораторной системе координат.

Набор возможных калибровочных векторов генерируется устройством при варьировании углов в интервале $[0, 2\pi)$. Наглядная интерпретация состояния поляризации представляется с помощью сферы Пуанкаре [12]. Каждая точка сферы соответствует определенному состоянию поляризации. Несовершенство поляризаторов приводит к "размытию" точки, превращению ее в "пятно" с характерным радиусом δr , что и определяет разброс параметров вектора Стокса в некотором интервале ΔS_k .

Точность калибровки четырехдетекторного Стокс-поляриметра определяется тремя основными факторами: точностью задания параметров калибровочных наборов векторов Стокса, точностью регистрации токовых откликов и расчетными погрешностями процедур нахождения аппаратной матрицы и вычисления параметров Стокса исследуемого пучка по зарегистрированным токовым откликам.

При использовании матричного аппарата возникают вычислительные погрешности.

Вначале рассмотрим процедуру калибровки с произвольным набором линейно независимых калибровочных векторов $S_k = (S_k^1, \dots, S_k^4)^T$. Пусть $I_k = (I_k^1, \dots, I_k^4)^T$ — соответствующие токовые отклики фотодетекторов, то есть

$$AS_k = I_k, \quad (k = 1 \dots, 4), \quad (2)$$

где $A = [a_{ij}^i]$ — так называемая аппаратная матрица. Введя матрицы S и I , составленные из столбцов S_k и I_k , соответственно, представим (2) в виде

$$AS = I. \quad (3)$$

Задача калибровки состоит в выражении матрицы A и относительной погрешности $\delta A = \|\Delta A\|/\|A\|$ в евклидовой норме через S , I , δS , δI . Рассмотрим два варианта решения этой задачи.

1. Обозначим

$$Q = \text{diag}[S^T, S^T, S^T, S^T] -$$

блочная диагональная матрица порядка 16,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [a_1^1, \dots, a_4^1, \dots, a_1^2, \dots, a_4^2, \dots, a_1^4, \dots, a_4^4]^T, \\ \mathbf{i} &= [I_1^1, \dots, I_4^1, \dots, I_1^2, \dots, I_4^2, \dots, I_1^4, \dots, I_4^4]^T - \end{aligned}$$

столбцы, составленные из строк, соответственно, матриц A и I . Тогда (3) можно представить как линейную систему уравнений относительно $\mathbf{a}$:

$$Q\mathbf{a} = \mathbf{i}. \quad (4)$$

Как известно [13],

$$\delta \mathbf{a} \leq \frac{\nu_Q}{1 - \nu_Q \cdot \delta Q} (\delta Q + \delta \mathbf{i}), \quad (5)$$

где $\nu_Q = \|Q\| \|Q^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы Q . Имеем

$$\delta Q = \frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} = \frac{\left[\sum_{i,j} (\Delta Q_j^i)^2 \right]^{1/2}}{\left[\sum_{i,j} (Q_j^i)^2 \right]^{1/2}} = \frac{2\|\Delta S\|}{2\|S\|} = \delta S, \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{i} = \delta I, \quad \delta \mathbf{a} = \delta A, \quad (7)$$

$$\nu_Q = \|Q\| \|Q^{-1}\| = 2\|S\| \cdot 2\|S^{-1}\| = 4\nu_S. \quad (8)$$

Подставив (6–8) в (5), получим искомое:

$$\delta A \leq \frac{4\nu_S}{1 - 4\nu_S \cdot \delta S} (\delta I + \delta S). \quad (9)$$

2. Запишем возмущенное соотношение (3):

$$(A + \Delta A)(S + \Delta S) = I + \Delta I.$$

Раскрывая скобки и учитывая (3), получим

$$\Delta A \cdot (S + \Delta S) = \Delta I - A\Delta S.$$

В предположении $\|\Delta S\| < \|S^{-1}\|^{-1}$ матрица $S + \Delta S$ невырождена [13]. Тогда

$$\Delta A = (\Delta I - A\Delta S)(S + \Delta S)^{-1} = (\Delta I - A\Delta S)(E + S^{-1}\Delta S)^{-1}S^{-1}.$$

Используя свойства нормы [13], получим

$$\begin{aligned} \|\Delta A\| &\leq (\|\Delta I\| + \|A\|\|\Delta S\|)\|S^{-1}\| \|(E + S^{-1}\Delta S)^{-1}\| \leq \\ &\leq (\|\Delta I\| + \|A\|\|\Delta S\|) \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \|S^{-1}\|\|\Delta S\|}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq \left(\frac{\|\Delta I\|}{\|A\|} + \|\Delta S\| \right) \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \|S^{-1}\|\|\Delta S\|} = \\ &= \left(\frac{\|\Delta I\|\|S\|}{\|A\|\|S\|} + \|\Delta S\| \right) \frac{\|S^{-1}\|\|S\|}{\|S\| - \|S\|\|S^{-1}\|\|\Delta S\|} \leq \\ &\leq (\delta I \cdot \|S\| + \|\Delta S\|) \frac{\nu_S}{\|S\| - \nu_S\|\Delta S\|} = \\ &= (\delta I + \delta S) \frac{\nu_S\|S\|}{\|S\| - \nu_S\|\Delta S\|} = (\delta I + \delta S) \frac{\nu_S}{1 - \nu_S \cdot \delta S}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\delta A \leq \frac{\nu_S}{1 - \nu_S \cdot \delta S} (\delta I + \delta S). \quad (10)$$

Оценка (10), даже если считать $\delta I = \delta S = 0$, в 4 раза ниже оценки (9). Причина этого явления в том, что оценка (5) получается при условии независимости возмущений всех элементов матрицы Q , а это не так.

После оценки погрешностей калибровки оценим погрешность работы поляриметра на произвольных входных векторах Стокса.

На вход подается вектор x , на выходе измеряется вектор токового отклика i :

$$Ax = i.$$

Требуется определить x и δx .

Как известно [13],

$$\delta x \leq \frac{\nu_A}{1 - \nu_A \cdot \delta A} (\delta A + \delta i).$$

Используя (10), получим с точностью до малых второго порядка

$$\delta x \lesssim \nu_I \nu_S [\nu_S (\delta S + \delta I) + \delta i]. \quad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что при оценке δx нельзя пренебрегать погрешностями δS и δI , возникающими в процедуре калибровки. Это отличает нашу работу от [10], [11]. Кроме того, в этих работах

фактически построен наш вариант 1, только без учета δS и δI . А этот вариант, как уже отмечалось, дает оценку погрешности в 4 раза выше нашей оценки (10).

Теперь предложим вариант выбора набора векторов Стокса калибровочных пучков.

Рассмотрим систему нормированных векторов из $\mathbb{R}^4$:

$$S_k = (1, S_k^2, S_k^3, S_k^4),$$

$$S_k^2 + S_k^3 + S_k^4 = 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Нетрудно проверить, что не существует такой ортогональной системы. Определитель, составленный из векторов S_k , по модулю равен шестикратному объему трехмерной пирамиды с вершинами в точках $M_k(S_k^2, S_k^3, S_k^4)$. Эта пирамида вписана в трехмерную сферу единичного радиуса с центром в начале координат. Объем такой пирамиды максимален и равен $8\sqrt{3}/27$, если она - тетраэдр.

Выберем координаты вершин тетраэдра следующим образом. Поместим точку M_1 на оси Oz , т.е. положим $M_1(0, 0, 1)$. Тогда z -координаты остальных трех вершин будут равны $-1/3$. Этот тетраэдр можно поворачивать вокруг оси Oz . Обозначим через φ угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки M_2 . Тогда матрица S примет вид

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \varphi & \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) & \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos(\varphi + \frac{4\pi}{3}) \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \varphi & \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) & \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin(\varphi + \frac{4\pi}{3}) \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Независимо от φ для евклидовой нормы матрицы S и ее определителя имеем:

$$\|S(\varphi)\| = 2\sqrt{2}, \quad |S(\varphi)| = \frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

Отметим, что при $S(0)$ близка к соответствующей матрице из работы [10].

Матрица $S^{-1}(\varphi)$ может быть найдена аналитически:

$$S^{-1}(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Независимо от φ евклидова норма матрицы $S^{-1}(\varphi)$ равна $\sqrt{5/2}$. Таким образом, число обусловленности матрицы $S(\varphi)$ не зависит от φ и равно

$$\nu_S = \|S\| \|S^{-1}\| = 2\sqrt{5}$$

Таким образом, проведенный нами анализ позволил установить значительно более точную оценку относительных погрешностей при нахождении элементов аппаратной матрицы четырехдетекторных Стокс-поляриметров путем учета погрешностей элементов калибровочных векторов S_i и полученных на них токовых откликов J_i . Установлено, что необходимая в процедуре калибровки матрица S^{-1} может быть найдена аналитически для семейства векторов Стокса S_i , соответствующие точки которых на сфере Пуанкаре образуют семейство вписанных тетраэдров. Однопараметрическая серия различных наборов калибровочных векторов позволяет тестировать оптимальность выбранной оптической схемы четырехдетекторного Стокс-поляриметра.

Список литературы

- [1] ДЖЕРАРД А. *Введение в матричную оптику* / А.Джерард, Д.Берч. – М.: Мир, 1984.
- [2] AZZAM R.M.A. // Opt. Acta. – 1982. – V. 29. – № 5. P. 585–589.
- [3] AZZAM R.M.A. // Opt. Lett. – 1985. – V. 10. – № 7. – P. 309–311.
- [4] DANIELS J.M. // Rev. Sci. Instrum. – 1985. – V. 57. – № 8. – P. 1570–1573.
- [5] AZZAM R.M.A. *Response of the rotating-detector ellipsometer to incident partially polarized light* / R.M.A.Azzam // Applied Optics. – 1986. – V. 25. – № 23. – P. 4224–4227.
- [6] AZZAM R.M.A. *Integrated polarimeters based on anisotropics photodetectors* / R.M.A.Azzam // Opt. Lett. – 1987. – V.12. – № 8. – P. 555–557.
- [7] AZZAM R.M.A. *Accurate calibration of the four-detector photopolarimeter with imperfect polarizing optical elements* / R.M.A.Azzam, A.G.Lopez // J. Opt. Soc. Am. A. – 1989. – V. 6. – № 10. – P. 1513–1521.
- [8] ИТОН К., SUGAVARA M., ОНТСУКА Y. // Opt. Commun. – 1985. – V. 58. – № 6. – P. 375–378.
- [9] МИХАЙЛОВ М.И. *Устройство для измерения параметров поляризации светового пучка* / М.И.Михайлов, А.В.Сорокин. Авторское свидетельство СССР № 1821654. – Зарегистрировано 12.10.1992 БИ №22, 15.06.93.
- [10] AZZAM R.M.A. *Construction, calibration and testing of a four-detector photopolarimeter* / R.M.A.Azzam, E.Masseti, I.M.Elminyawi, F.G.Grosz // Rev. Sci. Instrum. – 1988. – V. 59. – № 1. – P. 84–88.
- [11] МАРЬЕНКО В.В. *Оптимизация Стокс-поляриметров, основанных на измерении четырех интенсивностей* / В.В.Марьенко, Т.В.Молебная // Оптико-механическая промышленность. – 1990. – № 7. – С. 68–71.
- [12] БОРН М. *Основы оптики* / М.Борн, Э.Вольф. – М.: Наука, 1970.
- [13] ВОЕВОДИН В.В. *Матрицы и вычисления* / В.В.Воеводин, Ю.А.Кузнецов. – М.: Наука, 1981.

CALIBRATION'S FEATURE OF THE FOUR DETECTOR PHOTOPOLARIMETERS

A.N.Ostylovski, A.V.Sorokin

The calibration's features of Stokes photopolarimeter are bound up with solution of matrices equation was examined. The analyze of precision calibrating process and calibration of Stokes vectors was made. The necessary precision of calibration with giving measurement mistakes of Stokes parameters was determined.