

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

Д.А.Нестеров\*

*Представлен вычислительный алгоритм решения уравнений электродинамики для нестационарных неоднородных магнитогазодинамических газовых течений. Рассмотрена задача нахождения распределения напряженности электрического поля и плотности тока в потоке газа, взаимодействующего с внешним магнитным полем. Проведен анализ полученных распределений электродинамических параметров в разряде.*

Одним из основных физических механизмов, определяющих картину магнитогазодинамического течения, является взаимодействие движущегося газа с электромагнитным полем. Для определения объемных сил и джоулевой диссипации в потоке газа требуется находить распределения напряженности электрического поля и плотности тока. Для неоднородных потоков, содержащих токовые слои, разряды и т.п., градиенты коэффициента электропроводности и индуцированного электрического поля достигают больших величин. В связи с этим для корректного решения таких задач необходимо использование эффективных и экономичных вычислительных алгоритмов.

В данной работе представлен вычислительный алгоритм решения двух и трехмерных уравнений электродинамики для неоднородной среды. Алгоритм основан на методе установления с применением схем расщепления по пространственным координатам. Описанный алгоритм был использован как составная часть нестационарной вычислительной модели для исследования неоднородных сверхзвуковых магнитогазодинамических течений. По результатам вычислительных экспериментов проведен анализ распределения электродинамических параметров в разряде, который взаимодействует с внешним магнитным полем и газовым потоком.

### Постановка задачи

Рассматривается задача определения распределения электродинамических параметров в неоднородном газовом потоке, взаимодействующем с магнитным полем. В канал прямоугольного сечения со сверхзвуковой скоростью поступает холодный непроводящий газ. Верхняя и нижняя стенки канала представляют собой электроды, замкнутые на нагрузку, боковые стенки — диэлектрики. В движущемся газе имеются горячие электропроводные области (Т-слои, разряды), которые взаимодействуют с постоянным поперечным магнитным полем. В результате взаимодействия через контур электропроводные области - электроды - нагрузка течет ток. На электропроводные области газа действует сила Лоренца, что приводит к формированию сложной структуры течения и неоднородному распределению индуцированного электрического поля. Такое течение описывается системой уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах (1)–(4), дополненной уравнениями состояния газа (5):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{S}; \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p)u + q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)v + q_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)w + q_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ Q \end{bmatrix}; \quad (2)$$

\* © Д.А.Нестеров, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, e-mail: Nesterov@krtfqi.tptus.ru, 2005.

$$E_t = \rho \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + e \right), \quad Q = Q_J - Q_R + f_x u + f_y v + f_z w; \quad (3)$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (4)$$

$$p = p(\rho, e), \quad T = T(\rho, e). \quad (5)$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости газа  $\mathbf{v}$ ;  $p$  — давление;  $E_t$  — полная энергия единицы объема газа;  $e$  — внутренняя энергия единицы массы газа;  $T$  — температура газа;  $f_x, f_y, f_z$  — компоненты вектора объемной силы  $\mathbf{f}$ ;  $Q_J$  — объемная мощность джоулевой диссипации;  $Q_R$  — изменение энергии за счет радиационного теплообмена;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности газа.

Методика численного решения системы уравнений (1)-(5) приведена в работе [1]. При этом на каждом временном шаге необходимо решать стационарную задачу нахождения распределения плотности тока в канале для определения объемной электродинамической силы  $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  и величины джоулевой диссипации  $Q_J = \mathbf{j}^2 / \sigma$ . Именно эти величины определяют процесс МГД-взаимодействия.

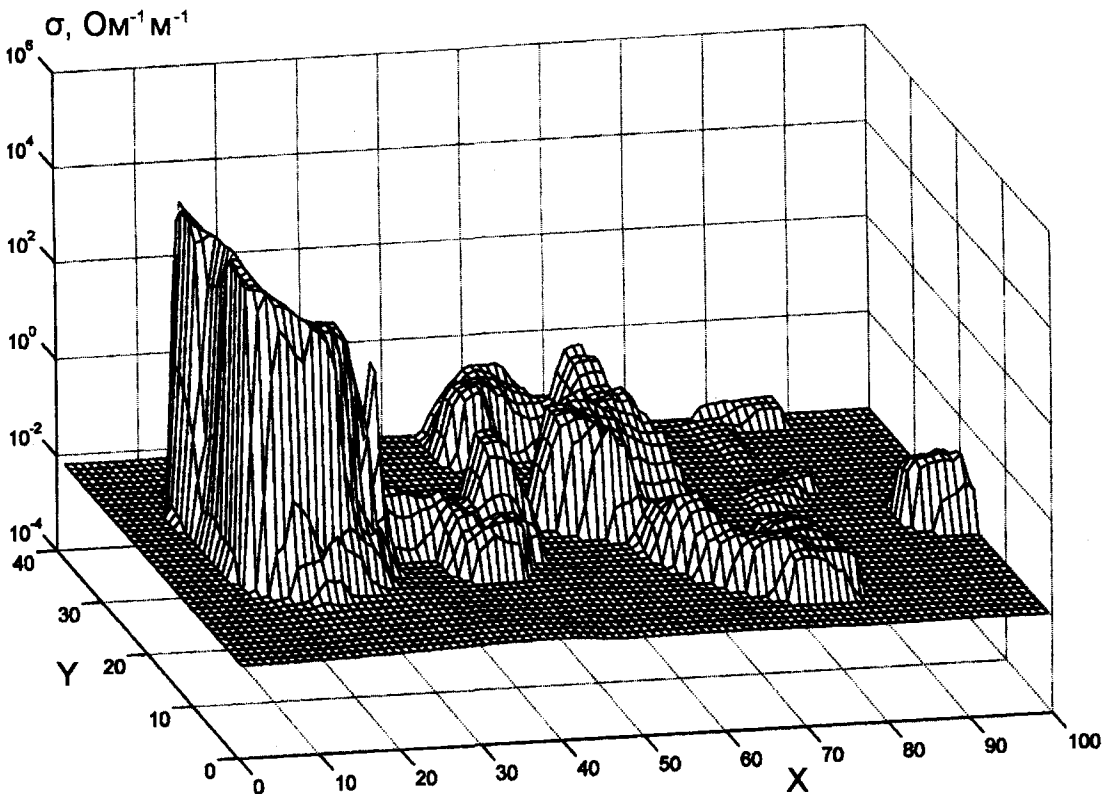


Рис. 1. Распределение электропроводности в МГД-канале в области разряда в плоскости, равноудаленной от электродов

Основными трудностями для нахождения электродинамических параметров являются большие градиенты электропроводности  $\sigma$  и индуцированного электрического поля  $\mathbf{E}^{\text{ext}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Для иллюстрации приводятся результаты моделирования течения в сверхзвуковом МГД-генераторе с токовым слоем [1]. На рис. 1 показано распределение величины электропроводности в области разряда. По рисунку видно, что значение электропроводности резко меняется на границе токового слоя на несколько порядков. На рис. 2 приводится поле скоростей в плоскости, параллельной электродам и равноудаленной от них. Видно, что течение имеет вихревой характер. При этом абсолютная величина индуцированного электрического поля значительно изменяется в окрестности разряда.

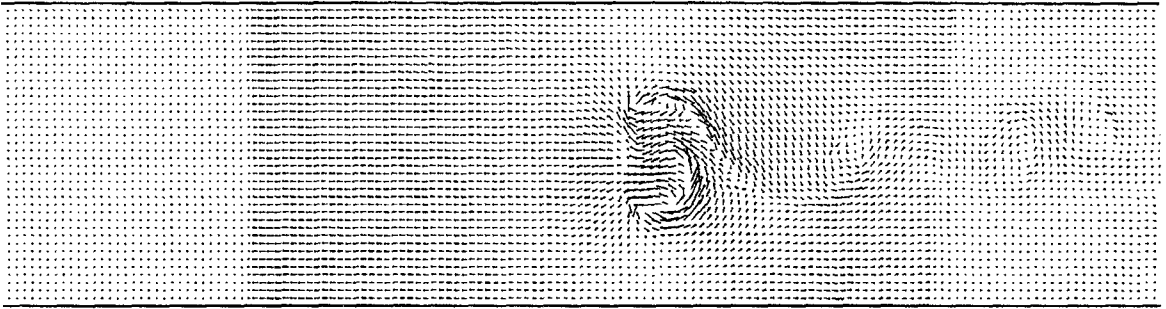


Рис. 2. Векторное поле скорости в МГД-канале в системе отсчета, связанной с набегающим потоком (момент времени  $t = 0,4$  мс)

## Уравнения электродинамики

Для описания электромагнитных взаимодействий используется система уравнений Максвелла в приближении статической электродинамики, при этом диэлектрическая и магнитная проницаемость считается равной единице:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}^e + \mathbf{E}^{\text{ext}}), \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^e = 0, \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{E}^e = 4\pi\rho_e, \quad (8)$$

где  $\mathbf{E}^e(x, y, z)$  — напряженность электрического поля, определяемая внешней нагрузкой;  $\mathbf{E}^{\text{ext}}(x, y, z)$  — напряженность индуцированного электрического поля;  $\mathbf{j}(x, y, z)$  — поле плотности тока;  $\sigma(x, y, z)$  — электропроводность газа;  $\rho_e(x, y, z)$  — поле плотности электрических зарядов.

Значение  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$  определяется исходя из величины постоянного внешнего магнитного поля  $\mathbf{V} = (0, V_y, 0)$  и скорости газа  $\mathbf{v}$ , при этом индуцированное магнитное поле в силу малости в данной модели не учитывается:

$$\mathbf{E}^{\text{ext}} = \mathbf{v} \times \mathbf{V}. \quad (9)$$

Используя скалярную функцию потенциала электрического поля  $\varphi(x, y, z)$ , удовлетворяющую уравнению

$$-\nabla\varphi = \mathbf{E}^e, \quad (10)$$

с учетом выполнения внутри расчетной области соотношения  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  (пренебрегаем скоростью изменения плотности электрических зарядов  $\rho_e$ ), получим неоднородное эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами

$$\text{div}(\sigma\nabla\varphi) = \text{div}(\sigma\mathbf{E}^{\text{ext}}). \quad (11)$$

Решение данного уравнения позволяет найти распределение потенциала  $\varphi(x, y, z)$ , по которому определяется электрическое поле  $\mathbf{E}^e$  из (10) и распределение плотности токов  $\mathbf{j}(x, y, z)$  с помощью (6). Величины джоулевой диссипации и объемной силы Лоренца, действующей на электропроводный газ, рассчитываются следующим образом:

$$Q_J = \mathbf{j}^2/\sigma, \quad \mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{V}, \quad (12)$$

при этом не учитывается электростатическая сила  $\rho_e\mathbf{E}^e$ , поскольку она пренебрежимо мала по сравнению с силой Лоренца. В качестве граничных условий уравнения (11) на электродах задаются значения потенциала. На непроводящих границах, где отсутствует нормальная составляющая плотности тока, приравнивается к нулю соответствующая производная потенциала.

## Вычислительный алгоритм

Все переменные в уравнениях (6)–(12) определены в прямоугольной области  $x \in [0, L]$ ,  $y \in [0, W]$ ,  $z \in [0, H]$  где  $L$ ,  $W$  и  $H$  - длина, ширина и высота канала соответственно. Для численного решения уравнений вводится равномерная прямоугольная сетка

$$\omega(h_x, h_y, h_z) = \{x_i = (i - 1/2)h_x, i = 1, 2, \dots, N_x, \\ y_j = (j - 1/2)h_y, j = 1, 2, \dots, N_y, z_k = (k - 1/2)h_z, k = 1, 2, \dots, N_z\} \quad (13)$$

с шагами  $h_x = L/N_x$ ,  $h_y = W/N_y$ ,  $h_z = H/N_z$  и количествами узлов  $N_x$ ,  $N_y$  и  $N_z$  вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Для решения электродинамического уравнения (11) использован метод установления, когда из соответствующего нестационарного уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{div}(\sigma \nabla \varphi) - \text{div}(\sigma \mathbf{E}^{\text{ext}}) \quad (14)$$

находится решение, сходящееся к стационарному состоянию. Для численного решения уравнения (14) используется экономичная схема расщепления по пространственным направлениям [2] с применением неявной разностной схемы.

В качестве начального условия для уравнения (14) используется установившееся распределение потенциала на предыдущем временном шаге газодинамической задачи, а в начале моделирования задается равномерное распределение потенциала между электродами

$$\varphi_0(x, y, z) = \varphi_1(1 - z/H) + \varphi_2(z/H), \quad (15)$$

где  $H$  - расстояние между электродами:  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - значения потенциала на электродах.

Для магнитогазодинамических течений с Т-слоями характерны резкие градиенты температуры, давления, скорости, при этом величины  $\sigma$  и  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$  могут отличаться в соседних точках на порядки. Как показывает опыт, в таких условиях использование значений  $\sigma$  и  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$  в "получелых" точках сетки или применение центральных разностей приводит к значительному искажению получаемых величин токов в точках, близких к градиентам параметров газа. И как следствие, ошибочно определяются силы, действующие на газ, и величина Джоулевой диссипации. Это может приводить к сильному "нефизическому" нагреву отдельных точек и "развалу" численного решения.

Наиболее корректное численное решение уравнения (14) получено при использовании неявных локально-одномерных схем следующего вида:

$$\frac{\varphi_i^{**} - \varphi_i^*}{\tau^n} = \frac{1}{h_x^2} (\sigma_i(\varphi_{i+1}^{**} - \varphi_i^{**}) - \sigma_{i-1}(\varphi_i^{**} - \varphi_{i-1}^{**})) - \frac{1}{h_x} (\sigma_i (E_x^{\text{ext}})_i - \sigma_{i-1} (E_x^{\text{ext}})_{i-1}), \quad (16)$$

$$\frac{\varphi_i^{**} - \varphi_i^*}{\tau^n} = \frac{1}{h_x^2} (\sigma_{i+1}(\varphi_{i+1}^{**} - \varphi_i^{**}) - \sigma_i(\varphi_i^{**} - \varphi_{i-1}^{**})) - \frac{1}{h_x} (\sigma_{i+1} (E_x^{\text{ext}})_{i+1} - \sigma_i (E_x^{\text{ext}})_i), \quad (17)$$

где  $\varphi^*$  и  $\varphi^{**}$  - распределение потенциала до и после действия разностной схемы соответственно. В выражениях (16)–(17) для краткости записи индексы  $j$  и  $k$  опущены. Разностные аппроксимации, записанные для всех  $i$ , совместно с граничными условиями образуют систему алгебраических уравнений, которую решают методом прогонки. Обозначим процедуру определения  $\varphi^{**}$  для оси  $x$  для всех  $j$  и  $k$  по соотношениям (16), как  $L_x^{e-}$ , по соотношениям (17), как  $L_x^{e+}$ , а по осям  $y$  и  $z$ , соответственно,  $L_y^{e\pm}$ ,  $L_z^{e\pm}$ . Выполнение шага  $\tau^n$  происходит при последовательном выполнении процедур по отдельным направлениям  $\varphi^{n+1} = L_x^{e\pm} L_y^{e\pm} L_z^{e\pm} \varphi^n$ , причем в ходе расчета для достижения симметрии поочередно используются все 8 возможных комбинаций  $L_x^- L_y^- L_z^-$ ,  $L_x^+ L_y^- L_z^-$ ,  $L_x^+ L_y^+ L_z^-$  и т.д.

Напряженность электрического поля определяется следующим образом. Если в направлении оси  $x$  использовался разностный оператор  $L_x^{e-}$ , то компонента вектора  $(E_x^e)_{i,j,k} = (\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k})/h_x$ , если использовался оператор  $L_x^{e+}$ , то  $(E_x^e)_{i,j,k} = (\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k})/h_x$ . Аналогично находятся компоненты векторов  $E_y^e$  и  $E_z^e$  для направлений  $y$  и  $z$  соответственно.

Сходимость решения электродинамической задачи существенно зависит от выбора шага  $\tau^n$ . Наиболее эффективно решение сходится при использовании переменного шага, когда после каждой итерации  $\tau$  меняется по закону  $\tau^{n+1} = \tau^n/\alpha$ . Таким образом, скорость сходимости и точность

решения определяют три параметра: начальное значение шага  $\tau^0$ , конечное значение шага  $\tau^1$  и скорость его изменения -  $\alpha$ . Начальное значение шага должно быть достаточно велико, а коэффициент  $\alpha$  мал, чтобы схема была способна перестроить имеющееся начальное распределение потенциала до распределения являющегося решением. Конечное значение  $\tau^1$  определяется заданной величиной допустимой погрешности численного решения.

Для выбора оптимальных значений параметров проводились тестовые расчеты. Использовалось характерное распределение газодинамических параметров в канале при моделировании течения с токовым слоем. Нахождение распределения потенциала повторялось при разных значениях параметров и сравнивалось с точным решением. Точное решение получено при большом начальном и малом конечном значении шага  $\tau$  и очень малой скорости изменения  $\alpha$ . Наиболее эффективными были выбраны следующие параметры: начальное значение параметра итерации  $\tau^0$  равно 1, скорость изменения  $\alpha$  равна 1.1, итерации прекращаются, когда  $\tau^n$  становится меньше  $10^{-10}$ . При этом максимальное отклонение численного значения суммарного тока в сечении, перпендикулярном оси  $z$ , от точного значения не превышало 6%, а количество итераций, необходимых для получения решения, составляло 242.

При моделировании нестационарной газодинамической задачи изменение распределения физических параметров за один шаг по времени мало. Поэтому нахождение распределения плотности тока на каждом шаге по времени можно ускорить, если в качестве начального поля потенциала использовать распределение, полученное на предыдущем временном шаге. Это дает возможность значительно уменьшить начальное значение параметра итерации  $\tau^0$ . Величина  $\tau^0$  может быть снижена до  $10^{-6}$ . При этом количество итераций для получения решения равно 97. Максимальное отклонение численного значения суммарного тока в сечении, перпендикулярном оси  $z$ , от точного значения составляло не более 5,5%.

В процессе моделирования нестационарного газодинамического течения на каждом временном шаге проводился контроль сходимости решения электродинамической задачи по отклонению суммарного тока в плоскостях, параллельных электродам от среднего значения тока. При описанных граничных условиях в любом сечении в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , суммарный ток должен быть в пределах заданной погрешности. По величине отклонения суммарного тока в разных сечениях от среднего значения проводится коррекция величин  $\alpha$  и  $\tau^0$  в процессе расчета, что позволяет наиболее оптимально использовать вычислительные ресурсы.

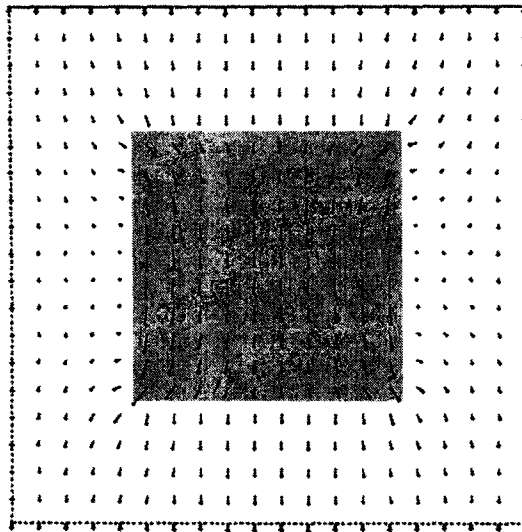


Рис. 3. Поле плотности токов в среднем сечении уз; серая область соответствует области повышенной электропроводности

Для иллюстрации работы алгоритма на рис. 3 приведено поле плотности тока в расчетной области  $20 \times 20 \times 20$  узлов, в ее центре расположена зона в форме куба размером  $10 \times 10$  (узлов) с электропроводностью  $\sigma_1 = 2800 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$  ( $T_1 = 10^4 \text{ K}$ ); снаружи куба электропроводность  $\sigma_2 = 89 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$  ( $T_2 = 6 \times 10^3 \text{ K}$ ). Шаг сетки  $h_x = h_y = h_z = 4 \text{ мм}$ , разность потенциалов  $\Delta\varphi = 60 \text{ В}$ .

В рассмотренном алгоритме в качестве граничных условий можно задавать как разность потенциалов на электродах, так и сопротивление нагрузки. Во втором случае напряжение на электродах определялось по следующей формуле:

$$\Delta\varphi^{n+1} = \mu\Delta\varphi^{n+1} + (1 - \mu)RI^n, \quad (18)$$

где  $\Delta\varphi^{n+1}$  — разность потенциалов на  $n+1$  временном шаге;  $R$  — сопротивление нагрузки;  $I^n$  — протекающий через разрядную область ток, определенный на временном шаге  $n$ ;  $\mu$  — коэффициент сглаживания. Формула (18) определяет явный алгоритм расчета напряжения на электродах, при этом из-за сильно нелинейной зависимости требуется использовать сглаживающий коэффициент  $\mu$  для подавления неустойчивости. Оптимальное значение  $\mu = 0,9$ .

## Результаты численных расчетов

Описанный численный алгоритм был реализован как часть трехмерной нестационарной вычислительной модели, описывающей сверхзвуковое течение в МГД-генераторе с T-слоем. Далее приведены результаты численных расчетов электродинамических параметров для течения со следующими параметрами. Геометрические характеристики канала: ширина  $W = 10$  см, высота  $H = 6$  см. Индукция внешнего магнитного поля  $B = 3$  Тл. Сопротивление нагрузки  $R = 0,04$  Ом. Параметры невозмущенного потока газа: скорость  $u = 3$  км/с, температура 1000 К, давление  $10^5$  Па. Использована модель идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,3$  и молярной массой  $\mu = 28,9$  г/моль. Коэффициент электропроводности задавался в виде таблиц  $\sigma(T, p)$  [3]. В начальном состоянии газодинамическое течение включает в себя разрядную область, заданную в виде правильного цилиндра с радиусом  $r = 3$  см и температурой  $T = 10^4$  К.

На начальном этапе, до времени  $t < 0,1$  мс, разрядная область сохраняет симметричную форму, а течение газа имеет двухмерный характер. Расчет электродинамических параметров может проводиться быстрее с большим значением  $\alpha$ , поскольку проводящая область между электродами имеет почти вертикальный вид с мало изменяющимся сечением вдоль разряда (рис. 4 а).

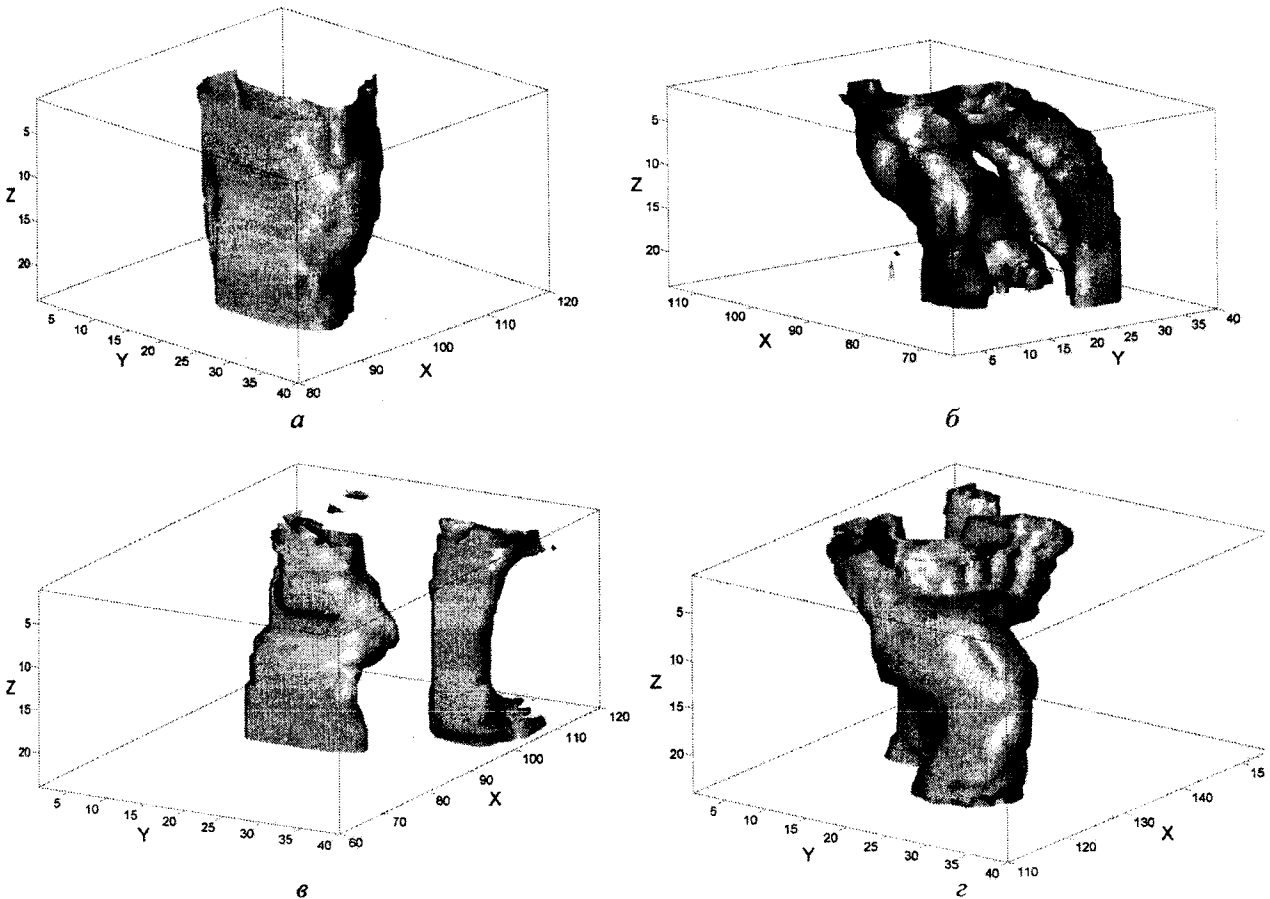


Рис. 4. Изоповерхности абсолютного значения плотности тока  $j = 10^6$  А/м<sup>2</sup>, а — 0,1 мс после инициирования, б — 0,5 мс, в — 1,0 мс, г — 1,3 мс

Начиная с момента времени примерно 0,1 мс, течение принимает вихревой характер, симметрия разряда теряется, и его размеры и форма начинают хаотически меняться около некоторого среднего значения. При этом разрядная область может разделяться на несколько частей (рис. 4 б, в, г). Такое поведение разрядной области обусловлено несколькими причинами. При обтекании разряда формируется течение, по структуре напоминающее дорожку Кармана. Из-за периодического срыва вихрей с краев разряда на него действует поперечная сила, приводящая к постоянному отрыву и сносу вниз по потоку электропроводных областей газа и к хаотическому изменению формы разряда (рис. 4 б, в, г). При этом течение газа внутри разряда представляет собой два или более вихрей. Вторая причина - это развитие неустойчивости Релэй-Тейлора из-за перепада плотностей в ударной волне набегающего потока и разряде. В горячую электропроводящую область проникает холодный газ, что также может приводить к разделению разрядной области на части (рис. 4 б, в).

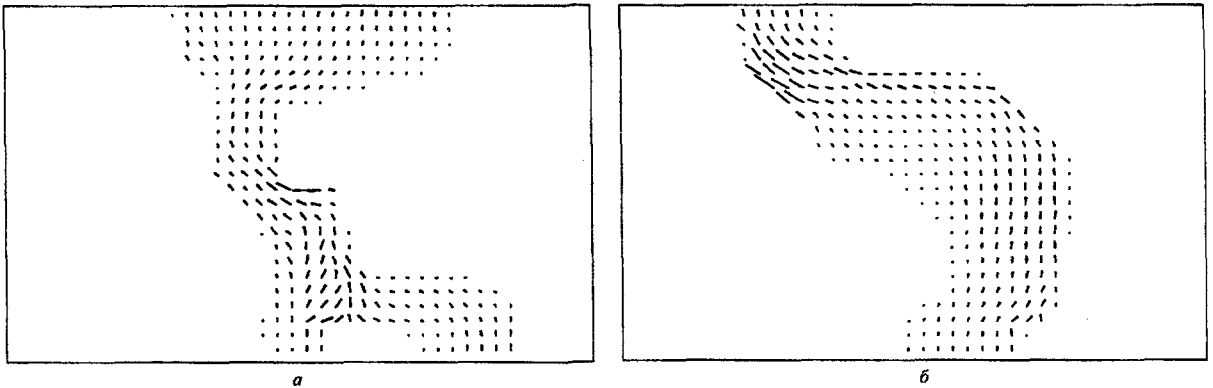


Рис. 5. Поле плотности тока в поперечном сечении канала: а - 0,5 мс,  $x = 90$ ; б - 1,3 мс,  $x = 124$

Распределение плотности тока в области разряда в плоскости, перпендикулярной течению, показано на рис. 5. Граничные условия электродинамической задачи предполагают направление линий тока, перпендикулярное поверхности электродов. Однако воздействие газового потока, имеющего сложную вихревую структуру, приводит к сильной деформации пространственной формы разряда и наклону линий тока.

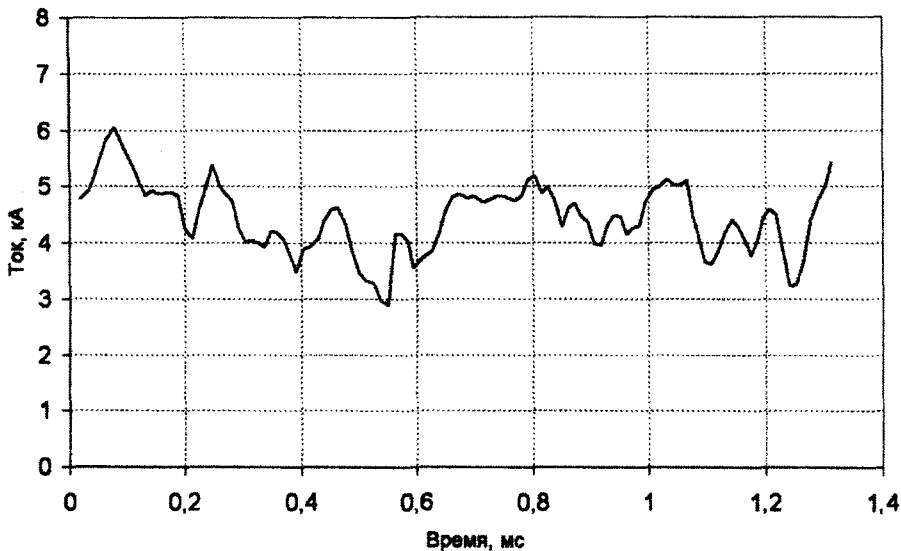


Рис. 6. Зависимость разрядного тока от времени

На рис. 6 показана временная зависимость тока, протекающего через разрядную область. Кривая имеет нестационарный пульсирующий характер, обусловленный постоянным изменением формы и размеров разряда. На начальном этапе ( $t < 0,5$  мс) колебания, имеющие период  $T \approx 0,2$  мс, соответствуют периодическому срыву вихрей с разряда. В момент времени  $t \approx 0,5$  гидродинамическая неустойчивость разделяет разряд на несколько токопроводящих каналов (рис. 4 б), что приводит к нарушению периодичности процесса.

В данной работе предложен алгоритм решения уравнения статической электродинамики для неоднородных газовых потоков, взаимодействующих с магнитным полем. Алгоритм основан на методах расщепления, что позволяет использовать его для решения как двухмерных, так и трехмерных задач без значительных изменений. Данный алгоритм был использован для трехмерного расчета течения в канале сверхзвукового МГД-генератора с токовыми слоями. Полученные распределения электродинамических параметров имеют неоднородный нестационарный характер.

## Список литературы

- [1] ВАСИЛЬЕВ Е.Н. *Нестационарная трехмерная вычислительная модель радиационно-конвективного теплообмена в неоднородном потоке электропроводного газа* / Е.Н.Васильев, Д.А.Нестеров // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. – 2004. – №5. – С. 103-111.
- [2] САМАРСКИЙ А.А. *Теория разностных схем* / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
- [3] СОКОЛОВА И.А. *Коэффициенты переноса и интегралы столкновения воздуха и его компонент* / И.А.Соколова // Физическая кинетика: Сборник научных трудов ИТПМ СО АН СССР. Вып. 4. – Новосибирск, 1974. – С. 39.

## COMPUTATION OF ELECTRODYNAMIC PARAMETERS IN HETEROGENEOUS MAGNETOGASDYNAMIC FLOWS

D.A. Nesterov

*Computation algorithm of solving equations of electrostatics for nonstationary heterogeneous magnetogasdynamic gas flows was introduced. The problem of determination electric intensity and current density distributions in gas flow, which interactions with external magnetic field, was considered. Obtained distributions of electrodynamic parameters in electric discharge were analysed.*