УДК 517.55

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУПП КОГОМОЛОГИЙ ГЛАДКИХ НЕКОМПАКТНЫХ ДВУМЕРНЫХ ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ[1]

А.А.Кытманов*

Даны примеры вычисления групп когомологий для некоторых классов двумерных гладких некомпактных торических многообразий.

1. Случай веера из трех векторов

В данной работе рассматриваются торические многообразия, заданные двумерными примитивными неполными веерами. Напомним, что вещественная размерность веера совпадает с комплексной размерностью многообразия, условие примитивности веера означает, что многообразие гладкое и, наконец, неполнота веера означает некомпактность многообразия.

Вначале рассмотрим случай, когда веер порождается тремя векторами v_1, v_2, v_3 в $\mathbb{R}^2$ и состоит из двух двумерных конусов, например v_{12} и v_{23} (рис. 1).

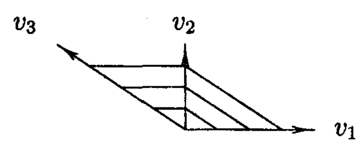

Рис. 1. Неполный веер в $\mathbb{R}^2$

Покажем, что в этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между каждым таким многообразием и линейным расслоением над проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ (см. [1]).

Итак, рассматриваем примитивный веер Σ в $\mathbb{R}^2$, порожденный векторами

$$v_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \; j = 1,2,3 \tag{1}$$

с целыми коэффициентами x_j, y_j. Поскольку рассматриваются два двумерных конуса v_{12} и v_{23}, то примитивность веера означает, что

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1. \tag{2}$$

Поскольку $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ (заметим, что $\Sigma \not\subset \mathbb{R}^1$, иначе Σ не является веером), то имеем одно соотношение на векторы веера:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0,$$

где a, b и c целые числа. В силу (1) и (2) имеем

$$\begin{cases} x_1y_2 - x_2y_1 = 1 \\ x_2y_3 - x_3y_2 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ ay_1 + by_2 + cy_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Если умножим четвертое уравнение на x_2 и вычтем его из третьего уравнения, умноженного на y_2, получим $a(x_1y_2 - y_1x_2) + c(x_3y_2 - y_3x_2) = 0$. Применяя первые два уравнения в (3), получаем, что $a = c$.

Если теперь умножим четвертое уравнение на x_3 и вычтем его из третьего уравнения, умноженного на y_3, получим $a(x_1y_3 - x_3y_1) + b(x_2y_3 - x_3y_2) = 0$. В силу второго уравнения в (3) получаем $x_3y_1 - x_1y_3 = \frac{b}{a}$. Поскольку все x_j и y_j целые, то левая часть последнего уравнения также является целым числом. Получаем, что $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$, следовательно, без ограничения общности можно положить $a = c = 1$. Доказано следующее

[1]Работа поддержана Красноярским краевым фондом науки, грант 14G152.

Предложение 1. *Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ — примитивный неполный веер в $\mathbb{R}^2$, состоящий из трех одномерных (векторы v_1, v_2, v_3) и двух двумерных конусов ($v_{12} =< v_1, v_2 >$ и $v_{23} =< v_2, v_3 >$). Тогда соотношение на векторы v_1, v_2, v_3 определяется равенством*

$$v_1 - kv_2 + v_3 = 0, \tag{4}$$

где k — целое число, зависящее от векторов v_1, v_2, v_3.

В этом случае торическое многообразие $\mathbb{X}$, заданное таким веером Σ, покрывается двумя картами, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{C}^2$ (каждая карта соответствует двумерному конусу в Σ) с локальными координатами (z_1, w_1) и (z_2, w_2) соответственно. С помощью простого вычисления получаем следующие функции перехода: $z_2 = z_1^k w_1$, $w_2 = z_1^{-1}$. где k то же, что и в (4). Заметим, что мы получили взаимно-однозначное соответствие между торическими многообразиями, заданными примитивными неполными веерами в $\mathbb{R}^2$ и линейными расслоениями над $\mathbb{CP}^1$. Теорема 3 в [1] утверждает, что в этом случае:

(a) $H_c^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $H_c^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) \neq 0$ и $H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) = 0$ для $k = 0$;

(c) $H_c^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) \neq 0$ и $H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) \neq 0$ для $k = -1, -2, \ldots$.

Рассмотрим теперь общий случай торического многообразия, заданного примитивным неполным веером в $\mathbb{R}^2$, состоящим из $d = n + 2$ одномерных конусов (векторов $v_1, \ldots, v_d$) и $d - 1$ двумерных конусов ($v_{12} =< v_1, v_2 >, \ldots, v_{d-1,d} =< v_{d-1}, v_d >$).

Так как каждые три последовательных вектора v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, $j = 2, \ldots, d-1$ имеют целые коэффициенты и свойство, что $\det(v_{j-1}, v_j) = \det(v_j, v_{j+1}) = 1$, то в силу предложения 1 можно записать все независимые линейные соотношения на векторы в следующем виде:

$$\begin{cases} v_1 - k_1 v_2 + v_3 = 0 \\ \ldots \\ v_n - k_n v_{n+1} + v_{n+2} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, функции перехода между картами будут задаваться формулами $z_{j+1} = z_j^{k_j} w_j$, $w_{j+1} = z_j^{-1}$ $j = 1, \ldots, n+1$.

2. Общий случай двумерного неполного веера

Сначала рассмотрим случай веера, состоящего из четырех векторов. В этом случае имеем два линейных соотношения на векторы веера:

$$\begin{cases} v_1 - k_1 v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 - k_2 v_3 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Также имеем три карты $U_1 = \{z : z_3 z_4 \neq 0\}$, $U_2 = \{z : z_1 z_4 \neq 0\}$ и $U_3 = \{z : z_1 z_2 \neq 0\}$, покрывающих торическое многообразие, и три пересечения данных карт: $U_{12} = \{z : z_1 z_3 z_4 \neq 0\}$, $U_{23} = \{z : z_1 z_2 z_4 \neq 0\}$ и $U_{13} = \{z : z_1 z_2 z_3 z_4 \neq 0\}$. В этих пересечениях определены следующие функции:

$$f_{12} = \sum_{\alpha:\alpha_2 \geqslant 0} a_\alpha^{12} z^\alpha, \quad f_{23} = \sum_{\alpha:\alpha_3 \geqslant 0} a_\alpha^{23} z^\alpha, \quad f_{31} = \sum_{\alpha} a_\alpha^{31} z^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ — мультииндекс и

$$\begin{cases} \alpha_1 - k_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - k_2 \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Через $\sigma_{j,j+1}$ обозначим двумерный конус, порожденный смежными векторами v_j и v_{j+1}. Заметим, что если хотя бы одно k_i, $i = 1, 2$ отрицательно, то хотя бы один из конусов σ_{12}, σ_{23} или σ_{23}, σ_{34} покрывает больше полуплоскости. Поэтому либо f_{12}, либо f_{23} не может быть представлена в виде разности двух функций, голоморфных в соответствующих картах (см. случай веера из трех векторов).

Теперь предположим, что оба k_1 и k_2 неотрицательны. Тогда из условия отрицательности α_2 получаем, что $\alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 0$ и, следовательно, α_1 и α_3 не могут быть отрицательными одновременно.

Поэтому функция $f_{12} = f_1 - f_2$, где f_j голоморфны в U_j, $j = 1,2$. Аналогично из $\alpha_3 \geqslant 0$ получаем, что $\alpha_2 + \alpha_4 \geqslant 0$ и, следовательно, $f_{23} = f_2 - f_3$, где f_j голоморфны в U_j, $j = 2,3$.

Теперь положим, что функция f_{31} голоморфна в U_{13}. Заметим, что если α_2 и α_3 оба отрицательны, то все коэффициенты f_{12} и f_{23} должны быть равны нулю, и поэтому $f_{31} = 0$, поскольку $f_{12} + f_{23} + f_{31} = 0$. Если If $\alpha_2 \geqslant 0$ и $\alpha_3 < 0$, то α_1 должно быть неотрицательно, и мы имеем функцию f_1, голоморфную в U_1. Аналогично получаем, что если $\alpha_3 \geqslant 0$ и $\alpha_2 < 0$, то α_4 должно быть неотрицательно и функция f_3 голоморфна в U_3. Нам осталось рассмотреть случай, когда оба α_2 и α_3 неотрицательны.

Рассмотрим величину $k_1k_2 - 1 \equiv \det(v_1, v_4)$. Заметим, что данная величина имеет следующий геометрический смысл: она положительна (равна нулю, отрицательна) тогда и только тогда, когда веер Σ, порожденный векторами v_1, v_2, v_3, v_4, покрывает меньше полуплоскости (в точности полуплоскость, больше полуплоскости). Рассмотрим следующие три случая.

1. Заметим, что поскольку k_1 и k_2 оба неотрицательные целые числа, то величина $k_1k_2 - 1$ может быть отрицательной только если $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$. Без ограничения общности, считаем $k_1 = 0$. Тогда система (5) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = k_2\alpha_3. \end{cases}$$

И если $\alpha_2 > 0$ и $\alpha_3 > 0$, получаем, что $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_4 = k_2\alpha_3 - \alpha_2$, которая, очевидно, может быть отрицательной, когда $k_2\alpha_3 < \alpha_2$. Следовательно, если $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_4 < 0$, то функция f_{31} не является голоморфной ни в U_1, ни в U_3. Получаем, что группа когомологий $H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O})$ нетривиальна.

2. Поскольку k_1 и k_2 оба неотрицательны, то величина $k_1k_2 - 1$ может быть равна нулю только если $k_1 = k_2 = 1$, и система (5) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_4 = \alpha_3 - \alpha_2. \end{cases}$$

Получаем, что $\alpha_1 + \alpha_4 = 0$ так, что или $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ (и в этом случае f_{31} голоморфна везде), или одно из α_1 и α_4 положительно. В этом случае f_{31} голоморфна или в U_1 (если $\alpha_1 > 0$), или в U_3 (если $\alpha_4 > 0$). Поэтому $H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) = 0$.

3. Поэтому $k_1k_2 - 1 > 0$ и, следовательно, $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Тогда можем в (5) найти α_2 и α_3:

$$\alpha_2 = \frac{k_2\alpha_1 + \alpha_4}{k_1k_2 - 1}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1 + k_1\alpha_4}{k_1k_2 - 1}.$$

Поскольку α_2 и α_3 неотрицательны, получаем:

$$\begin{cases} k_2\alpha_1 + \alpha_4 \geqslant 0 \\ \alpha_1 + k_1\alpha_4 \geqslant 0, \end{cases}$$

из чего следует, что α_1 и α_4 не могут быть отрицательными одновременно. Поэтому одно из них неотрицательно, так что f_{31} голоморфна или в U_1 (если $\alpha_1 \geqslant 0$), или в U_3 (если $\alpha_4 \geqslant 0$). Следовательно, $H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) = 0$.

В случае торического многообразия, заданного двумерным примитивным веером с произвольным количеством векторов, поскольку мы рассматриваем тройки карт (т.е. тройки двумерных конусов), по индукции получаем следующую

Теорема 1. *Гладкое некомпактное торическое многообразие $\mathbb{X}$ комплексной размерности 2 имеет $H^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}) = 0$ тогда и только тогда, когда его веер покрывает не больше полуплоскости.*

Список литературы

[1] Dwilewicz R. *Additive Riemann-Hilbert problem in line bundles over* $\mathbb{CP}^1$ / R.Dwilewicz // Preprint Univ. Missouri-Rolla. – 2004. – 15 pp.

EVALUATION OF THE COHOMOLOGY GROOPS FOR SMOOTH NON-COMPACT TWO-DIMENSIONAL TORIC MANIFOLDS

A.A.Kytmanov

It is considered the examples of evaluation of cohomology groops of two-dimensional non-compact smooth toric manifolds.