УДК 517.545

МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОНИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ОЛДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

М.Н. Завьялов*

Рассмотрена задача восстановления ограниченной на всей вещественной оси вектор-функции $Y(t)$, заданной на конечном множестве и являющейся решением некоторой системы однородных линейных дифференциальных уравнений.

Рассматривается задача восстановления ограниченной на всей вещественной оси вектор-функции $Y(t)$, заданной на конечном множестве и являющейся решением некоторой системы однородных линейных дифференциальных уравнений (ОЛДУ) следующего вида:

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ — вектор-функция из $2n$ компонент; A — квадратная матрица порядка $2n$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая определчнным ограничениям.

Начальные условия задаются в точках равномерной сетки:

$$Y(t_0 + kd) = C_k \in \mathbb{R}^{2n}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \quad \text{где } N \geqslant 2n. \tag{2}$$

Векторы C_k назовчм *моментами.* Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $t_0 = 0$.

Данная работа примыкает к статье [1], где решалась задача о восстановлении по конечному числу своих значений почти-периодической функции, являющейся суммой конечного числа синусоид:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j \sin(\omega_j t + \theta_j) + B$$

и существенно опирается на результаты работ [2-3].

Сформулируем основной результат статьи в виде теоремы. Еч доказательство, с небольшими модификациями, которые указаны ниже, полностью аналогично доказательству теоремы 3 из [3], и здесь не приводится.

Теорема. *Пусть дана система вида (1) с неизвестной матрицей A, собственные числа которой принадлежат полосе*

$$\Pi(d) = \{z \in \mathbb{C} : |Im\, z| < \pi/d\}.$$

Пусть также известны невырожденные краевые условия вида (2) (невырожденность краевых условий означает, что у матрицы моментов $Y_N := (C_0, C_1, \ldots, C_N)$ ранг равен $2n$).

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) существует единственная ограниченная на всей вещественной оси вектор-функция $Y(t)$, являющаяся решением системы (1) и удовлетворяющая краевым условиям (2);

2) для моментов $C_0, \ldots, C_N$ существует единственный вектор $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, такой, что одновременно выполняются 2 условия:

а)

$$C_{k+2n} + p_1 C_{k+2n-1} + \ldots + p_{2n} C_k = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N - 2n,$$

причем

$$p_i = p_{2n-i},\ i = 1, 2, \ldots, 2n-1,\ p_{2n} = 1; \tag{3}$$

б) все корни многочлена, ассоциированного с вектором $\vec{p}$

$$T_{2n}(z) := z^{2n} + p_1 z^{2n-1} + \ldots + p_{2n}, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ є 03-01-00460 и гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1212.2003.1.

различны и расположены в $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \setminus \{1; -1\}$.

При этом решение системы (1) имеет вид

$$Y(t) = G \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_{2n}(t) \end{pmatrix},$$

где

$$\psi_1(t) = e^{\alpha_1 t}, \ \psi_2(t) = e^{-\alpha_1 t}, \ldots, \psi_{2n-1}(t) = e^{\alpha_n t}, \ \psi_{2n}(t) = e^{-\alpha_n t}.$$

Здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *— различные собственные значения матрицы* A, *определяемые по формуле*

$$\alpha_i = \frac{\ln q_i}{d}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Логарифм понимается в смысле главного значения, $\{q_i\}_1^n$ *— различные корни многочлена* $T_{2n}(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ Im\, z > 0\}$.

Матрица G *определяется по формуле*

$$G = DP^{-1},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} \psi_1(0) & \ldots & \psi_1((2n-1)d) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{2n}(0) & \ldots & \psi_{2n}((2n-1)d) \end{pmatrix},$$

$$D = (C_0, C_1, \ldots, C_{2n-1})$$

— квадратная матрица порядка $2n$, *столбцами которой являются первые* $2n$ *моментов.*

Матрица A *системы (1) равна*

$$A = GLG^{-1},$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & -\alpha_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_n & \\ & & & & -\alpha_n \end{pmatrix}$$

— квадратная диагональная матрица порядка $2n$ *(на незаполненных местах стоят нули).*

Дадим некоторые пояснения к теореме. Требование (3) объясняется тем, что если q — корень многочлена (4), то и q^{-1} должно быть его корнем, так как $T_{2n}(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Все его корни попарно сопряжены, и $\bar{q} = q^{-1}$ при $|q| = 1$. Условие же того, что $|q| = 1$, сразу следует из формулы (5) — в этом случае все $\alpha_i, \ i = 1, \ldots, n$ будут чисто мнимыми, что необходимо и достаточно для ограниченности $Y(t)$.

Заметим, что определение корней полинома $T_{2n}(z)$ можно свести к рассмотрению связанного с ним полинома $P_n(w)$ степени n. Справедливо следующее.

Предложение. *В обозначениях приведчнной теоремы существует полином* $P_n(w)$ *степени* n, *все корни которого различны и принадлежат интервалу* $(-1, \ 1)$, *такой, что* $P_n \circ \lambda(z) \equiv z^{-n} \cdot T_{2n}(z), \ z \in \mathbb{C}$, *где* $w = \lambda(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ *— функция Жуковского.*

При $n = 2$ условию предложения удовлетворяет полином $P_2(w) = 4w^2 + 2p_1 w + p_2 - 1$, где

$$\max\{2p_1 - 2, \ -2p_1 - 2\} < p_2 < \frac{p_1^2}{4} + 2, \quad |p_1| < 4.$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$(z + z^{-1})^m = z^m + z^{-m} + C_m^1(z^{m-2} + z^{2-m}) + \ldots + C_m^l, \quad \text{если } m = 2l, \quad \text{и}$$

$$(z + z^{-1})^m = z^m + z^{-m} + C_m^1(z^{m-2} + z^{2-m}) + \ldots + C_m^l(z + z^{-1}), \quad \text{если } m = 2l + 1.$$

\`Список литературы

[1] Маергойз Л.С. *О методе гармонического разложения Прони* / Л.С.Маергойз, Б.Н.Варава // Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. науч. тр. Краснoярс. гос. ун-т. – Красноярск, 1996. – С. 136-144.

[2] Maergoiz L.S. *Asymptotic characteristics of entire functions and their applications in mathematics and biophysics* / L.S.Maergoiz. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 362 pp.

[3] Завьялов М.Н. *Модификация алгоритма Прони для системы ОЛДУ с постоянными неизвестными коэффициентами* / М.Н.Завьялов // Многомерный комплексный анализ / Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 2002. – С. 37–47.

THE PRONI METHOD OF HARMONIC DECOMPOSITION FOR HOMOGENEOUS SYSTEM OF OLDE WITH CONSTANT COEFFICIENTS

M.N.Zav'yalov

It is considered the problem of restoration of bounded on all real axe vector-function $Y(t)$ given on finite set and being the solution of some system of homogeneous linear differential equations.