УДК 517.55

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

М.С.Мысливец*

В статье даются условия разрешимости задачи Неймана для плюригармонических функций конечного порядка роста, а также условия разрешимости этой задачи в шаре.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ вида $\Omega = \{z : \rho(z) < 0\}$. $\Gamma = \{z : \rho(z) = 0\}$ — ее граница. $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$, т.е. $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ и $d\rho \neq 0$ на Γ, ρ — вещественнозначная функция.

Пусть f — гармоническая функция в Ω и вблизи Γ она является функцией конечного порядка роста, т.е. для всех $z^0 \in \Gamma$ $\exists$ шар $B(z^0, r)$ с центром в точке $z^0 \in \Gamma$ радиуса r существуют константы $C > 0$, $m > 0$, для которых

$$|f(z)| \leq C|\rho|^{-m}(z), \quad z \in \Omega \cap B(z^0, r).$$

Тогда (как показано в [1, 2]) существует предел

$$[f]_0(\varphi) = \langle [f]_0, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\Gamma f(z - \varepsilon\nu(z))\varphi(z)d\sigma \tag{1}$$

для любой $\varphi \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Здесь $\nu(z)$ — единичный вектор нормали к Γ в точке z, направленный в сторону возрастания функции ρ, а $d\sigma$ — мера Лебега на Γ. Этот предел определяет *граничное значение* функции f на Γ, которое является распределением $[f]_0$.

Обозначим $Harm(\Omega)$ — комплексные гармонические функции в Ω, $Ph(\Omega)$ — плюригармонические функции в Ω, $Harm^\infty(\Omega) = Harm(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$, $Ph^\infty(\Omega) = Ph(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$. $Ph(\Omega) \subset Harm(\Omega), Harm^r(\Omega) = Harm(\Omega) \cap C^r(\overline{\Omega})$, $Ph^r(\Omega) = Ph(\Omega) \cap C^r(\overline{\Omega})$. Также введем такие обозначения $Harm^f(\Omega) : H \in Harm(\Omega), H$ конечного порядка роста. $Ph^f(\Omega) : H \in Ph(\Omega)$, H конечного порядка роста вблизи $\partial\Omega$.

Введем подпространство $Harm^f_0(\Omega)$.

$$Harm^f_0(\Omega) = \{H \in Harm^f(\Omega) : [\overline{\partial}_n H]_0 \text{ действительно на } \partial\Omega\},$$

здесь $[\overline{\partial}_n H]_0$ означает следующее распределение:

$$[\overline{\partial}_n H]_0 = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial \overline{z}_k}\right]_0 \rho_k.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования РФ, №Е00-1.0-151

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \overline{f}(z) \wedge *\overline{\partial} H,$$

т.к. $*\overline{\partial}H$ — $(n-1,n)$-замкнутая форма.

Тогда условие плюригармонического продолжения из [3] примет вид

$$0 = \langle g - \operatorname{Re} S_1(f), \overline{\partial}_n H\rangle = \langle g, \overline{\partial}_n H\rangle - \operatorname{Re}\langle S_1(f), \overline{\partial}_n H\rangle \Rightarrow$$

$$\langle g, \overline{\partial}_n H\rangle = \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \overline{f} \wedge *\overline{\partial} H.$$

□

Если Ω — это единичный шар, то условия из теоремы 2 становятся такими.

Следствие 3. *Существует и конечного порядка роста в B такая, что $\overline{\partial}u = f$ в B, $\operatorname{Re} u = g$ на S тогда и только тогда $\overline{\partial} f = 0$ и для каждого $s,t > 0$ и $P_{s,t} \in H(s,t)$ выполняется*

$$\int_S g P_{s,t} d\sigma = \int_B \sum_{k=1}^n \overline{f}_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \frac{P_{s,t}}{t} dv + \int_B \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{P_{s,t}}{s} dv.$$

Теоремы 1 и 2 в случае гладких функций были доказаны в [?].

Список литературы

[1] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения/* А.М.Кытманов. – Новосибирск: Наука, 1992.

[2] Straube E.J. *Harmonic and analitic functions admitting a distribution boundary value/* E.L.Straube // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 1984. – V. 11. – №4. – P. 559-591.

[3] Мысливец М.С. *О плюригармоническом продолжении функций с границы области/* М.С.Мысливец // Вопросы математического анализа: Сб. тр. Вып. 4. – Красноярск: КрасГТУ, 2001. С. – 85-90.

[4] Хенкин Г.М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе/* Г.М.Хенкин // Современные проблемы математики. Фундаментальное направление. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т.7. – С. 23-124.