УДК 517.88

О ЧИСЛЕ ЧАСТЕЙ РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^n$ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ[1]

Г.А.Московченко*

Выводится новая формула числа частей разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями при их произвольном расположении.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано семейство $E = \{E_1, \dots, E_m\}$ различных гиперплоскостей

$$E_j = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j\},\ j = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Обозначим через $f_n(E) = f_n(E_1, \dots, E_m)$ число частей, на которые пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается гиперплоскостями (1), т.е. число связных компонент (областей) множества $\mathbb{R}^n \setminus E = \mathbb{R}^n \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_m)$. Ребром семейства E назовем любое непустое пересечение гиперплоскостей этого семейства. Ребро размерности k, представляющее собой k-мерную плоскость, будем называть k-ребром и обозначать $T^k,\ k = 0, 1, \dots, n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ будем считать n-мерным ребром семейства E. Обозначим B_k — число k-ребер семейства E. Множество всех ребер семейства E обозначим $L(E)$.

На множестве $L(E)$ вводится отношение частичного порядка по обратному включению. Таким образом $L(E)$ образует частично упорядоченное множество, содержащее минимальный элемент $\hat{0} = \mathbb{R}^n$. На множестве $L(E)$ определяется функция Мебиуса следующим образом (см. [2], [4]): для $x, y, z \in L(E)$

$$\mu(x, x) = 1; \quad \mu(x, y) = -\sum_{x \le z < y} \mu(x, z),\ x < y; \quad \mu(x, y) = 0,\ x > y. \tag{2}$$

Определение. *Флагом $F^{j_1 \dots j_k}$ называется всякая последовательность вложенных подпространств $T^{j_1} \subset T^{j_2} \subset \dots \subset T^{j_k}$ размерностей $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ соответственно.*

Набор размерностей $j_1 j_2 \dots j_k$ назовем типом флага. Мы будем рассматривать лишь флаги, ассоциированные с нашим семейством гиперплоскостей $E = \{E_1, \dots, E_m\}$, а именно такие флаги $T^{j_1} \subset T^{j_2} \subset \dots \subset T^{j_k}$ составляются из ребер

$$T^{j_s}, \quad s = 1, \dots, k, \quad 0 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k < n,$$

семейства E. Если индексом i_1 пронумеровать все j_1-ребра семейства E, индексом i_2 — все j_2-ребра и т.д., то каждый из рассматриваемых флагов определяется парой мультииндексов $(j_1 \dots j_k),\ (i_1 \dots i_k)$ и может быть обозначен $F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$. Размерностью флага $F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$ назовем j_k и обозначим $\dim(F)$. Порядком флага $F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$ назовем j_1 и обозначим $o(F)$. Длиной флага $F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$ назовем k. Обозначим число j_{k+1}-ребер, проходящих через флаг $F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$, символом $P^{j_1 \dots j_k j_{k+1}}_{i_1 \dots i_k}$ или $P^F_{j_{k+1}}$.

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, грант НШ-1212.2003.1

Теорема 1. *Если в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *задано семейство гиперплоскостей* $E = \{E_1, \dots, E_m\}$, *то число связных областей, на которые пространство* $\mathbb{R}^n$ *разбивается этими гиперплоскостями, можно вычислить по одной из формул:*

$$f_n(E) = 1 + \sum_F (-1)^{\varepsilon(F)}, \tag{3}$$

где суммирование ведется по всем флагам $F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$, $\quad \varepsilon(F) = n - k - o(F)$;

$$f_n(E) = 1 + (-1)^{n-1}\chi(E) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=\dim(F)+1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon(F)} P_i^F, \tag{4}$$

где $\chi(E) = B_0 - B_1 + B_2 + \dots + (-1)^{n-1}B_{n-1}$, *причем* B_k *– число* k*-ребер семейства* E.

Доказательство. Воспользуемся формулой Т.Заславского (см. [4])

$$f_n(E) = \sum_{T \in L(E)} |\mu(\hat{0}, T)|.$$

Сгруппируем слагаемые по размерности ребер T

$$\begin{aligned} f_n(E) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1} |\mu(\hat{0}, T^k_{i_1})| = \\ &= |\mu(\hat{0}, T^n)| + \sum_{i_1} |\mu(\hat{0}, T^{n-1}_{i_1})| + \sum_{i_1} |\mu(\hat{0}, T^{n-2}_{i_1})| + \dots + \sum_{i_1} |\mu(\hat{0}, T^0_{i_1})|, \end{aligned} \tag{5}$$

$T^k_{i_1}$ — i_1-е k-ребро семейства E.
Выпишем формулы для вычисления функции Мебиуса $\mu(\hat{0}, T^k_{i_1})$ от i_1-го k-ребра, $k = n$,
$n-1, \dots, 1, 0$. Согласно определению (2)

$$\begin{aligned} \mu(\hat{0}, T^n) &= 1, \\ \mu(\hat{0}, T^{n-1}_{i_1}) &= -1, \\ \mu(\hat{0}, T^{n-2}_{i_1}) &= -(1 - P^{n-2\,n-1}_{i_1}), \\ \mu(\hat{0}, T^{n-3}_{i_1}) &= -(1 - P^{n-3 n-1}_{i_1} - \sum_{i_2}(1 - P^{n-3 n-2 n-1}_{i_1\ \ i_2})), \\ \mu(\hat{0}, T^{n-4}_{i_1}) &= -(1 - P^{n-4 n-1}_{i_1} - \sum_{i_2}(1 - P^{n-4 n-2 n-1}_{i_1\ \ i_2}) - \\ &\quad - \sum_{i_2}(1 - P^{n-4 n-3 n-1}_{i_1\ \ i_2} - \sum_{i_3}(1 - P^{n-4 n-3 n-2 n-1}_{i_1\ \ i_2\ \ i_3}))) \end{aligned}$$

и т.д.

Подставим эти выражения в формулу (5), получим

$$
\begin{aligned}
f_n(E) = 1 + B_{n-1} - \sum_{i_1}(1 - P_{i_1}^{n-2n-1}) + \sum_{i_1}(1 - P_{i_1}^{n-3n-1} - \sum_{i_2}(1 - P_{i_1\ \ i_2}^{n-3n-2n-1}))-\\
- \sum_{i_1}(1 - P_{i_1}^{n-4n-1} - \sum_{i_2}(1 - P_{i_1\ \ i_2}^{n-4n-2n-1})-\\
- \sum_{i_2}(1 - P_{i_1\ \ i_2}^{n-4n-3n-1} - \sum_{i_3}(1 - P_{i_1\ \ i_2\ \ i_3}^{n-4n-3n-2n-1}))) + \dots =\\
= 1 + B_{n-1} - B_{n-2} + \sum_{i_1} P_{i_1}^{n-2n-1} + B_{n-3} - \sum_{i_1} P_{i_1}^{n-3n-1} - \sum_{i_1} P_{i_1}^{n-3n-2} +\\
+ \sum_{i_1}\sum_{i_2} P_{i_1\ \ i_2}^{n-3n-2n-1} - B_{n-4} + \sum_{i_1} P_{i_1}^{n-4n-1} + \sum_{i_1} P_{i_1}^{n-4n-2} -\\
- \sum_{i_1}\sum_{i_2} P_{i_1\ \ i_2}^{n-4n-2n-1} + \sum_{i_1} P_{i_1}^{n-4n-3} - \sum_{i_1}\sum_{i_2} P_{i_1\ \ i_2}^{n-4n-3n-1} -\\
- \sum_{i_1}\sum_{i_2} P_{i_1\ \ i_2}^{n-4n-3n-2} + \sum_{i_1}\sum_{i_2}\sum_{i_3} P_{i_1\ \ i_2\ \ i_3}^{n-4n-3n-2n-1} + \dots \quad .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Сгруппируем слагаемые по длинам k флагов:

$$
\begin{aligned}
f_n(E) = 1 + (-1)^{n-1}(B_0 - B_1 + B_2 + \dots + (-1)^{n-1}B_{n-1}) +\\
+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=\dim(F)+1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon(F)+1} P_i^F,
\end{aligned}
$$

где

$$F = F_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_k}, \quad \dim(F) = j_k, \quad o(F) = j_1, \quad \varepsilon(F) = n - k - o(F).$$

Таким образом,

$$f_n(E) = 1 + (-1)^{n-1}\chi(E) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=\dim(F)+1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon(F)+1} P_i^F,$$

где

$$\chi(E) = B_0 - B_1 + B_2 + \dots + (-1)^{n-1}B_{n-1}$$

есть эйлерова характеристика. Получили формулу (4). Заменив в формуле (6) числа

$$\sum_{i_1} \dots \sum_{i_{k-1}} P_{i_1\dots i_{k-1}}^{j_1\dots j_{k-1} j_k},\ k = 1, ..., n,$$

на числа

$$\sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} P_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_k n},$$

числа — B_l на $\sum\limits_{i_1} P_{i_1}^{l\ n}$, $l = 0, ..., n-1$, получим

$$f_n(E) = 1 + \sum_F (-1)^{\varepsilon(F)} P_n^F,$$

где

$$F = F^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}, \quad k = 1, ..., n, \quad 0 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k < n\ .$$

Число P_n^F равно единице для любого F, поэтому

$$f_n(E) = 1 + \sum_F (-1)^{\varepsilon(F)}.$$

Получили формулу (3). Говорят, что гиперплоскости семейства $E = \{E_1, \dots, E_m\}$ находятся в общем положении, если пересечение любых k гиперплоскостей семейства E есть $(n-k)$-мерная плоскость.

Следствие(см.[1],[3]). *Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскости семейства $E = \{E_1, \dots, E_m\}$ находятся в общем положении, то*

$$f_n(E) = B_0 + B_1 + \dots + B_n.$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любых фиксированных $j_1 = n-1, n-2, \dots, 0$ и i_1

$$\sum_{F^{j_1 \dots}_{i_1 \dots}} (-1)^{\varepsilon(F)} = 1. \tag{7}$$

Доказательство проведем индукцией по j_1. Для $j_1 = n-1$ сумма состоит из одного слагаемого по флагу $F^{n-1}_{i_1}$ и $\varepsilon(F) = 0$, следовательно, равенство (7) выполняется. Для $j_1 = n-2$ имеем один флаг типа $n-2$ и два флага типа $(n-2\ n-1)$, $\quad \varepsilon(F^{n-2}_{i_1}) = 1$, $\quad \varepsilon(F^{n-2 n-1}_{i_1\ \ i_2}) = 0$. Подставив их в (7), имеем $(-1)^1 + 2(-1)^0 = 1$, т.е. равенство (7) выполняется.

Предположим, что для всех $j_1 = n-1, n-2, \dots, 1$ равенство (7) выполняется. Покажем, что оно выполняется и для $j_1 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{F^{0 \dots}_{i_1 \dots}} (-1)^{\varepsilon(F)} = \\
&= \sum_{F^{0\ 1 \dots}_{i_1 \dots}} (-1)^{\varepsilon(F)} + \sum_{F^{0\ 2 \dots}_{i_1 \dots}} (-1)^{\varepsilon(F)} + \dots + \sum_{F^{0\ n-1}_{i_1\ i_2}} (-1)^{\varepsilon(F)} = \\
&= (-1)^{n-1} + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots (-1)^n \binom{n}{1} = \\
&= (-1)(1 - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \dots (-1)^{n-1} \binom{n}{1} + (-1)^n) + 1 = \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{8}$$

поскольку

$$1 - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \dots (-1)^{n-1} \binom{n}{1} + (-1)^n = (1-1)^n = 0.$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
f_n(E) &= 1 + \sum_F (-1)^{\varepsilon(F)} = \\
&= 1 + \sum_{i_1} \sum_{F^{0\dots}_{i_1\dots}} (-1)^{\varepsilon(F)} + \sum_{i_1} \sum_{F^{1\dots}_{i_1\dots}} (-1)^{\varepsilon(F)} + \dots + \sum_{i_1} \sum_{F^{n-1}_{i_1}} (-1)^{\varepsilon(F)} = \\
&= 1 + B_0 + B_1 + \dots + B_{n-1} = B_0 + B_1 + \dots + B_n.
\end{aligned}
$$

Список литературы

[1] Захаров А.В. *О числе частей и граней разбиения пространства* $\mathbb{R}^n$ *гиперплоскостями*/ А.В.Захаров, Г.А.Московченко, А.П.Южаков // Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. науч. тр. – Красноярск: КрасГУ, 2000. – С.20-30.

[2] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*/ Р.Стенли. – М.: Мир, 1990.

[3] Buck R.C. *Partition of space*/ R.C.Buck // Amer. Math. Monthly. – 1943. – V. 105.– №5. – P. 541-544.

[4] Zaslavsky T. *Facing up to arrangement face-count formulas for partions of space by hyperplanes* / T.Zaslavsky // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1975. – 154 pp.