УДК 517.55

О НАХОЖДЕНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА КРИВОЙ [1]

О.В. Ходос*

В [1] были получены необходимые и достаточные условия гармонического продолжения гладких функций, удовлетворяющих на гиперповерхности данным Коши, в фиксированную область. Эти условия формулировались в терминах роста производных суммы потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя на гиперповерхности. Далее был сделан переход к производным от самой функции. Неудобство полученного вида состояло в том, что оно зависело от продолжения функции в некоторую окрестность гиперповерхности. Поэтому дальнейшей задачей является перейти к касательным производным от функции и от нормальной производной этой функции (то есть к касательным производным данных Коши).

Пусть $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ — кривая в $\mathbf{R}^2$ вида

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,:\, \rho(x_1, x_2) = 0\}, \quad \operatorname{grad}\rho \neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Обозначим через

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \Big/ |\operatorname{grad}\rho|, \quad \rho_2 = \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \Big/ |\operatorname{grad}\rho|.$$

Рассмотрим касательное векторное поле $\mathcal{L}$ на Γ

$$\mathcal{L} = \rho_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \rho_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

и нормальное векторное поле $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ на Γ

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \rho_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \rho_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Лемма 1. *Если u — гладкая функция на Γ, то частные производные функции u можно найти по формулам:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \mathcal{L}(u) \cdot \rho_2 + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \rho_1; \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= -\mathcal{L}(u) \cdot \rho_1 + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \rho_2. \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства формул подставим в их правые части выражения для касательного и нормального полей и получим тождества. □

[1]При поддержке гранта Президента РФ НШ-1212.2003.1

Лемма 2. *Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемая функция в окрестности кривой Γ. Тогда частные производные второго порядка функции u можно найти по формулам:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \mathcal{L}(u)\cdot\frac{\partial\rho_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\rho_1}{\partial x_1} + +\mathcal{L}^2(u)\cdot\rho_2^2 + \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot 2\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}\cdot\rho_1^2; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\mathcal{L}(u)\cdot\frac{\partial\rho_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2} + \mathcal{L}^2(u)\cdot\rho_1^2 - \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot 2\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}\cdot\rho_2^2; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} = \mathcal{L}(u)\cdot\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\rho_1}{\partial x_2} - \mathcal{L}^2(u)\cdot\rho_1\rho_2 + \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\left(\rho_2^2-\rho_1^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}\rho_1\rho_2, \quad (3)$$

где $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}\circ\mathcal{L}$ — композиция двух касательных полей.

Доказательство. Докажем (3).

Воспользуемся определением частной производной второго порядка и подставим найденную в лемме 1 частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}(u)\cdot\rho_2 + \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\rho_1\right) =$$
$$= \mathcal{L}(u)\cdot\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\rho_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}(u)\right)\cdot\rho_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1. \quad (4)$$

Найдем $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}(u)\right)$, используя лемму 1:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathcal{L}(u)) = \left(-\rho_1\cdot\mathcal{L} + \rho_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right)(\mathcal{L}(u)) = -\mathcal{L}^2(u)\cdot\rho_1 + \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2.$$

Найдем $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)$, используя лемму 1:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right) = \left(-\rho_1\cdot\mathcal{L} + \rho_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right) = -\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}\cdot\rho_2.$$

Подставляя найденные частные производные в (4), получаем (3).

Аналогично доказываются формулы (1) и (2). □

Как видно, в (1), (2) и (3) явным образом присутствует $\frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}$. В дальнейшем хотелось бы выразить производную по нормали второго порядка через функции u, $\mathcal{L}(u)$, $\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)$.

Далее все результаты получены для гармонической функции. Напомним, что функция u называется *гармонической в некоторой области*, если она является решением уравнения Лапласа в этой области, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \quad (5)$$

Лемма 3. *Если u — гармоническая функция в окрестности Γ, тогда касательную производную порядка $s \geqslant 2$ от функции $\frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}$ можно найти по формуле:*

$$\mathcal{L}^{s-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}\right) = \sum_{r=1}^{s-1}\mathcal{L}^r(u)\cdot C_{s-2}^{s-r-1}\cdot\mathcal{L}^{s-r-1}\left(M_1\right) - \mathcal{L}^s(u) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{s-1}\mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot C_{s-2}^{s-r-1}\cdot\mathcal{L}^{s-r-1}\left(M_2\right), \quad (6)$$

где

$$M_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1}, \quad M_2 = -\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2},$$

C_{s-2}^{s-r-1} *— число сочетаний из* $s-2$ *элементов по* $s-r-1$,

$\mathcal{L}^{s-r-1} = \underbrace{\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \ldots \circ \mathcal{L}}_{s-r-1 \text{ раз}}$ *— композиция* $s-r-1$ *касательных полей.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $s = 2$ получаем истинное высказывание, если подставим (1) и (2) в (5), а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2} = \mathcal{L}(u) \cdot M_1 + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot M_2 - \mathcal{L}^2(u).$$

Предположим, что (6) верно при $s = k \geqslant 3$, то есть справедливо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{k-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right) &= \sum_{r=1}^{k-1} \mathcal{L}^r(u) \cdot C_{k-2}^{k-r-1} \cdot \mathcal{L}^{k-r-1}(M_1) - \mathcal{L}^k(u) + \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} \mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot C_{k-2}^{k-r-1} \cdot \mathcal{L}^{k-r-1}(M_2). \end{aligned}$$

Найдем $\mathcal{L}^{k-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)$. Предварительно заметим, что для любых функций f и g класса C^1 справедливо $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$, $\mathcal{L}(f \cdot g) = \mathcal{L}(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{L}(g)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{k-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right) = \mathcal{L}\left(\mathcal{L}^{k-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\right) = \\ = & \sum_{r=2}^{k} \mathcal{L}^r(u) \cdot C_{k-2}^{k-r} \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_1) + \sum_{r=1}^{k-1} \mathcal{L}^r(u) \cdot C_{k-2}^{k-r-1} \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_1) - \mathcal{L}^{k+1}(u) + \\ + & \sum_{r=2}^{k} \mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot C_{k-2}^{k-r} \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_2) + \sum_{r=1}^{k-1} \mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot C_{k-2}^{k-r-1} \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_2) = \\ = & \mathcal{L}^1(u) \cdot C_{k-2}^{k-2} \cdot \mathcal{L}^{k-1}(M_1) + \sum_{r=2}^{k-1} \mathcal{L}^r(u) \cdot \left(C_{k-2}^{k-r} + C_{k-2}^{k-r-1}\right) \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_1) + \\ + & \mathcal{L}^k(u) \cdot C_{k-2}^0 \cdot \mathcal{L}^0(M_1) - -\mathcal{L}^{k+1}(u) + \\ = & L^0\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot C_{k-2}^{k-2} \cdot \mathcal{L}^{k-1}(M_2) + \sum_{r=2}^{k-1} \mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \left(C_{k-2}^{k-r} + C_{k-2}^{k-r-1}\right) \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_2) + \\ + & \mathcal{L}^{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot C_{k-2}^0 \cdot \mathcal{L}^0(M_2). \end{aligned}$$

Напомним, что

$$C_{k-2}^{k-r} + C_{k-2}^{k-r-1} = C_{k-1}^{k-r}, \quad C_{k-2}^{k-2} = C_{k-1}^{k-1}, \quad C_{k-2}^0 = C_{k-1}^0,$$

тогда окончательно получаем

$$\mathcal{L}^{k-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right) = \sum_{r=1}^{k} \mathcal{L}^r(u) \cdot C_{k-1}^{k-r} \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_1) - \mathcal{L}^{k+1}(u) + \sum_{r=1}^{k} \mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot C_{k-1}^{k-r} \cdot \mathcal{L}^{k-r}(M_2).$$

А это и есть (6) при $s = k + 1$.

Итак, предположив, что (6) верно для $s = k$, мы доказали, что оно верно и для $s = k + 1$. Таким образом, методом математической индукции лемма доказана. $\square$

После этих вспомогательных утверждений мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in C^{\infty}$, u *— гармоническая функция в окрестности* Γ. *Пусть* $m \in \mathbf{N}$.

1. *Тогда производную порядка* m *функции* u *по переменной* x_1 *можно найти по формуле:*

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} = \sum_{s=1}^{m} \left(\mathcal{L}^s(u) \cdot Q_{s,0}^m + \mathcal{L}^{s-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot Q_{s-1,1}^m \right), \tag{7}$$

где

$$Q_{1,0}^1 = \rho_2, \quad Q_{0,1}^1 = \rho_1, \qquad (m = 1),$$

$$Q_{0,0}^{m-1} = Q_{-1,0}^{m-1} = Q_{-1,1}^{m-1} = 0 \qquad (\textit{сумма нижних индексов} \leqslant 0),$$

$$Q_{m,0}^{m-1} = Q_{m-1,1}^{m-1} = 0 \qquad (\textit{сумма нижних индексов больше верхнего индекса}).$$

$$Q_{s,0}^m = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(Q_{s,0}^{m-1} \right) - \rho_1 \cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot Q_{s-1,0}^{m-1} + \rho_1 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot Q_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_1),$$

$$Q_{s-1,1}^m = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(Q_{s-1,1}^{m-1} \right) + \rho_1 \cdot Q_{s-1,0}^{m-1} + \rho_2 \cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \rho_1 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot Q_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_2),$$

где $s = 1, \dots, m$; $m \geqslant 2$.

2. *Производную порядка* m *функции* u *по переменной* x_2 *можно найти по формуле:*

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_2^m} = \sum_{s=1}^{m} \left(\mathcal{L}^s(u) \cdot R_{s,0}^m + \mathcal{L}^{s-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot R_{s-1,1}^m \right), \tag{8}$$

где

$$R_{1,0}^1 = -\rho_1, \quad R_{0,1}^1 = \rho_2, \qquad (m = 1),$$

$$R_{0,0}^{m-1} = R_{-1,0}^{m-1} = R_{-1,1}^{m-1} = 0 \qquad (\textit{сумма нижних индексов} \leqslant 0),$$

$$R_{m,0}^{m-1} = R_{m-1,1}^{m-1} = 0 \qquad (\textit{сумма нижних индексов больше верхнего индекса}).$$

$$R_{s,0}^m = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(R_{s,0}^{m-1} \right) - \rho_1 \cdot R_{s-1,0}^{m-1} - \rho_2 \cdot R_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_1),$$

$$R_{s-1,1}^m = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(R_{s-1,1}^{m-1} \right) - \rho_1 \cdot R_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot R_{s-1,0}^{m-1} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_2),$$

где $s = 1, \dots, m$; $m \geqslant 2$.

3. *Пусть* $m_1 \in \mathbf{N}$, $m_2 \in \mathbf{N}$, m_2 *— четное число. Смешанную производную порядка* $m = m_1 + m_2$ *можно найти по формулам:*

$$\frac{\partial^{m_1+m_2} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} = (-1)^{\frac{m_2}{2}} \cdot \frac{\partial^{m_1+m_2} u}{\partial x_1^{m_1+m_2}}. \tag{9}$$

4. *Пусть $m_1 \in \mathbf{N}$, $m_2 \in \mathbf{N}$, m_2 — нечетное число. Смешанную производную порядка $m = m_1 + m_2$ можно найти по формулам:*

$$\frac{\partial^{m_1+m_2} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} = (-1)^{\frac{m_2-1}{2}} \cdot \sum_{s=1}^{m_1+m_2} \left(\mathcal{L}^s(u) \cdot P_{s,0}^m + \mathcal{L}^{s-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot P_{s-1,1}^m \right), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} P_{s,0}^m &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(P_{s,0}^{m-1} \right) - \rho_1 \cdot Q_{s-1,0}^{m-1} - \rho_2 \cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot Q_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s} (M_1), \\ P_{s-1,1}^m &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(Q_{s-1,1}^{m-1} \right) - \rho_1 \cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot Q_{s-1,0}^{m-1} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot Q_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s} (M_2), \end{aligned}$$

где $s = 1, \ldots, m$; $m = m_1 + m_2 \geqslant 2$.

Заметим, что везде выше считается, что $0 \notin \mathbf{N}$. Однако если в (9) и (10) положить $m_1 = 0$, $m_2 \geqslant 2$, то эти формулы являются еще одним способом для нахождения производной гармонической функции u порядка m_2 по переменной x_2, отличным от (8). Аналогичные формулы можно написать и для производной порядка $m_1 \geqslant 2$ по переменной x_1.

Доказательство.

1. Докажем (7). Воспользуемся методом математической индукции. При $m = 1$ формула (7) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \mathcal{L}(u) \cdot \rho_2 + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \rho_1,$$

что является истинным в силу леммы 1.

Так как рекуррентная формула для нахождения $Q_{s-k,k}^m$ верна при $m \geqslant 2$, то необходимо проверить истинность (7) и для $m = 2$. Итак, подставим $m = 2$ в (7), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \sum_{s=1}^{2} \left(\mathcal{L}^s(u) \cdot Q_{s,0}^2 + \mathcal{L}^{s-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot Q_{s-1,1}^2 \right) = \\ &= \mathcal{L}(u) \cdot Q_{1,0}^2 + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot Q_{0,1}^2 + \mathcal{L}^2(u) \cdot Q_{2,0}^2 + \mathcal{L} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot Q_{1,1}^2, \end{aligned}$$

где

$$Q_{1,0}^2 = \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} + \rho_1^2 \cdot M_1, \quad Q_{0,1}^2 = \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \rho_1^2 \cdot M_2, \quad Q_{2,0}^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2, \quad Q_{1,1}^2 = 2\rho_1\rho_2.$$

То есть при $m = 2$ формула (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} =& \mathcal{L}(u) \cdot \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} + \rho_1^2 \cdot M_1 \right) + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \rho_1^2 \cdot M_2 \right) + \\ &+ \mathcal{L}^2(u) \cdot \left(\rho_2^2 - \rho_1^2 \right) + \mathcal{L} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot 2\rho_1\rho_2. \end{aligned} \tag{11}$$

С другой стороны, из (1) и (5) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \mathcal{L}(u) \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \mathcal{L}^2(u) \cdot \rho_2^2 + \mathcal{L} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot 2\rho_1\rho_2 + \\ &+ \left(\mathcal{L}(u) \cdot M_1 + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot M_2 - \mathcal{L}^2(u) \right) \cdot \rho_1^2. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получим (11).

Таким образом, при $m = 2$ мы также получаем истинное высказывание.

Предположим, что (7) верно при некотором $m \geqslant 2$. Найдем производную функции $\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_1^{m+1}}$:

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_1^{m+1}} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{s=1}^{m}\left(\mathcal{L}^s(u)\cdot Q^m_{s,0} + \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot Q^m_{s-1,1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot Q^m_{s,0} + \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s,0}\right) + \tag{12}$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q^m_{s-1,1} + \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s-1,1}\right). \tag{13}$$

Преобразуем первую сумму в (12). Найдем $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^s(u)\right) = \left(\rho_2\cdot\mathcal{L} + \rho_1\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\right)\left(\mathcal{L}^s(u)\right) = \mathcal{L}^{s+1}(u)\cdot\rho_2 + \mathcal{L}^s\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1.$$

Тогда 1-я сумма в (12) примет вид:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot Q^m_{s,0} &= \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s+1}(u)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s,0} + \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s,0} = \\ &= \sum_{s=2}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-1,0} + \sum_{s=2}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-1,0}.\end{aligned}$$

Так как $Q^m_{0,0} = 0$ (сумма нижних индексов равна 0), то

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot Q^m_{s,0} = \sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-1,0} + \sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-1,0}.$$

Учитывая, что $Q^m_{m+1,0} = 0$ (сумма нижних индексов больше верхнего), 2-ю сумму в (12) запишем в виде:

$$\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s,0}\right) = \sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s,0}\right).$$

Преобразуем 3-ю сумму в (12). Найдем $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right) &= \left(\rho_2\cdot\mathcal{L} + \rho_1\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right) = \\ &= \rho_2\cdot\mathcal{L}^s\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) + \rho_1\cdot\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right).\end{aligned}$$

Тогда 3-ю сумму в (12) запишем как

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q^m_{s-1,1}=\\
=\ &\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-1,1}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-1,1}=\\
=\ &\sum_{s=2}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\sum_{s=2}^{m+1}\mathcal{L}^{s-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}=\\
=\ &\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}.
\end{aligned}$$

Первую сумму последнего выражения оставим без изменений, а вторую сумму преобразуем, воспользовавшись леммой 3:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q^m_{s-1,1}=\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\\
+\ &\sum_{s=1}^{m+1}\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}\cdot\sum_{r=1}^{s-1}C^{s-r-1}_{s-2}\cdot\left(\mathcal{L}^{r}(u)\cdot\mathcal{L}^{s-r-1}(M_1)+\mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\mathcal{L}^{s-r-1}(M_2)\right)-\\
-\ &\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}.
\end{aligned}$$

Так как $\sum\limits_{s=1}^{m+1}\sum\limits_{r=1}^{s-1}a^r_s=\sum\limits_{r=1}^{m}\sum\limits_{s=r+1}^{m+1}a^r_s=\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{r=s}^{m}a^s_{r+1}$, то во 2-й строчке последнего выражения поменяем местами суммы и сделаем замену $r=s_{\text{новое}}$, $s=r_{\text{новое}}+1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q^m_{s-1,1}=\\
=\ &\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{r-s}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}(M_1)+\\
+\ &\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{r-s}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}(M_2)-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что $Q^m_{m,1}=0$ (сумма нижних индексов больше верхнего), и напомним, что $C^{r-s}_{r-1}=C^{(r-1)-(s-1)}_{r-1}=C^{s-1}_{r-1}$. Тогда 3-я сумма в (12) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q^m_{s-1,1}=\\
=\ &\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{s-1}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}(M_1)+\\
+\ &\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{s-1}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}(M_2)-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}.
\end{aligned}$$

4-ю сумму в (12) запишем в виде:

$$\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s-1,1}\right)=\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s-1,1}\right).$$

Подставим преобразованные суммы в (12), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_1^{m+1}} &= \sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-1,0}+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-1,0}+\\&+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s,0}\right)+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\\&+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{s-1}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_1\right)+\\&+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{s-1}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_2\right)-\\&-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s-1,1}\right)=\\&=\sum_{s=1}^{m+1}\left(\mathcal{L}^s(u)\cdot q^{m+1}_{s,0}+\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot q^{m+1}_{s-1,1}\right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}q^{m+1}_{s,0} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s,0}\right)-\rho_1\cdot Q^m_{s-2,1}+\rho_2\cdot Q^m_{s-1,0}+\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{s-1}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_1\right),\\q^{m+1}_{s-1,1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q^m_{s-1,1}\right)+\rho_1\cdot Q^m_{s-1,0}+\rho_2\cdot Q^m_{s-2,1}+\rho_1\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{s-1}_{r-1}\cdot Q^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_2\right).\end{aligned}$$

Легко увидеть, что $q^{m+1}_{s,0}=Q^{m+1}_{s,0}$, $q^{m+1}_{s-1,1}=Q^{m+1}_{s-1,1}$, то есть

$$\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_1^{m+1}}=\sum_{s=1}^{m+1}\left(\mathcal{L}^s(u)\cdot Q^{m+1}_{s,0}+\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot Q^{m+1}_{s-1,1}\right)\text{ — получили (7).}$$

Итак, предположив, что (7) верно для какого-то $m\geqslant 2$, мы доказали, что оно верно и для $m+1$. Таким образом, методом математической индукции (7) доказано.

2. Доказательство (8) проведем аналогичным способом. Воспользуемся методом математической индукции. При $m=1$ формула (8) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\mathcal{L}(u)\cdot\rho_1+\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\rho_2.$$

Истинность этого утверждения была доказана в лемме 1.

При $m=2$ из (8) получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \sum_{s=1}^{2}\left(\mathcal{L}^s(u)\cdot R^2_{s,0}+\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot R^2_{s-1,1}\right)=\\&=\mathcal{L}(u)\cdot R^2_{1,0}+\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot R^2_{0,1}+\mathcal{L}^2(u)\cdot R^2_{2,0}+\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot R^2_{1,1},\end{aligned}$$

где

$$R^2_{1,0}=-\frac{\partial\rho_1}{\partial x_2}+\rho_2^2\cdot M_1,\quad R^2_{0,1}=\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2}+\rho_2^2\cdot M_2,\quad R^2_{2,0}=\rho_1^2-\rho_2^2,\quad R^2_{1,1}=-2\rho_1\rho_2.$$

То есть при $m=2$ формула (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=&\mathcal{L}(u)\cdot\left(-\frac{\partial\rho_1}{\partial x_2}+\rho_2^2\cdot M_1\right)+\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2}+\rho_2^2\cdot M_2\right)+\\&+\mathcal{L}^2(u)\cdot\left(\rho_1^2-\rho_2^2\right)-\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot 2\rho_1\rho_2.\end{aligned}\tag{14}$$

С другой стороны, из (1) и (5) найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\ &=\ -\mathcal{L}(u)\cdot\frac{\partial\rho_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2}+\mathcal{L}^2(u)\cdot\rho_1^2-\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot 2\rho_1\rho_2+\\&+\ \left(\mathcal{L}(u)\cdot M_1+\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\cdot M_2-\mathcal{L}^2(u)\right)\cdot\rho_2^2.\end{aligned}$$

После элементарных преобразований получим (14).

Таким образом, при $m=2$ мы также получаем истинное высказывание.

Предположим, что (8) верно при некотором $m\geqslant 2$. Найдем производную функции $\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_2^{m+1}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_2^{m+1}}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_2^m}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{s=1}^{m}\left(\mathcal{L}^s(u)\cdot R^m_{s,0}+\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot R^m_{s-1,1}\right)\right)=\\=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot R^m_{s,0}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(R^m_{s,0}\right)+\end{aligned}\tag{15}$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\right)\cdot R^m_{s-1,1}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(R^m_{s-1,1}\right).\tag{16}$$

Преобразуем первую сумму в (15). Найдем $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)=\left(-\rho_1\cdot\mathcal{L}+\rho_2\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\right)\left(\mathcal{L}^s(u)\right)=-\mathcal{L}^{s+1}(u)\cdot\rho_1+\mathcal{L}^s\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2.$$

Тогда 1-я сумма в (15) примет вид:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot R^m_{s,0}\ &=\ -\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s+1}(u)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s,0}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s,0}=\\&=\ -\ \sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s-1,0}+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s-1,0}.\end{aligned}$$

2-ю сумму в (15) запишем в виде:

$$\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(R^m_{s,0}\right)=\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(R^m_{s,0}\right).$$

Преобразуем 3-ю сумму в (15). Найдем $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right) &= \left(-\rho_1\cdot\mathcal{L}+\rho_2\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right) = \\ &= -\mathcal{L}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1+\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_2.\end{aligned}$$

Тогда 3-ю сумму в (15) запишем как

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot R^m_{s-1,1} = \\ -&\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s-1,1}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s-1,1} = \\ =\ &-\sum_{s=2}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s-2,1}+\sum_{s=2}^{m+1}\mathcal{L}^{s-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s-2,1} = \\ =\ &-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s-2,1}+\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s-2,1}.\end{aligned}$$

Первую сумму последнего выражения оставим без изменений, а вторую сумму преобразуем, воспользовавшись леммой 3:

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot R^m_{s-1,1} = \\ =\ &-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s-2,1}+ \\ +\ &\sum_{s=1}^{m+1}\rho_2\cdot R^m_{s-2,1}\cdot\sum_{r=1}^{s-1}C^{s-r-1}_{s-2}\cdot\left(\mathcal{L}^{r}(u)\cdot\mathcal{L}^{s-r-1}\left(M_1\right)+\mathcal{L}^{r-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\mathcal{L}^{s-r-1}\left(M_2\right)\right)- \\ -\ &\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s-2,1}.\end{aligned}$$

Так как $\sum\limits_{s=1}^{m+1}\sum\limits_{r=1}^{s-1}a^r_s=\sum\limits_{r=1}^{m}\sum\limits_{s=r+1}^{m+1}a^r_s=\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{r=s}^{m}a^s_{r+1}$, то во 2-й строчке последнего выражения поменяем местами суммы и сделаем замену $r=s_{\text{новое}}$, $s=r_{\text{новое}}+1$:

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot R^m_{s-1,1} = \\ =\ &-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot R^m_{s-2,1}+\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_2\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{r-s}_{r-1}\cdot R^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_1\right)+ \\ +\ &\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot\sum_{r=s}^{m}C^{r-s}_{r-1}\cdot R^m_{r-1,1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_2\right)-\sum_{s=1}^{m+1}\mathcal{L}^{s}(u)\cdot\rho_2\cdot R^m_{s-2,1}.\end{aligned}$$

Заметим, что $R^m_{m,1}=0$ (сумма нижних индексов больше верхнего), и воспользуемся тем, что $C_{r-1}^{r-s} = C_{r-1}^{(r-1)-(s-1)} = C_{r-1}^{s-1} =$. Тогда 3-я сумма в (15) запишется в виде:

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right) \cdot R_{s-1,1}^{m} =$$

$$= -\sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \rho_1 \cdot R_{s-2,1}^{m} + \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s}(u) \cdot \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_1) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_2) - \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s}(u) \cdot \rho_2 \cdot R_{s-2,1}^{m}.$$

4-ю сумму в (15) запишем в виде:

$$\sum_{s=1}^{m} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{s-1,1}^{m}\right) = \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{s-1,1}^{m}\right).$$

Подставим преобразованные суммы в (15), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_2^{m+1}} = & - \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s}(u) \cdot \rho_1 \cdot R_{s-1,0}^{m} + \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \rho_2 \cdot R_{s-1,0}^{m} + \\
& + \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s}(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{s,0}^{m}\right) - \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \rho_1 \cdot R_{s-2,1}^{m} + \\
& + \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s}(u) \cdot \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_1) + \\
& + \sum_{s=1}^{m} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m+1} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_2) - \\
& - \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s}(u) \cdot \rho_2 \cdot Q_{s-2,1}^{m} + \sum_{s=1}^{m+1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{s-1,1}^{m}\right) = \\
& = \sum_{s=1}^{m+1} \left(\mathcal{L}^{s}(u) \cdot R_{s,0}^{m+1} + \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot R_{s-1,1}^{m+1}\right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{s,0}^{m+1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{s,0}^{m}\right) - \rho_1 \cdot R_{s-1,0}^{m} - \rho_2 \cdot R_{s-2,1}^{m} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_1), \\
R_{s-1,1}^{m+1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{s-1,1}^{m}\right) - \rho_1 \cdot R_{s-2,1}^{m} + \rho_2 \cdot R_{s-1,0}^{m} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m} C_{r-1}^{s-1} \cdot R_{r-1,1}^{m} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_2).
\end{aligned}$$

То есть получили (8).

Итак, предположив, что (8) верно для какого-то $m \geqslant 2$, мы доказали, что оно верно и для $m+1$. Таким образом, методом математической индукции (8) доказано.

3. Докажем (9) также методом математической индукции. Пусть m_2 — четное число. Напомним, что u — гармоническая функция, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

Тогда при $m_2 = 2$ получаем истинное высказывание:

$$\frac{\partial^{m_1+2}u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^2} = \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) = -\frac{\partial^{m_1+2}u}{\partial x_1^{m_1+2}}.$$

Пусть (9) верно для некоторого четного m_2. Покажем, что оно верно и для $m_2 + 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m_1+m_2+2}u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2+2}} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2}u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left((-1)^{\frac{m_2}{2}}\cdot\frac{\partial^{m_1+m_2}u}{\partial x_1^{m_1+m_2}}\right) = \\ &= (-1)^{\frac{m_2}{2}}\cdot\frac{\partial^{m_1+m_2}u}{\partial x_1^{m_1+m_2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = (-1)^{\frac{m_2+2}{2}}\cdot\frac{\partial^{m_1+m_2+2}u}{\partial x_1^{m_1+m_2+2}},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, методом математической индукции (9) доказано.

4. Докажем (10). Пусть m_2 — некоторое нечетное число. Используя (9) и (7), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m_1+m_2}u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{m_1+(m_2-1)}u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left((-1)^{\frac{m_2-1}{2}}\cdot\frac{\partial^{m_1+m_2-1}u}{\partial x_1^{m_1+m_2-1}}\right) = \\ &= (-1)^{\frac{m_2-1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{s=1}^{m-1}\left(\mathcal{L}^s(u)\cdot Q_{s,0}^{m-1} + \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot Q_{s-1,1}^{m-1}\right)\right) = \\ &= (-1)^{\frac{m_2-1}{2}}\cdot\left(\sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot Q_{s,0}^{m-1} + \sum_{s=1}^{m-1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s,0}^{m-1}\right) + \right. \qquad (17)\\ &\left. + \sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q_{s-1,1}^{m-1} + \sum_{s=1}^{m-1}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s-1,1}^{m-1}\right)\right). \qquad (18)\end{aligned}$$

1-ю сумму в (17) запишем в виде:

$$\sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^s(u)\right)\cdot Q_{s,0}^{m-1} = -\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_1\cdot Q_{s-1,0}^{m-1} + \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot Q_{s-1,0}^{m-1}.$$

2-я сумма в (17) запишется как

$$\sum_{s=1}^{m-1}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s,0}^{m-1}\right) = \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s,0}^{m-1}\right).$$

Преобразуем 3-ю сумму в (17) следующим образом:

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)\cdot Q_{s-1,1}^{m-1} = \\ -\ &\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_1\cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_2\cdot\sum_{r=s}^{m-1}C_{r-1}^{s-1}\cdot Q_{r-1,1}^{m-1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_1\right) + \\ +\ &\sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\cdot\rho_2\cdot\sum_{r=s}^{m-1}C_{r-1}^{s-1}\cdot Q_{r-1,1}^{m-1}\cdot\mathcal{L}^{r-s}\left(M_2\right) - \sum_{s=1}^{m}\mathcal{L}^s(u)\cdot\rho_2\cdot Q_{s-2,1}^{m-1}\end{aligned}$$

4-я сумма в (17) примет вид:

$$\sum_{s=1}^{m-1} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s-1,1}^{m-1}\right) = \sum_{s=1}^{m} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s-1,1}^{m-1}\right).$$

Подставим преобразованные суммы в (17), получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m_1+m_2} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} = (-1)^{\frac{m_2-1}{2}} \cdot \sum_{s=1}^{m} \mathcal{L}^{s}(u) \times \\
\times \ & \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s,0}^{m-1}\right) - \rho_1 \cdot Q_{s-1,0}^{m-1} - \rho_2 \cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot Q_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_1)\right) + \\
+ \ & (-1)^{\frac{m_2-1}{2}} \cdot \sum_{s=1}^{m} \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \times \\
\times \ & \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_{s-1,1}^{m-1}\right) - \rho_1 \cdot Q_{s-2,1}^{m-1} + \rho_2 \cdot Q_{s-1,0}^{m-1} + \rho_2 \cdot \sum_{r=s}^{m-1} C_{r-1}^{s-1} \cdot Q_{r-1,1}^{m-1} \cdot \mathcal{L}^{r-s}(M_2)\right) = \\
= \ & (-1)^{\frac{m_2-1}{2}} \cdot \sum_{s=1}^{m} \left(\mathcal{L}^{s}(u) \cdot P_{s,0}^{m} + \mathcal{L}^{s-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) \cdot P_{s-1,1}^{m}\right),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Список литературы

[1] Ходос О.В. *Об условиях гармонического продолжения гладких функций в фиксированную область*/ О.В.Ходос // Комплексный анализ и математическая физика. – Красноярск: КрасГУ, 1998. – С. 225-231.