УДК 517.95

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

**А.А. Шлапунов***

*В настоящей работе с помощью итераций интегралов Грина изучается задача Коши для эллиптических комплексов с постоянными коэффициентами. Например, для комплексов, состоящих из однородных операторов одного и того же порядка, скажем $m \geq 1$, представленный метод позволяет не только получить условия разрешимости задачи Коши, но и построить формулы для ее $H^m$-решений, если только такие решения существуют. Решения даются в виде суммы ряда, слагаемые которого суть итерации псевдодифференциальных операторов, построенные с помощью специальных фундаментальных решений лапласианов комплекса. Для комплекса Дольбо эти операторы сродни интегралу Мартинелли-Бохнера-Коппельмана.*

Пусть $E_i = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{k_i}$ – тривиальные векторные расслоения над $\mathbb{R}^n$ $(0 \leq i \leq N < \infty)$, а $\{A_i, E_i\}$ – эллиптический комплекс (линейных) дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. В настоящей работе изучается задача Коши на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ для таких комплексов (ср., например, [1], §19). В частности, при $i = 0$ она превращается в хорошо известную и важную для приложений некорректную задачу Коши для систем с инъективным символом (см., например, [2] и библиографию к ней).

Для этого предлагается использовать итерации интегралов Грина (ср. [3] для комплекса Дольбо или [4] для $i = 0$). Например, для комплексов, состоящих из однородных операторов одного и того же порядка, скажем $m \geq 1$, этот метод позволяет не только получить условия разрешимости задачи Коши, но и построить формулы для ее $H^m$-решений, если только такие решения существуют. Решения даются в виде суммы ряда, слагаемые которого суть итерации псевдодифференциальных операторов, построенные с помощью специальных фундаментальных решений лапласианов комплекса. Для комплекса Дольбо эти операторы сродни интегралу Мартинелли-Бохнера-Коппельмана (ср. [3], [5]).

## 1. Интегралы Грина для эллиптических комплексов

Зафиксировав $i \geq 0$, будем изучать комплекс $\{A_i, E_i\}$ в степени $i$. Предположим, что операторы $A_i$ и $A_{i-1}$ являются однородными и имеют один и тот же порядок $m \geq 1$, т.е.

$$A_i = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha^{(i)} D^\alpha, \qquad A_{i-1} = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha^{(i-1)} D^\alpha,$$

где $A_\alpha^{(i)}$ – матрицы над полем $\mathbb{C}$. Кроме того, предположим, что $n < 2m$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-00167.

* © А.А. Шлапунов, Красноярский государственный университет, e-mail: shlapuno@lan.krasu.ru, 2003

Обозначим через $A^*_{i-1} \in \mathrm{Diff}_m(E_i \to E_{i-1})$ – формально сопряженный для $A_{i-1}$, т.е $A^*_{i-1} = \sum_{|\alpha|=m} \left(A^{(i-1)}_\alpha\right)^* D^\alpha$ (здесь $\mathrm{Diff}_m(E \to F)$ множество всех дифференциальных операторов порядка $\le m$ между расслоениями $E$ и $F$, а $\left(A^{(i-1)}_\alpha\right)^*$ – сопряженная матрице $A^{(i-1)}_\alpha$). Так как комплекс $\{A_i, E_i\}$ эллиптичен, то при описанных выше условиях (главный) символ оператора $\mathfrak{A}_i = A_i + A^*_{i-1} \in \mathrm{Diff}_m(E_i \to E_{i+1} \oplus E_{i-1})$ инъективен, а значит, лапласиан $\Delta_i = A^*_i A_i + A_{i-1}A^*_{i-1} \in \mathrm{Diff}_{2m}(E_i \to E_i)$ эллиптичен, однороден и имеет постоянные коэффициенты. Отметим, что в силу эллиптичности комплекса при $i = 0$ оператор $\mathfrak{A}_0 = A_0$ всегда имеет инъективный символ.

Обозначим через $L^2(X, E_i)$ пространство Лебега сечений расслоения $E_i$ над открытым множеством $X \subset \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\int_X (u,v)_x dx$, где $dx$ – стандартная форма объема в $\mathbb{R}^n$, а $(u,v)_x = \sum_{s=1}^{k_i} \overline{v}_s(x)u_s(x)$. Кроме того, через $H^m(X, E_i)$ обозначим соответствующее пространство Соболева обобщенных векторных функций, у которых слабые производные до порядка $m$ принадлежат $L^2(X, E_i)$.

Пусть $\tilde{\Gamma}$ – замкнутая (бесконечно) гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, а $\Gamma$ – замыкание какого-нибудь ее (возможно пустого) открытого подмножества с гладкой границей $\partial\Gamma$. Будем трактовать $Y = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ как многообразие с разрезом вдоль $\Gamma$ (см., например, [3] в случае комплекса Дольбо или [4] в более общей ситуации).

В случае $\Gamma = \emptyset$ обозначим через $\Phi_i$ стандартное фундаментальное решение сверточного типа для $\Delta_i$, равное нулю в бесконечности (см., например, [6]).

Если же $\Gamma \ne \emptyset$, то рассмотрим задачу Дирихле для оператора $\Delta_i$ в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$: *по заданным векторным функциям $u_j$ $(0 \le j \le m-1)$ на $\Gamma$ найти такую векторную функцию $u$, что*

$$\begin{cases} \Delta_i u = 0 & \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \Gamma; \\ \frac{\partial^j u}{\partial n^j} = u_j & \text{на} \quad \Gamma \qquad (0 \le j \le m-1); \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

*где $\frac{\partial^j}{\partial n^j}$ суть $j$-тая нормальная производная относительно* $\tilde{\Gamma}$ (ср. [7] для оператора Лапласа на плоскости с разрезами). Поскольку оператор $\Delta_i$ эллиптичен, а его коэффициенты постоянны, то по теореме Петровского все решения уравнения $\Delta_i u = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ вещественно аналитичны.

Хорошо известно, что разрешимость задачи (1) существенно зависит от асимптотики решений вблизи границы множества $\Gamma$ (ср. [4]). Мы будем искать решение задачи (1) в классе Соболева $H^m(B \setminus \Gamma)$, где $B = B(0,R)$ – шар с центром в нуле достаточно большого радиуса в $\mathbb{R}^n$, чтобы $\Gamma \Subset B$. Отметим, что, используя разложение в "ряд Лорана" для решений эллиптических систем (см. [6], теорема 7.25), легко видеть, что при $n > 4m$ такое решение $u$ принадлежит пространству $H^m(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$. При $2m < n \le 4m$ это не так, однако условие на бесконечности означает, что производные $u$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Выбор класса Соболева $H^m(B \setminus \Gamma)$ для решений задачи (1) диктует нам пространства, которым принадлежат данные Дирихле $\oplus u_j$. Пусть $H^{m-j-1/2}(\tilde{\Gamma})$ будут определенные обычным образом пространства Соболева с нецелыми показателями гладкости на $\tilde{\Gamma}$. Тогда

$$H^{m-j-1/2}(\Gamma) = \frac{H^{m-j-1/2}(\tilde{\Gamma})}{\{v \in H^{m-j-1/2}(\tilde{\Gamma}) : v = 0 \text{ на } \Gamma\}}.$$

Обозначим через $H^m_\Gamma(B, E_i)$ пополнение функций класса $C^\infty(E_i)$, равных нулю в окрестности $\Gamma$, по норме пространства $H^m(B, E_i)$. Как следует из одного результата Хедберга [8], пространство $H^m_\Gamma(B, E_i)$ состоит из всех элементов пространства $H^m(B, E_i)$, равных нулю на Г. Известно, что $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ можно трактовать как $\dfrac{H^m(B,E_i)}{H^m_\Gamma(B,E_i)}$ (ср. [4]).

**Лемма 1.** *Пусть* $\oplus_{j=0}^{m-1} u_j \in \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma, E_{i|\tilde\Gamma})$ *Тогда задача Дирихле* (1) *имеет одно и только одно решение в классе Соболева* $H^m(B\setminus\Gamma)$. *Более того, существует такая постоянная* $C>0$ *(не зависящая от* $\oplus u_j$*), что*

$$H_m(u,u) \le C \sum_{j=0}^{m-1} ||u_j||^2_{H^{m-j-1/2}(\Gamma, E_{i|\tilde\Gamma})}, \tag{2}$$

$$H_m(u,v) = (u,v)_{H^m(B(0,3R),E_i)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u, D^\alpha v)_x\, dx.$$

**Доказательство.** Для решения $u$ с нулевыми данными Дирихле $\oplus u_j$, интегрируя по частям и учитывая поведение решения в бесконечно удаленной точке, получаем

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_i u, u)_x dx = \int_{\mathbb{R}^n} ((A_i + A^*_{i-1})u, (A_i + A^*_{i-1})u)_x dx.$$

Значит, можно заключить, что решение однородной задачи (1) удовлетворяет

$$\begin{cases} (A_i + A^*_{i-1})u = 0 & \text{в} & \mathbb{R}^n \setminus \Gamma; & \\ \frac{\partial^j u}{\partial n^j} = 0 & \text{на} & \Gamma & (0 \le j \le m-1); \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, & u \in H^m(B\setminus\Gamma, E_i). & & \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку задача Коши (3) имеет не более одного решения (см., например, [2]), это означает, что задача Дирихле имеет не более одного решения в классе Соболева $H^m(B\setminus\Gamma)$.

Далее, положим

$$t_i = \oplus_{j=0}^{m-1} \frac{\partial^j}{\partial n^j}.$$

По теореме Уитни, найдется такая векторная функция $\tilde u \in H^m(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma, E_i)$, что 1) $t(\tilde u) = \oplus u_j$; 2) $\tilde u = 0$ вне круга $\tilde B = B(0,2R) \supset B$; 3)

$$||\tilde u||_{H^m(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma, E_i)} \le \sum_{j=0}^{m-1} ||u_j||_{H^{m-j-1/2}(\Gamma, E_{i|\tilde\Gamma})}.$$

Рассмотрим подпространство $\tilde H^m_\Gamma(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma, E_i)$, состоящее из функций $u \in H^m_\Gamma(B\setminus\Gamma, E_i)$, удовлетворяющих $\Delta_i u = 0$ в $\mathbb{R}^n\setminus\tilde B$ и равных нулю в бесконечно удаленной точке. Легко проверить, что $\tilde H^m_\Gamma(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma, E_i)$ есть пространство Гильберта, если его снабдить скалярным произведением $H_m(.,.)$.

В самом деле, пусть $\{u_\nu\} \subset \tilde H^m_\Gamma(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma, E_i)$ есть последовательность, фундаментальная относительно $H_m(.,.)$. Положим $\mathfrak{D}_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \\ \dots \\ \frac{\partial^m}{\partial x_n^m} \end{pmatrix}$. Тогда $\{u_\nu\}$ фундаментальна в $H^m(B(0,3R), E_i)$, а значит, сходится в этом пространстве к сечению $u^{(\infty)}$. В частности, $\Delta_i u^{(\infty)} = 0$ в $B(0,3R) \setminus \overline{B(0,2R)}$. Кроме того, $\{\mathfrak{D}_m u_\nu\}$ фундаментальна в $[L^2(\mathbb{R}^n, E_i)]^n$, а значит, сходится в этом пространстве к сечению $f = (f_1, \ldots, f_n)$, компоненты которого принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n, E_i)$. Поскольку коэффициенты оператора $\Delta_i$ постоянны, то для всех $1 \le j \le n$ мы имеем $\Delta_i f_j = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}$. Оператор $\mathfrak{D}_m$ имеет инъективный символ и постоянные коэффициенты, поэтому, как легко сообразить, найдется такое сечение $v \in H^m_{loc}(\mathbb{R}^n, E_i)$, что $\mathfrak{D}_m v = f$ в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что все решения уравнения $\mathfrak{D}_m v = f$ отличаются на произвольный многочлен степени $m-1$. В частности, поскольку $\mathfrak{D}_m u^{(\infty)} = f$ в $B(0,3R)$, то по теореме единственности для вещественно аналитических функций сечение $u^{(\infty)}$ продолжается как решение уравнения $\Delta_i u^{(\infty)} = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}$ и уравнения $\mathfrak{D}_m u^{(\infty)} = f$ в $\mathbb{R}^n$. Отметим также, что $u^{(\infty)}$ есть единственное решение уравнения $\mathfrak{D}_m u^{(\infty)} = f$ в с нулевыми данными Дирихле на $\Gamma$. Осталось убедиться, что $u^{(\infty)}$ равно нулю в бесконечно удаленной точке. С этой целью заметим, что из разложения в ряд "Лорана" для решений эллиптических систем (см. [6], теорема 7.25) вытекают следующие тождества ($\nu \ge 1$):

$$u_\nu(x) = \int_{|y|=5R/2} G_{\mathfrak{A}_i}({}^t\mathfrak{A}_i^* \Phi_i(x-.), u_\mu) + \int_{|y|>5R/2} < \mathfrak{A}_i^* \Phi_i(x-.), \mathfrak{A}_i u_\mu >_y dy, \qquad (4)$$

где $5R/2 < |x| < 3R$, а $G_{\mathfrak{A}_i}$ - оператор Грина для $\mathfrak{A}_i$ (см. [1]). В силу априорных оценок для эллиптических систем сходимость в пространстве Соболева $H^m(B(0,3R), E_i)$ влечет за собой и поточечную сходимость в слое $5R/2 < |x| < 3R$. Переходя к пределу в (4), мы получаем для $5R/2 < |x| < 3R$

$$u^{(\infty)}(x) = \int_{|y|=5R/2} G_{\mathfrak{A}_i}({}^t\mathfrak{A}_i^* \Phi_i(x-.), u^{(\infty)}) + \int_{|y|>5R/2} < \mathfrak{A}_i^* \Phi_i(x-.), f >_y dy. \qquad (5)$$

В частности, по теореме единственности для вещественно аналитических функций, $u^{(\infty)}$ имеет вид (5) в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. $u^{(\infty)}(\infty) = 0$.

Следующий шаг - доказательство того, что эрмитова форма

$$\tilde{H}_m(u,v) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u, D^\alpha v)_x \, dx$$

определяет на $\tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ скалярное произведение, топологически эквивалентное $H_m(.,.)$. Оно проводится стандартным образом - от противного. В самом деле, очевидно, $\tilde{H}_m(.,.)$ не сильнее, чем $H_m(.,.)$. Предположим, что нет такой постоянной $Q$, что $H_m(u,u) \le Q\tilde{H}_m(u,u)$ для всех $u \in \tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$. Тогда существует последовательность $\{u_\nu\}$ в $\tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ такая, что

$$H_m(u_\nu, u_\nu) = 1, \qquad \tilde{H}(u_\nu, u_\nu) < 2^{-\nu}. \qquad (6)$$

Поскольку единичный шар в сепарабельном пространстве Гильберта слабо компактен, то мы можем считать, что $\{u_\nu\}$ слабо сходится к сечению $u_\infty \in \tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$. Тогда

$$\int (u_\infty, \mathfrak{D}_m^* v)_x \, dx = \lim_{\nu\to\infty} \int (u_\nu, \mathfrak{D}_m^* v)_x \, dx = \lim_{\nu\to\infty} \int (\mathfrak{D}_m u_\nu, v)_x \, dx = 0$$

для всех $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$, т.е. $u_\infty$ есть многочлен степени $m-1$, равный нулю на $\Gamma$. Следовательно, $u_\infty = 0$. Однако из неравенств (6) вытекает, что

$$1 \le 2^{-\nu+1} + ||u_\nu||_{H^{m-1}(B(0,3R),E_i)}$$

для всех $\nu$. Поскольку включение $H^m(B(0,3R),E_i) \hookrightarrow H^{m-1}(B(0,3R),E_i)$ компактно, то $\{u_\nu\}$ сходится сильно к $u_\infty$ в $H^{m-1}(B(0,3R),E_i)$. Значит, $||u_\infty||_{H^{m-1}(B(0,3R),E_i)} \geq 1$, что противоречит $u_\infty = 0$.

Теперь решение задачи Дирихле (1) ищем в виде $u = \tilde{u}+w$, где $w \in \tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ удовлетворяет

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{A}_i w, \mathfrak{A}_i v)_x dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{A}_i \tilde{u}, \mathfrak{A}_i v)_x dx \tag{7}$$

для всех $v \in \tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$.

Поскольку символ оператора $\mathfrak{A}_i$ инъективен, то с некоторыми положительными постоянными $C_1, C_2$ (не зависящими от $\zeta$) $C_1|\zeta|^{2m}|v|^2 \leq |\sigma(\mathfrak{A}_i)(\zeta)v|^2 \leq C_2\,|\zeta|^{2m}|v|^2$ для всех $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $v \in \mathbb{C}^{k_i}$.

В частности, это означает, что эрмитова форма $\int_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{A}_i w, \mathfrak{A}_i v)_x dx$ определяет на $\tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ скалярное произведение, топологически эквивалентное $\tilde{H}_m(.,.)$ (и $H_m(.,.)$!) .

Значит, по теореме об общем виде линейного функционала на пространствах Гильберта, существует единственное решение $w \in \tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ задачи Дирихле (7).

Следовательно, существует и единственное решение задачи Дирихле (1); а именно $u = \tilde{u} + w \in \tilde{H}^m(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$. По теореме о следах, $\sum_{j=0}^{m-1} ||u_j||^2_{H^{m-j-1/2}(\Gamma, E_i|_{\partial D})} \leq \tilde{C}_1 H_m(u,u)$ (с некоторой постоянной $\tilde{C}_1 > 0$, не зависящей от $u$). Осталось применить теорему Банаха об обратном отображении, чтобы получить оценку (2). $\square$

**Замечание 1.** *Из леммы* 1 *следует, что задача Дирихле обладает функцией Грина, скажем, $\Phi_i^{(\Gamma)}$, которая является псевдодифференциальным оператором порядка $(-2m)$ на относительно компактных открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ и равна нулю в бесконечности. Она строится стандартным образом: $\Phi_i^{(\Gamma)}(x,y) = \Phi_i(x-y) - \gamma(x,y)$, где $\gamma(x,y)$ – решение задачи Дирихле* (1) *с данными $\oplus u_{j,y}(x) = \frac{\partial^j \Phi_i(x-y)}{\partial n^j}$ (здесь $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ – параметр). Кроме того, из построения видно (см. равенство* (7)*), что ядро $\Phi_i^{(\Gamma)}(.,.)$ индуцирует линейный непрерывный оператор*

$$\Phi_i^{(\Gamma)} : \tilde{H}^{-m}_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i) \to \tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$$

*такой, что $\Delta_i \Phi_i^{(\Gamma)} = I$, $\Phi_i^{(\Gamma)}\Delta_i = I$ (здесь $\tilde{H}^{-m}_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ – двойственное к $\tilde{H}^m_\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$ относительно спаривания в $L^2(\mathbb{R}^n, E_i)$, ср.* [4]*).*

Пусть теперь $D \Subset \mathbb{R}^n$ будет область (т.е. открытое связное множество), а $\Lambda^r$ будет расслоение комплекснозначных внешних дифференциальных форм степени $r$ ($r = 0, 1, \dots$) (будем считать, что шар $\bar{B}$ содержит замыкание области $D$).

Для $u \in C^\infty(E_i)$, $w \in C^\infty(E_{i-1})$, $g \in C^\infty(E_{i+1})$, равных нулю в окрестности $\Gamma$, положим

$$(\mathcal{G}^{(i,1)}u)(x) = -\int_{\partial D} G_{A_i}({}^tA_i^*\Phi_i^{(\Gamma)}(x,.),u),$$

$$(\mathcal{G}^{(i,2)}u)(x) = -\int_{\partial D} G_{A_{i-1}^*}({}^tA_{i-1}\Phi_i^{(\Gamma)}(x,.),u),$$

$$\mathcal{G}^{(i)} = \mathcal{G}^{(i,1)} + \mathcal{G}^{(i,2)},$$

$$(T^{(i,1)}f)(x) = \int_D < {}^tA_i^*\Phi_i^{(\Gamma)}(x,.), f >_{x,i+1} dx,$$

$$(T^{(\imath,2)})w(x) = \int_D < {}^tA_{\imath-1}\Phi_\imath^{(\Gamma)}(x,.), w >_{x,\imath-1} dx,$$

где $\chi_D$ – характеристическая функция области $D$, $< .,. >_{x,\imath}$ – естественное спаривание между элементами расслоения $E_\imath$ и дуального ему расслоения $E_\imath^*$, ${}^tB \in \mathrm{Diff}_m(F^* \to E^*)$ – транспонированный оператор, а $G_B(.,.) \in \mathrm{Diff}_{m-1}((F^*, E) \to \Lambda^{n-1})$ - оператор Грина для дифференциального оператора $B \in \mathrm{Diff}_m(E \to F)$ (см., например, [1], §9). Эти обозначения распространим и на случай $\Gamma = \emptyset$. Положим $\Phi_\imath^{(\emptyset)} = \Phi_\imath$. Интегралы $\mathcal{G}^{(\imath,k)}$ будем называть интегралами Грина для комплекса $\{A_\imath, E_\imath\}$ в степени $\imath$.

**Лемма 2.** *Интегралы $T^{(\imath,1)}$, $T^{(\imath,2)}$, $\mathcal{G}^{(\imath)}$ порождают ограниченные линейные операторы $T^{(\imath,1)} : L^2(D, E_{\imath+1}) \to H_\Gamma^m(D, E_\imath)$, $T^{(\imath,2)} : L^2(D, E_{\imath-1}) \to H_\Gamma^m(D, , E_\imath)$, $\mathcal{G}^{(\imath)} : H_\Gamma^m(D, E_\imath) \to H_\Gamma^m(D, E_\imath)$. Кроме того, для любого сечения $u \in H_\Gamma^m(D, E_\imath)$ справедлива формула Грина:*

$$(\chi_D u)(x) = (\mathcal{G}^{(\imath)}u)(x) + (T^{(\imath,1)}A_\imath u)(x) + (T^{(\imath,2)}A_{\imath-1}^* u)(x). \tag{8}$$

**Доказательство.** Грубо говоря, формула (8) получается в результате применения формулы Стокса с учетом сингулярностей. которые имеет ядро $\Phi_\imath^{(\Gamma)}(x, y)$ на $\partial\Gamma$ (ср. §4 в [4]). Поскольку для любых фиксированных $f \in L^2(D, E_{\imath+1})$, $w \in L^2(D, E_{\imath-1})$ интегралы $\int_D (f, A_\imath v)_x\, dx$ и $\int_D (w, A_{\imath-1}^* v)_x dx$ определяют непрерывные линейные функционалы на $\tilde{H}_\Gamma^m(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma. E_\imath)$, то

$$A_\imath^*\chi_D : L^2(D, E_{\imath+1}) \to \tilde{H}_\Gamma^{-m}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_\imath), \qquad A_{\imath-1}\chi_D : L^2(D, E_{\imath-1}) \to \tilde{H}_\Gamma^{-m}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_\imath)$$

суть линейные непрерывные операторы. Поэтому (см. замечание 1) операторы $T^{(\imath,1)} = \Phi_\imath^{(\Gamma)} A_\imath^*\chi_D : L^2(D, E_{\imath+1}) \to H_\Gamma^m(D, E_\imath)$, $T^{(\imath,2)} = \Phi_\imath^{(\Gamma)} A_{\imath-1}\chi_D : L^2(D, E_{\imath-1}) \to H_\Gamma^m(D. E_\imath)$ непрерывны.

Справедливость формулы (8) для гладких сечений в $\mathbb{R}^n$, равных нулю в окрестности $\Gamma$, вытекает из формулы Стокса. Поскольку такие сечения плотны в $H_\Gamma^m(D. E_\imath)$, то отсюда следует, что оператор $\mathcal{G}^{(\imath)}$ продолжается по непрерывности на $H_\Gamma^m(D, E_\imath)$ как $\mathcal{G}^{(\imath)} = I - T^{(\imath,1)}A_\imath - T^{(\imath,2)}A_{\imath-1}^*$. □

## 2. Итерации интегралов Грина

Обозначим через $S^m(\Delta_\imath, \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}, \infty)$ гильбертово пространство, состоящее из всех $u \in H^m(\tilde{B} \setminus \overline{D}, E_\imath)$ таких, что $\Delta_\imath u = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ и $\lim_{|x|\to\infty} u = 0$; топология в нем индуцируется скалярным произведением

$$H_{m,D}(u, v) = (u, v)_{H^m(\tilde{B}\setminus\overline{D}, E_\imath)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u, D^\alpha v)_x\, dx.$$

Поскольку, как мы видели выше, задача Дирихле для лапласиана $\Delta_\imath$ вне $\overline{D}$:

$$\begin{cases} \Delta_\imath u = 0 & \text{на } \ \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}, \\ t_\imath u = \oplus u_\jmath & \text{на } \ \partial D, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 & \end{cases}$$

является в некотором смысле фредгольмовой в пространствах Соболева (см. лемму 1), то мы получаем изоморфизм $S^m(\Delta_i, \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}, \infty) \xrightarrow{t_{+,i}} \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-m_j-1/2}(\partial D, E_{i|\partial D})$, задаваемый при помощи оператора сужения $u \mapsto t_i(u)|_{\partial D}$. Наконец, композиция обратного оператора $t_{+,i}^{-1}$ с оператором следа $H^m(D, E_i) \xrightarrow{t_i} \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-m_j-1/2}(\partial D, E_{i|\partial D})$ дает нам непрерывное линейное отображение $H^m(D, E_i) \ni u \mapsto \mathcal{E}_i(u) \in S^m(\Delta_i, \mathbb{R}^n \setminus D, \infty)$.

Для $u \in H^m(D, E_i)$ положим

$$e_i(u)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad x \in D, \\ \mathcal{E}_i(u)(x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение эрмитову форму:

$$h_D^{(i)}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{A}_i e_i(u), \mathfrak{A}_i e_i(v))_x dx.$$

**Теорема 1.** *Эрмитова форма $h_D^{(i)}(u, v)$ суть скалярное произведение на пространстве $H_\Gamma^m(D, E_i)$, определяющее топологию, эквивалентную исходной.*

**Доказательство.** По построению $e_i(u) \in \tilde{H}_\Gamma^m(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma, E_i)$, если только $u \in H_\Gamma^m(D, E_i)$. Таким образом, требуемый факт доказан нами при доказательстве леммы 1. □

**Следствие 1.** *Операторы $A_i : H_\Gamma^m(D, E_i) \to L^2(D, E_{i+1})$, $T^{(i,1)} : L^2(D, E_{i+1}) \to H_\Gamma^m(D, E_i)$ являются сопряженными друг другу относительно скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot, \cdot)$ в $H_\Gamma^m(D, E_i)$ и стандартного скалярного произведения в $L^2(D, E_{i+1})$, а их нормы не превосходят единицы.*

**Доказательство.** Введем оператор

$$T^{(i)} = (T^{(i,1)}, T^{(i,2)}) : L^2(D, E_{i+1}) \oplus L^2(D, E_{i+1}) \to H_\Gamma^m(D, E_i).$$

По определению $T^{(i)} = \Phi_i^{(\Gamma)}(A_i + A_{i-1}^*)^* \chi_D$. Практически дословно повторяя доказательство [9, предложение 3.4] (ср. также [10]), получаем

$$h_D^{(i)}(T^{(i)} F, u) = \int_D (F, (A_i + A_{i-1}^*) u)_x dx \tag{9}$$

для всех $F \in L^2(D, E_{i+1}) \oplus L^2(D, E_{i+1})$, $u \in H_\Gamma^m(D, E_i)$. Для комплекса Дольбо равенство (9) доказано в [3].

Для завершения доказательства нам осталось применить равенство (9) для пар вида $(f, 0)$, где $f \in L^2(D, E_{i+1})$, и заметить, что по определению $\|A_i u\|_{L^2(D,E_i)}^2 \leq h_D^{(i)}(u, u)$ для всех $u \in H_\Gamma^m(D, E_i)$. □

**Следствие 2.** *Операторы $A_i T^{(i,1)} : L^2(D, E_{i+1}) \to L^2(D, E_{i+1})$, $T^{(i,1)} A_i : H_\Gamma^m(D, E_i) \to H_\Gamma^m(D, E_i)$, $\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^* : H_\Gamma^m(D, E_i) \to H_\Gamma^m(D, E_i)$ являются самосопряженными неотрицательными относительно обычных скалярных произведений в $L^2(D, E_{i+1})$ и скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot, \cdot)$ соответственно, а нормы их не превосходят единицы.*

**Доказательство.** Немедленно вытекает из теоремы 1 и следствия 1. □

Для заданного замкнутого подпространства $\Sigma$ в $H^m_\Gamma(D,E_i)$ будем писать $\pi_\Sigma$ для ортогональной проекции из $H^m_\Gamma(D,E_i)$ на $\Sigma$ относительно скалярного произведения $h^{(i)}_D(\cdot,\cdot)$. Кроме того, пусть $S^m_\Gamma(A_i,D)$ обозначает замкнутое подпространство в $H^m_\Gamma(D,E_i)$, состоящее из слабых решений уравнения $A_iu=0$ в $D$; другими словами, $S^m_\Gamma(A_i,D)$ представляет коциклы комплекса $\{A_i,E_i\}$ в степени $i$ на пространстве $H^m_\Gamma(D,E_i)$. Ясно, что $S^m_\Gamma(A_i,D)$ тривиально, если $i=0$, а внутренность $\Gamma$ не пуста.

**Следствие 3.** *В сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(H^m_\Gamma(D,E_i))$ мы имеем*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathcal{G}^{(i)}+T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^N=\pi_{S^m_\Gamma(A_i,D)},$$

*а в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ –*

$$\lim_{N\to\infty}\left(I-A_iT^{(i,1)}\right)^N=\pi_{\ker T^{(i,1)}}.$$

**Доказательство.** Как следует из [10, теорема 3.2], для всякого неотрицательного самосопряженного оператора $L$ в гильбертовом пространстве $H$ существует предел итераций $\lim_{k\to\infty}L^k=\Pi(\ker(I-L))$, если только $\|L\|\le 1$.

Значит, из следствия 2 вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathcal{G}^{(i)}+T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^N=\pi_{\ker(I-\mathcal{G}^{(i)}-T^{(i,2)}A^*_{i-1})},\quad \lim_{N\to\infty}\left(I-A_iT^{(i,1)}\right)^N=\pi_{\ker A_iT^{(i,1)}}$$

в сильных операторных топологиях пространств $\mathcal{L}(H^m_\Gamma(D,E_i))$ и $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ соответственно. Учитывая следствие 1 и формулу (8), заключаем, что

$$\ker T^{(i,1)}A_i=S^m_\Gamma(A_i,D),\quad \ker A_iT^{(i,1)}=\ker T^{(i,1)},$$

что и доказывает следствие. □

**Теорема 2.** *В сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(H^m_\Gamma(D,E_i))$ мы имеем*

$$I=\pi_{S^m_\Gamma(A_i,D)}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\mathcal{G}^{(i)}+T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)}A_i, \tag{10}$$

*а в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ –*

$$I=\pi_{\ker T^{(i,1)}}+\sum_{\nu=0}^{\infty}A_i\left(\mathcal{G}^{(i)}+T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)}. \tag{11}$$

**Доказательство.** Тождество $L+(I-L)=I$ влечет, что

$$I=L^\nu+\sum_{\mu=0}^{\nu-1}L^\mu(I-L)=(I-L)^\nu+\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(I-L)^\mu L \tag{12}$$

для всех $\nu\in\mathbb{N}$.

Используя следствие 3 для $L=T^{(i,1)}A_i$, можно перейти к пределу по $\nu\to\infty$ в (12) и получить (10). Доказательство другого тождества проводится аналогично. □

## 3. О задаче Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$

Рассмотрим следующий вариант задачи Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$ (о его связи с другими формулировками этой задачи см., например, [1], §19).

**Задача 1.** *Для заданного $f \in L^2(D, E_{i+1})$ найти (если это возможно) сечение $u \in H^m_\Gamma(D, E_i)$, удовлетворяющее $A_i u = f$ в $D$.*

Поскольку $A_{i+1}A_i \equiv 0$, то задача 1 может быть неразрешима для каких-то $f \in L^2(D, E_{i+1})$. Кроме того, при $\Gamma \neq \emptyset$ и $i = 0$ она превращается в некорректную задачу Коши для систем с инъективным символом. Как показывает пример 8.4 из [10] для комплекса Дольбо, эта задача, вообще говоря, некорректна даже для случая $\Gamma = \emptyset$. Более точно, для $\bar\partial$-замкнутых дифференциальных форм с коэффициентами класса $L^2(D)$ в строго псевдовыпуклой области $D$ всегда существует решение $u \in H^{1/2}(D)$ уравнения $\bar\partial u = f$, но для всякого $\epsilon > 0$ найдется $\bar\partial$-замкнутая дифференциальная форма класса $L^2(D)$, для которой не существует $H^{1/2+\epsilon}(D)$- решения этого уравнения в классе $H^{1/2+\epsilon}(D)$. Конечно, задача 1 корректна для комплекса де Рама.

**Теорема 3.** *Задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда $f \perp \ker T^{(i,1)}$ и ряд $R^{(i,D)}_\Gamma f = \sum_{\nu=0}^\infty \left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)} f$ сходится в $H^m_\Gamma(D, E_i)$. Более того, если эти условия выполнены, то $R^{(i,D)}_\Gamma f$ есть решение задачи 1.*

**Доказательство.** Необходимость утверждения вытекает из следствия 1 и теоремы 2.

Обратно, пусть оба условия теоремы выполнены. Тогда из (11) следует, что

$$f = \sum_{\nu=0}^\infty A_i \left(\mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A^*_{i-1}\right)^\nu T^{(i,1)} f.$$

Поскольку ряд $R^{(i,D)}_\Gamma f$ сходится в $H^m_\Gamma(D, E_i)$, то $f = A_i R^{(i,D)}_\Gamma f$ в $D$, что и требовалось доказать. □

Следствие 3 показывает, что решение $u = R^{(i,D)}_\Gamma f$ лежит в ортогональном (относительно $h^{(i)}_D(\cdot,\cdot)$) дополнении подпространства $S^m_\Gamma(A_i, D)$ в $H^m_\Gamma(D, E_i)$. Очевидно, задача 1 имеет не более одного решения, принадлежащего этому ортогональному дополнению. Частичные суммы $R^{(i,D)}_{\Gamma,p} f$ ряда $R^{(i,D)}_\Gamma f$ можно трактовать как приближенные решения задачи 1, если только $f \perp \ker T^{(i,1)}$.

Поскольку $A_i$ включен в некоторый эллиптический комплекс, то условия теоремы 3 можно уточнить: для $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$ будем говорить, что $\nu_i(g) = 0$ на $\partial D$, если для всех $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$ мы имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = 0.$$

Положим $\mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D) = \{g \in L^2(D, E_{i+1}) : A_{i+1} f = 0 \text{ в } D, A_i^* f = 0 \text{ в } D,\ \nu_i(g) = 0 \text{ на } \partial D \setminus \Gamma\}$. Будем называть $\mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D)$ *гармоническими пространствами* задачи Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$ в $D$ с данными на $\Gamma$ (ср., например, [1] для $\Gamma = \emptyset$). В силу эллиптичности комплекса элементы $\mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D)$ принадлежат $C^\infty(D, E_{i+1})$.

**Следствие 4.** *Задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда 1) $f \perp \mathcal{H}^{i+1}_\Gamma(D)$; 2) $A_{i+1} f = 0$ в $D$; 3) ряд $R^{(i,D)}_\Gamma f$ сходится в $H^m_\Gamma(D, E_i)$.*

**Доказательство.** Пусть $S^0(A_{i+1}, D)$ состоит из слабых решений уравнения $A_{i+1} f = 0$ в $D$ из класса Лебега $L^2(D, E_{i+1})$. Основой доказательства является следующая лемма.

**Лемма 3.** $\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D) = \mathcal{H}_\Gamma^{i+1}(D)$.

**Доказательство.** Пусть $g \in \ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)$. Из следствия 1 вытекает, что $A_i^* g = 0$ в смысле распределений в $D$. В частности, $g \in S^0(A_{i+1} + A_i^*, D)$. В силу эллиптичности комплекса $\{A_i, E_i\}$ мы заключаем, что $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$.

Покажем теперь, что $\nu_i(g) = 0$ слабо на $\partial D \setminus \Gamma$. Поскольку $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$, мы видим, что для всех $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$, равных нулю на $\Gamma$, справедливо следующее:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} (g, A_i u)_x \, dx = \int_D (g, A_i u)_x \, dx = h_D^{(i)}(T^{(i,1)} g, u) = 0$$

(здесь первое равенство получено с помощью формулы Стокса и равенства $A_i^* g = 0$, второе является следствием того факта, что $g \in L^2(D, E_{i+1})$, а третье вытекает из следствия 1). Мы доказали, что $\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)$ есть подмножество в $\mathcal{H}_\Gamma^{i+1}(D)$.

Докажем обратное включение. Возьмем $g \in \mathcal{H}_\Gamma^{i+1}(D) \subset S^0(A_{i+1}, D)$. В силу эллиптичности комплекса $\{A_i, E_i\}$, $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$. Кроме того, для всех $u \in C^\infty(\bar{D}, E_i)$, равных нулю на $\Gamma$, мы имеем

$$h_D^{(i)} \left( T^{(i,1)} g, u \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} (g, A_i u)_x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = 0.$$

Поскольку такие сечения $u$ плотны в $H_\Gamma^m(D, E_i)$, то $T^{(i,1)} g = 0$, что и требовалось доказать. □

Продолжим доказательство следствия. Необходимость его условий следует из теоремы 3 и леммы 3. Из (11) вытекает, что $A_{i+1} \pi_{\ker T^{(i,1)}} f = 0$, если $f \in S^0(A_{i+1}, D)$. Значит,

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_i \left( \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^* \right)^\nu T^{(i,1)} f$$

для всех $f \in S^0(A_{i+1}, D)$, ортогональных $\left( \ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D) \right)$. Наконец, поскольку ряд $R_\Gamma^{(i,D)} f$ сходится в $H_\Gamma^m(D, E_i)$, то $f = A_i R_\Gamma^{(i,D)} f$ в $D$, что и требовалось доказать. □

Уместно отметить, что $\mathcal{H}_\Gamma^{i+1}(D)$, вообще говоря, не является конечномерным.

Пусть теперь $x_0 \in \Gamma$, а $\Omega$ – такая односторонняя окрестность $x_0$, что $\partial\Omega \cap \Gamma$ есть открытое подмножество $\Gamma$. Как следует из формулы (11) и теоремы 3, если $f \perp \mathcal{H}_\Gamma^{i+1}(\Omega)$ и ряд $R_{\Gamma\cap\partial\Omega}^{(i,\Omega)} f$, построенный с помощью ядра $\Phi_i^{(\Gamma\cap\partial\Omega)}$, сходится в $H_\Gamma^m(\Omega, E_i)$, то он является решением уравнения $A_i u = f$ в $\Omega$. Обратно, если существуют такая односторонняя окрестность $\Omega$ и $u \in H_\Gamma^m(\Omega, E_i)$, такие, что $t_i(u) = 0$ на $\Gamma \cap \partial\Omega$ и $A_i u = f$ в $\Omega$, то ряд $R_{\Gamma\cap\partial\Omega}^{(i,\Omega)} f$ сходится в $H_\Gamma^m(\Omega, E_i)$. Все вышесказанное позволяет надеяться, что ряды вида $R^{(i)} f$ станут естественным заменителем разложения Тейлора, которое играет ключевую роль в доказательстве теоремы Коши-Ковалевской для вещественно аналитической задачи Коши (наш метод не требует, чтобы $\Gamma$ и $f$ были вещественно аналитическими!).

Наконец, затронем вопрос о теореме единственности задачи Коши для комплекса $\{A_i, E_i\}$. С точки зрения когомологий естественной теоремой единственности было бы утверждение о том, что сечения из $S^m_\Gamma(A_i, D)$ являются $A_{i-1}$-точными. Хорошо известно, что это утверждение верно всегда, если внутренность $\Gamma$ не пуста и $i = 0$ (в этом случае $S^m_\Gamma(A_i, D) = \{0\}$). В работе [11] указаны некоторые (достаточные) условия на $\partial D \setminus \Gamma$, при которых можно говорить о такой теореме единственности для комплекса Дольбо в $\mathbb{C}^n$ для $i > 0$. В ней доказано, что если $\partial D \setminus \Gamma$ есть часть границы псевдовыпуклой области $G$, содержащей $D$, то $\overline{\partial}$-замкнутые формы класса $C^1(\overline{D})$, исчезающие на $\Gamma$, на самом деле $\overline{\partial}$-точны.

## Список литературы


[1] Тарханов Н.Н. *Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов/* Н.Н. Тарханов. - Новосибирск: Наука, 1990. - 248 с.

[2] Shlapunov A.A. *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols* / A.A Shlapunov, N.N. Tarkhanov // Proc. London Math. Soc. - 1995. - V. 71. - N. 3. - P. 1–52.

[3] Шлапунов А.А. *О регуляризации задачи Коши для комплекса Дольбо/* А.А. Шлапунов //Многомерный комплексный анализ: Сб. ст./ Краснояр. гос. ун-т. - Красноярск, 2002. - С. 178-191.

[4] Schulze B.-W. *Green integrals on manifolds with cracks* / B.-W. Schulze, A.A. Shlapunov, N. N. Tarkhanov. - Prepr. 2000/12, University of Potsdam. - 2000. - 33 pp.

[5] Романов А.В. *Сходимость итераций оператора Мартинелли-Бохнера и уравнение Коши-Римана/* А.В. Романов // Докл. АН СССР. - 1978. - Т. 242. N. 4. - С. 780–783.

[6] Тарханов Н.Н. Ряд Лорана для решений эллиптических систем/ Н.Н. Тарханов. - Новосибирск: Наука, 1991. - 318 с.

[7] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи/* Ф.Д. Гахов. - М: Наука, 1977. - 640 с.

[8] Hedberg L. I., Wolff T. H., *Thin sets in nonlinear potential theory/* L.I. Hedberg, T.H. Wolff// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). - 1983. - V. 33. - N. 4. - P. 161–187.

[9] Шлапунов А.А. *Об одном условии разрешимости систем с инъективным символом в терминах итераций потенциалов двойного слоя* /А.А. Шлапунов// Сиб. матем. журн. - 2001. - Т. 42. N 4. - С. 952–963.

[10] Nacinovich M. *On iterations of Green's integrals and their applications to elliptic complexes/* M. Nacinovich M., A.A. Shlapunov // Mathem. Nach. - 1996. - V. 180. -P. 243–284.

[11] Nacinovich M. *Carleman formulas for the Dolbeault cohomologies/* M. Nacinovich B.-W. Schulze, N.N. Tarkhanov // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. Sc. Mat. Suppl. 1999. - V. XLV. - P.153 -262.