

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ КЛАССИФИКАЦИИ ГЕОМЕТРИЙ¹

В.А.Кыров*

В данной работе решением одного естественно возникающего геометрического функционального уравнения устанавливается связь между 2-метриками двумерных феноменологически симметричных многообразий и 1-метриками двумерных феноменологически симметричных многообразий. Это уравнение решается с использованием частичной классификации трехмерных алгебр Ли.

Рассмотрим двумерное многообразие M и функцию пары точек: $f : S_f \rightarrow R^2$ с компонентами (f^1, f^2) и с областью определения $S_f \in M \times M$. На функцию f наложим условия: 1) область определения S_f открытое и плотное подмножество в $M \times M$; 2) функция f достаточно гладкая; 3) для произвольных точек i и j из некоторого плотного подмножества в M пары $\langle ij \rangle \in S_f$ и $\langle ji \rangle \in S_f$, отображения $i \rightarrow (f^1(ij), f^2(ij))$ и $i \rightarrow (f^1(ji), f^2(ji))$ являются локальными диффеоморфизмами. Рассмотрим функцию $F : M^3 \rightarrow R^6$, пусть S_F — ее область определения. Тройке $\langle ijk \rangle \in S_F$: $\langle ij \rangle, \langle ik \rangle, \langle jk \rangle \in S_f$, функция F ставит в соответствие шестерку чисел $(f(ij), f(ik), f(jk))$.

Определение 1. Будем говорить, что функция f задает на многообразии M *двуметрическую двумерную феноменологически симметричную (ФС) геометрию* (M, f^1, f^2) , если выполняется условие феноменологической симметрии:

4) существует такая функция $\Phi : \varepsilon \rightarrow R^2$ и плотное в S_F подмножество, что для каждой тройки $\langle ijk \rangle \in S_F$ и некоторой ее окрестности $U(\langle ijk \rangle)$, $F(U(\langle ijk \rangle)) \subset \Phi_{(0,0)}$, где ε — область из R^6 с регулярным значением $(0,0)$, а $\Phi_{(0,0)}$ — множество уровня точки $(0,0)$ [3]. Функция $f = (f^1, f^2)$ называется метрической, двуметрической или 2-метрикой.

Г.Г.Михайличенко была построена полная классификация двуметрических двумерных ФС геометрий [2]. Их оказалось всего две. Это многообразия с 2-метриками:

$$\begin{aligned} f^1(ij) &= x_i - x_j, & f^2(ij) &= x_i - x_j, \\ f^1(ij) &= (x_i - x_j)y_i, & f^2(ij) &= (x_i - x_j)y_j, \end{aligned}$$

где через x, y обозначены подходящие локальные координаты на многообразии M . Тогда x_i, y_i — координаты точки i в данной локальной системе.

Многообразие (M, f^1, f^2) допускает двухпараметрическую группу движений, то есть группу преобразований, сохраняющих 2-метрику (f^1, f^2) , по которым она восстанавливается как двухточечный инвариант. Базисные операторы алгебр Ли групп движений этих многообразий представимы в виде

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y,$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y.$$

Рассмотрим теперь на двумерном многообразии M функцию пары точек: $f : S_f \rightarrow R$, где $S_f \in M \times M$ — область определения. На функцию f наложим условия: 1) область определения S_f открытое и плотное подмножество в $M \times M$; 2) функция f достаточно гладкая; 3) в $M \times M$ плотно множество пар $\langle jk \rangle \in M \times M$: для произвольной точки $i \in M$: $\langle ij \rangle, \langle ik \rangle \in S_f$ и $\langle ji \rangle, \langle ki \rangle \in S_f$, отображения $i \rightarrow (f(ij), f(ik))$ и $i \rightarrow (f(ji), f(ki))$ являются локальными диффеоморфизмами в точках, плотного в M множества. Рассмотрим функцию $F : M^3 \rightarrow R^6$ с областью определения S_F , четверке $\langle ijkl \rangle \in S_F$: $\langle ij \rangle, \langle ik \rangle, \langle il \rangle, \langle jk \rangle, \langle jl \rangle, \langle kl \rangle \in S_f$ она ставит в соответствие шестерку чисел $(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl))$.

Определение 2. Будем говорить, что функция f задает на многообразии M *однометрическую двумерную феноменологически симметричную геометрию* (M, f) , если выполняется дополнительное условие феноменологической симметрии:

4) существует такая функция $\Phi : \varepsilon \rightarrow R$, что для каждого кортежа $\langle ijkl \rangle$ и некоторой его окрестности $U(\langle ijkl \rangle)$, $F(U(\langle ijkl \rangle)) \subset \Phi_0$, где ε — область из R^6 , с регулярным значением 0, а

¹ Данные исследования поддержаны РФФИ (грант 02-01-01071).

* © В.А.Кыров, Горно-Алтайский государственный университет, 2006. e-mail: kfizika@gasu.ru

Φ_0 — множество уровня точки 0 [2, 5]. Функция f называется метрической (МФ) или 1-метрикой. Примером 1-метрики может служить метрика евклидовой плоскости.

Цель нашего исследования — нахождение гладкой функции φ с открытой и плотной областью определения такой, чтобы функция

$$f(ij) = \varphi(f^1(ij), f^2(ij)) \quad (1)$$

являлась метрической со свойством ФС. Из теоремы об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий для многообразия (M, f) следует, что по метрической функции f находится трехпараметрическая группа движений, а по группе движений она восстанавливается. Очевидно, существуют всего две функции вида (1):

$$f(ij) = \varphi(x_i - x_j, y_i - y_j), \quad (2)$$

$$f(ij) = \varphi((x_i - x_j)y_i, (x_i - x_j)y_j). \quad (3)$$

Базисные операторы алгебр Ли групп движений, относительно которых МФ (1) и (2) инвариантны, записываются в общем виде так:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \lambda(x, y)\partial_x + \sigma(x, y)\partial_y, \quad (4)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_3 = \lambda(x, y)\partial_x + \sigma(x, y)\partial_y. \quad (5)$$

Локально условие инвариантности функций (2) и (3) записывается через уравнения [7]:

$$X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \quad X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0, \quad X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0, \quad (6)$$

где, например, $X_1(i)$ — значение оператора X_1 в точке i , а $X_1(j)$ — значение этого же оператора в точке j .

Подставляя в уравнения (6) операторы (4) и (5), приходим к следующим функциональным уравнениям:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))\partial\varphi/\partial u + (\sigma(i) - \sigma(j))\partial\varphi/\partial v = 0, \quad (7)$$

$$((\lambda(i) - \lambda(j))y_i + \sigma(i)(x_i - x_j))\partial\varphi/\partial u + ((\lambda(i) - \lambda(j))y_j + \sigma(j)(x_i - x_j))\partial\varphi/\partial v = 0, \quad (8)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$, причем в первом уравнении $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$, а во втором $u = (x_i - x_j)y_i$, $v = (x_i - x_j)y_j$; неизвестными являются функции φ , λ , σ .

Функциональное уравнение (7) решено в работе автора [1]. Решение приводит к МФ:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2;$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2;$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp\left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right),$$

где постоянная $\gamma > 0$;

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp\left(2\beta \operatorname{Ar}(c)\operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right),$$

где постоянная $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$;

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right);$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}.$$

Для решения уравнения (8) выделим некоторые изоморфные классы трехмерных алгебр Ли. Для этого сначала запишем коммутационные соотношения операторов (5):

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3, \quad [X_2, X_3] = q_1 X_1 + q_2 X_2 + q_3 X_3, \quad (9)$$

причем выполняется тождество Якоби:

$$[[X_1, X_2]X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0.$$

Подставляя (9) в тождество Якоби, приходим к двум системам коммутаторов:

$$I.[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = p_1X_1, [X_2, X_3] = q_1X_1 - q_3p_1X_2 + q_3X_3;$$

$$II.[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = p_1X_1 + p_2X_2, [X_2, X_3] = q_1X_1 - p_1X_2 + X_3,$$

причем $p_2 \neq 0$. Заметим, что первая система приводит к разрешимым алгебрам Ли, а вторая — к полупростым. Переходя в I и II к новому базису, приходим к изоморфным классам:

$$I.1.[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = 0, [X_2, X_3] = qX_1 - X_3;$$

$$I.2.[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = 0, [X_2, X_3] = qX_3;$$

$$II.1.[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = X_2, [X_2, X_3] = X_3;$$

$$II.2.[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = -X_2, [X_2, X_3] = X_3.$$

Найдем явный вид оператора X_3 из системы (5). Подставляя операторы (5) в выше найденные коммутаторы и интегрируя получаемые при этом дифференциальные уравнения, приходим:

для I.1:

$$X_3 = (c_1 - q \ln y)\partial_x + c_2y^2\partial_y; \quad (10)$$

для I.2:

$$X_3 = c_1y^{-2}\partial_x + c_2\partial_y; \quad (11.1)$$

$$X_3 = c_1\partial_x + c_2y^2\partial_y; \quad (11.2)$$

$$X_3 = c_1y^{-1-q}\partial_x + c_2y^{1-q}\partial_y, \quad q \neq \pm 1; \quad (11.3)$$

для II.1:

$$X_3 = (c_1/y^2 + x^2/2)\partial_x + (c_2 - xy)\partial_y; \quad (12)$$

для II.2:

$$X_3 = (c_1/y^2 - x^2/2)\partial_x + (c_2 + xy)\partial_y. \quad (13)$$

Подставляя компоненты найденных операторов в функциональное уравнение (8), интегрируя, а затем выделяя те φ , которые приводят к ФС метрическим функциям, приходим к следующим базисным операторам групп движений:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_3 = \partial_y;$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_3 = \frac{x^2}{2}\partial_x - xy\partial_y.$$

Двухточечными инвариантами групп движений с данными операторами являются следующие метрические функции:

$$f(ij) = (x_i - x_j)(y_i - y_j);$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)y_iy_j.$$

Заметим, что эти 1-метрики получены в классификации однометрических двумерных феноменологически симметричных геометрий Г.Г. Михайличенко [4, 6]. Первая из этих метрических функций была получена также при решении функционального уравнения (7), но в других координатах (это второе решение). Вторая метрическая функция — метрика симплектической плоскости.

Список литературы

- [1] КЫРОВ В.А. *К вопросу о классификации феноменологически симметричных геометрий* / В.А.Кыров // Вестник молодых ученых: Сборник научных работ. Горно-Алтайск. – 2004. – С. 178-182.
- [2] МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. *Полиметрические геометрии* / Г.Г.Михайличенко. – Новосибирск: НГУ, 2001.
- [3] МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии* / Г.Г.Михайличенко // Докл. РАН. – 1996. – Т. 348, №1. – С. 22-24.
- [4] МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. *Метрика плоскости как двухточечный инвариант* / Г.Г.Михайличенко // Сиб. мат. журн. – 1984. – 38с. Деп. в ВИНТИ 30.10.84, 6980-84. (Реферат // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, №5. – С. 198).
- [5] МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. *О групповой и феноменологической симметрии в геометрии* / Г.Г.Михайличенко // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, №2. – С. 284-288.
- [6] МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. *Двумерные геометрии* / Г.Г.Михайличенко // Докл. АН СССР. – 1981. – Т.260, №4. – С. 803-805 (Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. – Т. 293. – Ser. 1. – P. 529-531).
- [7] ОВСЯННИКОВ Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* / Л.В.Овсянников. – М.: Наука, 1978.

ABOUT ONE FUNCTIONAL EQUATION ARISING BY CLASSIFICATION OF GEOMETRIES

V.A. Kyrov

In this work the connection between 2-metrics of two-dimensional phenomenologically symmetrical manifolds and 1-metrics of two-dimensional phenomenologically symmetrical manifolds is established by solvation of one naturally arising geometrical functional equation.