УДК 517.55

О ЗАДАЧЕ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА[1]

Д.П.Федченко, А.А.Шлапунов*

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, имеющая кусочно гладкую границу ∂D. В работе описаны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в пространствах Гельдера в области D для многомерного оператора Коши-Римана $\overline{\partial}$. В качестве примера рассмотрена ситуация, когда область D есть часть шарового слоя $\Omega(r, R) = B(R) \setminus \overline{B}(r)$ $(0 < r < R < \infty)$ в $\mathbb{C}^n$, где $B(R)$ — шар с центром в нуле и радиусом R, отсекаемая гладкой гиперповерхностью Γ, ориентированной как ∂D. В этом случае, используя разложение Лорана для гармонических функций в шаровом слое $\Omega(r, R)$, мы строим формулы Карлемана, восстанавливающие функции из класса Гельдера $C^{s,\lambda}(D \cup \overline{\Gamma})$, $s \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda \leq 1$, по их значениям на $\overline{\Gamma}$ и значениям $\overline{\partial} u$ в области D.

Введение

Задача Коши для голоморфных функций одного комплексного является классическим примером некорректной по Адамару задачи, которая естественно возникает в многочисленных приложениях — гидродинамике, теории передачи сигнала и т.д. (см., например, [1], [2] и библиографию к ней). Она активно изучалась в 60-х годах XX века и стала одним из стимулов для построения теории условно корректных задач.

В 80-90 годы в связи с развитием многомерного комплексного анализа и его приложений во многих научных центрах, в том числе и Красноярской школой комплексного анализа, были проведены серьезные исследования задачи Коши для голоморфных функций многих комплексных переменных в различных функциональных пространствах (см., например, [3] и библиографию к ней).

Как оказалось, полученные для системы Коши-Римана результаты могут быть естественным образом обобщены в контексте общих линейных переопределенных эллиптических систем (см. [3]). Это в свою очередь позволило по-новому взглянуть на задачу Коши для голоморфных функций. Стало ясно, что требует изучения более общая задача — задача Коши для многомерной (неоднородной!) системы Коши-Римана (см. [4]). Конечно, в случае одного комплексного переменного эти задачи эквивалентны. Однако в многомерной ситуации доказательство эквивалентности задач требует информации о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения (или, другими словами, о когомологиях комплекса Дольбо в степени 1) в различных классах функций, а значит, такая эквивалентность не имеет места для областей, не обладающих некоторыми свойствами выпуклости относительно оператора Коши-Римана (см, например, [5]).

В настоящей работе мы рассматриваем следующую задачу Коши для системы Коши-Римана.

Задача 1. *Пусть $s, p \in \mathbb{N}$, $s \leq p + 1$, D – ограниченная область с кусочно гладкой границей в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, а Γ – гиперповерхность класса C^∞, являющаяся связным открытым (в топологии ∂D) подмножеством границы области D. По заданным функции u_0 из класса Гельдера $C^{s,\lambda}(\Gamma) \cap C(\overline{\Gamma})$ и дифференциальной форме f с коэффициентами из класса Гельдера $C^{p,\lambda}(D \cup \Gamma) \cap C(\overline{D})$ найти такую функцию $u \in C^{s,\lambda}(D \cup \Gamma)$, что*

$$\overline{\partial} u = f \text{ в } D, \tag{1}$$

$$u_{|\Gamma} = u_0. \tag{2}$$

Как хорошо известно, она имеет не более одного решения (см., например, [6]). Мы сводим эту задачу к задаче гармонического продолжения из меньшей области в большую, обобщая тем самым теорему Айзенберга-Кытманова (см. [6]) о задаче Коши для голоморфных функций. В случае, когда D суть часть шарового слоя в $\mathbb{C}^n$, отсеченная гладкой гиперповерхностью Γ, мы строим точные и приближенные решения задачи Коши 1 с помощью разложения Лорана для гармонических функций. Для функций одной комплексной переменной на этом пути получается известная формула Голузина-Крылова (см., например, [2]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00517.

1. Условия разрешимости задачи

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z = (z_1, ..., z_n)$, где $z_j = x_j + \sqrt{-1}x_{j+n}$, $j = 1, ..., n$, $\sqrt{-1}$ - мнимая единица, $x = (x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^{2n}$, то есть открытое связное множество, а $\overline{D}$ — ее замыкание.

Для $s \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $C^s(\overline{D})$ банаховы пространства непрерывно дифференцируемых функций на $\overline{D}$ со стандартными нормами.

Для $0 < \lambda \leq 1$ обозначим через $C^{s,\lambda}\left(\overline{D}\right)$ пространство Гельдера, т.е. множество комплекснозначных функций $f \in C^s(\overline{D})$, для которых конечна величина

$$\sum_{|\alpha|=s} \sup_{x,y\in\overline{D}} \frac{|(D^\alpha f)(x) - (D^\alpha f)(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Как обычно, пусть $C^{s,\lambda}\left(D \cup \Gamma\right)$ — множество комплекснозначных функций в D, принадлежащих $C^{s,\lambda}(\overline{G})$ для любой подобласти G из D, для которой $\overline{G} \subset D \cup \Gamma$.

Обозначим через $\overline{\partial}$ оператор Коши-Римана в $\mathbb{C}^n$. Как известно, оператор Коши-Римана индуцирует дифференциальный комплекс совместности

$$0 \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{(0,0)}) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(\Lambda^{(0,1)}) \xrightarrow{\overline{\partial}_1} C^\infty(\Lambda^{(0,2)}) \xrightarrow{\overline{\partial}_2} ... \xrightarrow{\overline{\partial}_{n-1}} C^\infty(\Lambda^{(0,n)}) \longrightarrow 0,$$

который называется комплексом Дольбо (см., например, [5] или [7]). Здесь $C^\infty(\Lambda^{(q,r)})$ - множество дифференциальных форм бистепени (q, r) с бесконечно гладкими коэффициентами, а $\overline{\partial}_j$ - операторы комплексного дифференцирования дифференциальных форм.

Пространство дифференциальных форм бистепени (q, r) с коэффициентами из пространства Гельдера $C^{p,\lambda}(D \cup \Gamma)$ обозначим через $C^{p,\lambda}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(q,r)})$.

Рассмотрим теперь задачу 1. Пусть задана форма $f \in C^{p,\lambda}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$. Как хорошо известно, решение u уравнения (1), когда существует, принадлежит $C^{p+1,\lambda}_{loc}(D)$.

Для $n = 1$ уравнение (1) всегда разрешимо в пространстве Гельдера $C^{p+1,\lambda}(D \cup \Gamma)$; при этом "хорошее" решение задается (несобственным) интегралом Коши-Грина (см., например, [7]):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_D \frac{f(\zeta)d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

Конечно, существуют и менее регулярные решения. Ситуация при $n > 1$ более сложна.

Во-первых, как известно, необходимым условием разрешимости задачи 1 является равенство $\overline{\partial}_1 f = 0$. Кроме того, как стало ясно еще в 60-х годах прошлого столетия, $\overline{\partial}$-задача в многомерном случае субэллиптична. В частности, не для всех $f \in C^p(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$, $n > 1$, удовлетворяющих $\overline{\partial}_1 f = 0$ в D, найдется решение уравнения (1) в классе Гельдера $C^{p,\gamma}(\overline{D})$ для $\gamma > 1/2$, даже если D- шар (см. [8]). По этой причине решение задачи Коши 1 мы ищем в пространстве $C^{s,\lambda}(D \cup \Gamma)$ с $1 \leq s \leq p+1$, т.е. предполагаем некоторую потерю регулярности.

Во-вторых, при $n > 1$ оператор $\overline{\partial}$ индуцирует касательный оператор $\overline{\partial}_b$ на ∂D (см., например, [7]), а значит, данные Коши u_0 и f должны быть согласованы. Более точно, при наших предположениях, найдется такая действительно-значная бесконечно дифференцируемая функция ρ, что $|\nabla\rho| \neq 0$ на Γ и $\Gamma = \{z \in D : \ \rho(z) = 0\}$. Зафиксируем какую-нибудь такую функцию ρ. Тогда необходимо, чтобы $\overline{\partial}_b u_0 = \tau(f)$ на Γ, т.е. для какой-нибудь функции v, гладкой в некоторой окрестности Γ и совпадающей с u_0 на Γ, было справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}_j}\frac{\partial v}{\partial\overline{z}_i} - \frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}_i}\frac{\partial v}{\partial\overline{z}_j}\right)(\zeta) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}_j}f_i - \frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}_i}f_j\right)(\zeta) \text{ для всех } 1 \leq i,j \leq n, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{3}$$

Отметим также, что определение (3) не зависит от выбора функций v и ρ с описанными выше свойствами (см. [7]).

Ясно, что для $n = 1$ условие (3) всегда выполнено. При $n > 1$ и $f = 0$ условие (3) означает, что u_0 суть CR-функция на Γ (см., например, [7]).

Обозначим через $\mathfrak{U}(\zeta, z)$ ядро Мартинелли-Бохнера в $\mathbb{C}^n$:

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{j=1}^n \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta,$$

а через $M_\Gamma v$ – интеграл Мартинелли-Бохнера с плотностью $v \in C(\overline{\Gamma})$

$$M_\Gamma v(z) = \int_\Gamma v(\zeta)\mathfrak{U}(\zeta, z), \qquad z \notin \Gamma.$$

Как хорошо известно, если $\partial D \in C^\infty$, то интеграл типа Мартинелли-Бохнера индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_{\partial D} : C^{s,\lambda}(\partial D) \to C^{s,\lambda}(\overline{D}), \qquad 0 < \lambda \le 1,$$

(см., например, [9, 2.3.2.5]). В частности, отсюда легко получается, что в нашем случае $M_\Gamma u_0 \in C^{s,\lambda}(D \cup \Gamma)$.

Далее, для дифференциальной формы $f \in C(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$ обозначим через $T_D f$ следующий объемный потенциал:

$$T_D f(z) = -\int_D f(\zeta) \wedge \mathfrak{U}(\zeta, z).$$

Поскольку этот несобственный интеграл сходится абсолютно, если $f \in C(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$, то $T_D f \in C(\mathbb{C}^n)$. Более того, если $\partial D \in C^\infty$, то потенциал T_D индуцирует ограниченный линейный оператор

$$T_D : C^{p,\lambda}(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)}) \to C^{p+1,\lambda}(\overline{D}), \qquad 0 < \lambda \le 1,$$

(см., например, [9, 1.2.3.5]). Отсюда легко получается, что в нашем случае $T_D f \in C^{p+1,\lambda}(D \cup \Gamma)$.

Уместно отметить, что потенциал $T_D f$ совпадает с интегралом Коши-Грина при $n = 1$, однако он не является, вообще говоря, решением уравнения (1), даже если $\overline{\partial}_1 f = 0$ в D.

Известно, если ∂D кусочно гладкая, то для всякой функции $u \in C^1(\overline{D})$ справедлива формула Мартинелли-Бохнера:

$$M_{\partial D} u(z) + T_D \overline{\partial} u(z) = \begin{cases} u(z), & z \in D; \\ 0, & z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}, \end{cases} \tag{4}$$

см., например, [7, теорема 1.3]. □

Ясно, что интегралы $M_\Gamma u_0$ и $T_D f$ являются гармоническими всюду вне $\overline{D}$ как интегралы, зависящие от параметров. Поэтому и функция

$$F(z) = M_\Gamma u_0(z) + T_D f(z), \qquad z \notin \Gamma,$$

гармоническая всюду вне $\overline{D}$.

С учетом формулы Мартинелли-Бохнера (4) функция F содержит достаточно много информации о решении задачи Коши 1, если оно существует.

Нашей дальнейшей целью будет получение критерия разрешимости задачи Коши 1 с помощью функции F. Для этого выберем область D^+ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было бы областью с кусочно гладкой границей. Эту ситуацию можно реализовать следующим образом: задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, а гладкая гиперповерхность Γ разбивает Ω на две связные компоненты $D^- = D$ и D^+ и ориентирована как ∂D, причем граница ∂D является кусочно гладкой. Обозначим через $F^\pm$ сужение F на $D^\pm$. В силу вышесказанного, F^+ гармонична в D^+. Кроме того, доопределив v нулем на границе достаточно большого шара $B(0, R) \supset \Omega$, мы видим, что, если $\partial D \in C^\infty$, то интеграл Мартинелли-Бохнера индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M^+_{\partial D} : C^{s,\lambda}(\partial D) \to C^{s,\lambda}(\overline{B(0,R)} \setminus D), \qquad 0 < \lambda \le 1,$$

(см., например, [9, 2.3.2.5]). Отсюда легко получается, что в нашем случае $M^+_\Gamma u_0 \in C^{s,\lambda}(D^+ \cup \Gamma)$.

Теорема 1. *Задача Коши* 1 *разрешима тогда и только тогда когда* i) $\overline{\partial} f = 0$ *в* D, ii) $\overline{\partial}_b u_0 = \tau(f)$, iii) *функция* F^+ *гармонически продолжается из* D^+ *на* $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$.

Доказательство. Пусть задача 1 разрешима, а u — ее решение. Необходимость условий i) и ii) нами уже отмечена выше. Положим

$$\Phi(z) = \begin{cases} F^+(z), & z \in D^+; \\ F^-(z) - u(z) & z \in D. \end{cases}$$

По определению функция Φ гармонична в D^+ и принадлежит $C^{s,\lambda}(D^\pm \cup \Gamma)$.

Возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с кусочно гладкой границей, для которой $\overline{G} \cap \partial D \subset \Gamma$. Тогда по формуле Мартинелли-Бохнера (4) мы имеем

$$\Phi(z) = (M_\Gamma u_0 + T_D f - \chi_D u)(z) =$$
$$(M_\Gamma u + T_G \overline{\partial} u + T_{D\setminus G} f - M_{\partial G} u - T_G \overline{\partial} u)(z) =$$
$$(-M_{\partial G\setminus\Gamma} u + T_{D\setminus G} f)(z),$$

где χ_D — характеристическая функция области D, а $z \in D^+ \cup G$. Из этого равенства следует, что Φ гармонически продолжается из D^+ в $D^+ \cup G \cup \Gamma$, поскольку интегралы $M_{\partial G\setminus\Gamma} u$ и $T_{D\setminus G} f$ гармоничны всюду вне своих множеств интегрирования как интегралы, зависящие от параметра z.

Наконец, так как для всякой точки $z \in D$ найдется область $G \ni z$ с описанными выше свойствами, то Φ на самом деле гармонична в Ω и на D^+ совпадает с F^+.

Обратно, пусть существует функция Φ, гармоничная в Ω и совпадающая с F^+ на D^+. Положим

$$u(z) = F^-(z) - \Phi(z), \qquad z \in D. \tag{5}$$

По построению функция u принадлежит $C^{s,\lambda}(D\cup\Gamma) \cap C^{p+1,\lambda}(D)$. Более того, из формул Сохоцкого-Племеля для интеграла Мартинелли-Бохнера (см. [7, теорема 2.3]) и непрерывности интеграла T_D и функции Φ на Ω следует, что

$$u(z_0) = M^-_\Gamma u_0(z_0) + T^-_D f(z_0) - \Phi(z_0) = M^-_\Gamma u_0(z_0) + T^-_D f(z_0) - M^+_\Gamma u_0(z_0) - T^+_D f(z_0) = u_0(z_0)$$

для любой точки $z_0 \in \Gamma$.

Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что $\overline{\partial} u = f$ в D. С этой целью рассмотрим $(0,1)$-форму $g = (f - \overline{\partial} u)$, принадлежащую $C^{s-1,\lambda}(D\cup\Gamma, \Lambda^{(0,1)}) \cap C^{p,\lambda}(D, \Lambda^{(0,1)})$. Так как форма f является $\overline{\partial}$-замкнутой, то и форма g также $\overline{\partial}$-замкнута в D. Кроме того, форма g является ко-замкнутой, т.е. удовлетворяет $\overline{\partial}^* g = 0$ в D.

В самом деле, обозначим через Δ_{2n} обычный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$. Очевидно, что $\overline{\partial}^*\overline{\partial} = -1/4\Delta_{2n}$. Из гармоничности функции Φ и потенциала $M_\Gamma u_0$ вытекает, что

$$\overline{\partial}^* g = \overline{\partial}^* f - 1/4\Delta_{2n} T_D f \text{ в области } D.$$

Лемма 1. *В условиях теоремы* $\overline{\partial}^* f = \overline{\partial}^*\overline{\partial} T_D f$ *в* D.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}(\zeta - z)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$.

Как хорошо известно (см., например, [7], с.6),

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = 4\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z_j}(\zeta - z) d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta, \qquad T_D f = -4\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\int_D \mathfrak{G}(\zeta - z) f(\zeta) \wedge d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta.$$

Поэтому

$$\Delta_{2n}\int_D T_D f(z) = 4\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\Delta_{2n}\int_{\zeta\in D} \mathfrak{G}(\zeta - z) f(\zeta) \wedge d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta. \tag{6}$$

Наконец, тот факт, что $\mathfrak{G}$ есть фундаментальное решение оператора Лапласа, гарантирует нам, что

$$4\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\Delta_{2n}\int_{\zeta\in D} \mathfrak{G}(\zeta - z) f(\zeta) \wedge d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta = 4\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} f_j(z) = 4\overline{\partial}^* f. \tag{7}$$

Таким образом, (6) и (7) влекут за собой утверждение леммы. □

Итак, $(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) g = 0$ в D и, в частности, коэффициенты g_j, $j = 1, 2 \ldots n$, формы g гармоничны в D, а поэтому вещественно аналитичны там.

Пусть теперь $*$ — оператор Ходжа для дифференциальных форм, $\overline{*} h = \overline{* h}$, для дифференциальной формы $h \in C(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$, а

$$\mathfrak{G}^{(0,1)}(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n \mathfrak{G}(\zeta - z) d\overline{z}_j \; d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta.$$

Положим:

$$(M^{(1)}_\Gamma h)(z) = \int_\Gamma h \wedge \overline{*}\overline{\partial}\overline{*}\mathfrak{G}^{(0,1)}(z, .), \qquad (M^{(2)}_\Gamma h)(z) = \int_\Gamma \overline{\overline{\partial}^* \overline{*} \mathfrak{G}^{(0,1)}(z, .) \wedge * h}.$$

Лемма 2 (формула Мартинелли-Бохнера-Грина)**.** *Если ∂D кусочно гладкая, то для всякой формы $h \in C(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$ такой, что $\overline{\partial} h = 0$ в D, $\overline{\partial}^* h = 0$ в D, справедлива формула Мартинелли-Бохнера-Грина:*

$$(M^{(1)}_{\partial D} h)(z) + (M^{(2)}_{\partial D} h)(z) = \begin{cases} h(z), & z \in D; \\ 0, & z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. См., например, [10, лемма 2.3]. □

Так как $u = u_0$ на Γ, то из условия ii) и определения (3) немедленно следует, что $\tau(g) = 0$ на Γ, т.е.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_i} g_j - \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j} g_i \right)(\zeta) = 0 \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq n, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{9}$$

Далее, для ζ из некоторой окрестности ∂D положим $\nu(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(\zeta) f_j(\zeta)$. Пусть $\overline{\partial}_\nu u$ обозначает $\overline{\partial}$-нормальную производную u относительно ∂D, т.е. $\overline{\partial}_\nu u = \nu(\overline{\partial} u)$. Тогда

$$\overline{\partial}_\nu u = \overline{\partial}_\nu F - \overline{\partial}_\nu \Phi = \overline{\partial}_\nu M^-_\Gamma u_0 - \overline{\partial}_\nu M^+_\Gamma u_0 + \overline{\partial}_\nu T_D f^- - \overline{\partial}_\nu T_D f^+ \text{ на } \Gamma. \tag{10}$$

Теперь из формулы (10) и леммы о скачке $\overline{\partial}$-нормальной производной интеграла Мартинелли-Бохнера (см. [7, теорема 4.10]) мы выводим, что

$$\overline{\partial}_\nu u = \overline{\partial}_\nu T_D f^- - \overline{\partial}_\nu T_D f^+ \text{ на } \Gamma. \tag{11}$$

Пусть $G \subset D$ есть какая-нибудь область, такая, что $\partial G \cap \partial D \subset \Gamma$. Интегрируя по частям, мы легко запишем потенциал $T_D f$ в виде

$$T_D(f) = T_{D \setminus G} f + P_{\partial G}(\nu(f)) + V_G(\overline{\partial}^* f), \tag{12}$$

где $P_{\partial G} v$ есть потенциал простого слоя с плотностью $v \in C(\partial G)$, а

$$V_G(\overline{\partial}^* f) = \int_G \overline{\partial}^* f(\zeta) \mathfrak{G}(z, \zeta) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta.$$

Теперь из теоремы о скачке производных потенциала простого слоя (см. [7]) мы выводим, что

$$\overline{\partial}_\nu (P^-_{\partial G} \nu(f)) - \overline{\partial}_\nu (P^+_{\partial G} \nu(f)) = \nu(f) \text{ на } \Gamma \cap \partial G,$$

а из теорем об ограниченности потенциальных операторов (см., например, [9, 1.2.3.5]) выводим, что $V(\overline{\partial}^* f) \in H^2_{loc}(\mathbb{C}) \cap C^{p+1,\lambda}(\overline{D}^\pm)$.
Поэтому

$$\overline{\partial}_\nu (V^-_G(\overline{\partial}^* f)) - \overline{\partial}_\nu (V^+_G(\overline{\partial}^* f)) = 0 \text{ на } \Gamma \cap \partial G,$$

а значит, из (12),

$$\overline{\partial}_\nu T_D f^- - \overline{\partial}_\nu T_D f^+ = \nu(f) \text{ на } \Gamma. \tag{13}$$

Таким образом, формулы (11) и (13) означают, что $\nu(g) = 0$ на Γ, т.е.

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(\zeta) g(\zeta) = 0 \text{ для всех } \zeta \in \Gamma. \tag{14}$$

Домножив равенство (9) на $\frac{\partial \rho}{\partial z_i}$, просуммировав по индексу i от 1 до n и учтя (14), мы видим, что

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_i}(\zeta) \right|^2 g_j(\zeta) = 0 \text{ для всех } 1 \leq j \leq n, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{15}$$

С другой стороны, требование гладкости гиперповерхности Γ означает, что $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_i}(\zeta) \right|^2 \neq 0$ для всех $\zeta \in \Gamma$, а поэтому $g_j \equiv 0$ на Γ для всех $1 \leq j \leq n$.

Снова возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с кусочно гладкой границей, для которой $\overline{G} \cap \partial D \subset \Gamma$. Тогда из формулы Мартинелли-Бохнера-Грина следует, что

$$(M^{(1)}_{\partial G \setminus \Gamma} g)(z) + (M^{(2)}_{\partial G \setminus \Gamma} g)(z) = \begin{cases} g(z), & z \in G; \\ 0, & z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{G}. \end{cases} \tag{16}$$

Ясно, что интегралы $(M^{(1)}_{\partial G\setminus\Gamma}g)(z)$ и $(M^{(2)}_{\partial G\setminus\Gamma}g)(z)$ являются гармоническими по переменной z в $D^+\cup\Gamma\cup G$. С другой стороны, согласно формуле (16), их сумма Ψ равна нулю в D^+. Значит, из теоремы единственности для гармонических функций вытекает, что Ψ тождественно равна нулю в $D^+\cup\Gamma\cup G$. Снова используя (16), мы видим, что Ψ совпадает с g в области G. Поэтому форма $g=\overline{\partial}u-f$ равна нулю в тождественно в G, а значит, по теореме единственности для гармонических функций, и в D, что и требовалось доказать. □

Для $f=0$ теорема 1 доказана Айзенбергом и Кытмановым [6].

Замечание 1. *Уместно отметить, что теорема 1 дает не только условия разрешимости задачи 1, но и само решение, если только оно существует (см. формулу (5)). Более того, мы можем не фиксировать область D, поскольку из формулы (5) следует, что решение и существует в той области, куда продолжается потенциал F^+. В любом случае формула (5) зачастую позволяет построить формулу (Карлемана) для решения задачи 1, что мы и продемонстрируем в следующем параграфе.*

Из теоремы 1 легко вытекает теорема Коши-Ковалевской для системы Коши-Римана.

Следствие 1. *Если Γ — вещественно аналитическая гиперповерхность, а u_0 и f вещественно аналитичны в некоторой окрестности Γ, то одновременное выполнение условий* i) *и* ii) *эквивалентно тому, что найдутся окрестность V поверхности Γ и $u\in C^{s,\lambda}(V\cap D\cup\Gamma)$ такие, что $\overline{\partial}u=f$ в $V\cap D$, а $u=u_0$ на Γ.*

Доказательство. Как вытекает из условия следствия, потенциал F^+ аналитически (а значит, и гармонически!) продолжается в некоторую окрестность V гиперповерхности Γ. Применяя теорему 1 к области $D\cap V$ вместо D, мы и получаем требуемое утверждение. □

В заключение этого параграфа мы легко докажем теорему Андреотти-Хилла [11], которая обобщает известную теорему Бохнера-Севери о принудительном голоморфном продолжении с границы области для функций, удовлетворяющих касательным условиям Коши-Римана, даже если ∂D и данные Коши не являются вещественно аналитическими.

Следствие 2 (теорема Андреотти-Хилла)**.** *Если $\Gamma=\partial D$ (и ∂D связна), то задача* 1 *разрешима в том и только в том случае, когда* i) $\overline{\partial}f=0$ *в* D, ii) $\overline{\partial}_b u_0=\tau(f)$. *Более того, в этом случае решение задачи* 1 *совпадает с* F.

Доказательство. Необходимость условий i) и ii) нами установлена выше.

Предположим теперь, что выполнены условия i) и ii). В качестве области D^+ в этом случае можно взять $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$.

Зафиксируем какую-нибудь функцию $v\in C^1(\overline{D})$, совпадающую с u_0 на ∂D. Тогда по формуле Мартинелли-Бохнера (4) мы имеем:

$$0=(M_{\partial D}u_0)(z)+(T_D\overline{\partial}v)(z)\text{ для всех }z\notin\overline{D}.$$

Поэтому

$$F^+(z)=(T_D(f-\overline{\partial}v))(z)\text{ для всех }z\in D^+. \tag{17}$$

Далее, поскольку область D ограничена, то найдется шар B, содержащий $\overline{D}$. Значит, для $z\in\mathbb{C}\setminus B$ ядро Мартинелли-Бохнера есть $\overline{\partial}$ замкнутая дифференциальная форма бистепени $(n,n-1)$ с гладкими коэффициентами по переменной $\zeta\in\overline{B}$ (см., например, [6]).

Зафиксируем какую-нибудь точку $z\in\mathbb{C}\setminus B$. Используя разрешимость $\overline{\partial}$-задачи в шарах, мы заключаем, что существует такая дифференциальная форма $\mathfrak{V}(\zeta,z)$ бистепени $(n,n-2)$ с гладкими коэффициентами по переменной $\zeta\in\overline{B}$, что $\overline{\partial}_\zeta\mathfrak{V}(\zeta,z)=\mathfrak{U}(\zeta,z)$.

По правилу Лейбница дифференцирования дифференциальных форм получаем, что

$$\overline{\partial}_\zeta\left((f-\overline{\partial}v)(\zeta)\wedge\mathfrak{V}(\zeta,z)\right)=\overline{\partial}(f-\overline{\partial}v)(\zeta)\wedge\mathfrak{V}(\zeta,z)+(-1)^{deg(f-\overline{\partial}v)}(f-\overline{\partial}v)(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta\mathfrak{V}(\zeta,z).$$

Теперь, используя i) и (17), с помощью формулы Стокса мы легко получаем

$$F^+(z)=\int_D(f-\overline{\partial}v)(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta\mathfrak{V}(\zeta,z)=-\int_{\partial D}(f-\overline{\partial}v)(\zeta)\wedge\mathfrak{V}(\zeta,z)\text{ для всех }z\in D^+. \tag{18}$$

Кроме того из условия ii), т.е. из соотношений (3), следует, что

$$\int_{\partial D}(f-\overline{\partial}v)(\zeta)\wedge\beta(\zeta)=0\text{ для всех }\beta\in C^1(\overline{D},\Lambda^{(n,n-2)}), \tag{19}$$

см., например, [7]. Следовательно, (18), (19) и связность ∂D позволяют нам сделать вывод, что $F^+ \equiv 0$ в D^+.

Наконец, мы видим, что F^+ гармонически (нулем) продолжается из D^+ в Ω, а значит, из теоремы 1 (применить которую для случая несвязной гиперповерхности $\Gamma = \partial D$ нельзя!), формулы (5) и замечания 1 вытекает утверждение следствия. □

2. Пример построения формулы Карлемана

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $B(R)$ — шар с центром в нуле и радиусом R, а $\Omega = \Omega(r,R) = B(R) \setminus \overline{B}(r)$ $(0 < r < R < \infty)$ есть шаровой слой в $\mathbb{C}^n$. Пусть гладкая связная гиперповерхность $\Gamma \subset \Omega(r,R)$ разбивает $\Omega(r,R)$ на две связные компоненты D^+ и $D = D^-$ так, чтобы $\max(dist(\overline{D}, \partial B(R)), dist(\overline{D}, \partial B(r)) > 0$.

Далее, пусть $\{h_\nu^{(i)}\}$ — система однородных гармонических многочленов, образующих ортонормированный базис в $L^2(\partial B_1)$ (здесь ν — степень однородности, а $J(\nu) = \frac{(2n+2\nu-2)(2n+\nu-3)!}{\nu!(2n-2)!}$ — количество линейно независимых многочленов степени ν в этом базисе, см. [12]).

Следствие 3. *Если $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$, то условие* iii) *в теореме* 1 *эквивалентно следующему:*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\max_{1\le i\le J(\nu)} |\hat{k}_\nu^{(i)}|} \le r, \tag{20}$$

где

$$\hat{k}_\nu^{(i)} = \int_\Gamma u_0(\zeta) \frac{*\partial \overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n+\nu-1} + \int_D f(\zeta) \wedge \frac{*\partial \overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n+\nu-1}. \tag{21}$$

Доказательство. В условиях следствия найдется шаровой слой $\hat{\Omega} = \Omega(\hat{r}, \hat{R}) \Subset D^+$, с некоторыми радиусами $r < \hat{r} < \hat{R} < R$.

Очевидно, $F^+ \in C^\infty(\overline{\Omega}(\hat{r}, \hat{R}))$ гармонична в этом слое. Поэтому мы можем разложить функцию F^+ в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям в $\hat{\Omega}$ (см., например, [13]). Именно,

$$F^+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} k_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \hat{k}_0 \mathfrak{G}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \hat{k}_\nu^{(i)} \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}, \quad z \in \hat{\Omega}, \tag{22}$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из $\hat{\Omega}$, а коэффициенты $k_\nu^{(i)}$, $\hat{k}_\nu^{(i)}$ определены однозначно.

Если $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$, то

$$|z| > |\zeta| \text{ для всех } z \in \hat{\Omega}, \zeta \in \Gamma.$$

Для того чтобы узнать коэффициенты $k_\nu^{(i)}$, $\hat{k}_\nu^{(i)}$, воспользуемся следующим разложением, полученным в [14, лемма 3.2]:

$$\mathfrak{G}(\zeta, z) = \mathfrak{G}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(\zeta)} h_\nu^{(i)}(z)}{(n+\nu-1)|z|^{2n+2\nu-2}},$$

где ряд сходится равномерно на компактных подмножествах конуса $\{z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathbb{C}^n : |z| > |\zeta|\}$.
Из этого разложения немедленно следует, что

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{*\partial_\zeta \overline{h_\nu^{(i)}(\zeta)} h_\nu^{(i)}(z)}{(n+\nu-1)|z|^{2n+2\nu-2}},$$

где ряд также сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из конуса $\{z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathbb{C}^n : |z| > |\zeta|\}$.

Подставляя данное разложение в интегралы $M_\Gamma u_0$ и $T_D f$, мы получим, что $k_\nu^{(i)} = 0$, $\hat{k}_0 = 0$, а $\hat{k}_\nu^{(i)}, \nu \in \mathbb{N}$, заданы формулой (21) для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+, 1 \le i \le J(\nu)$.

Условие iii) в данном случае эквивалентно тому, что функция F^+ является на самом деле гармонической Φ в шаровом слое Ω. Разлагая функцию F^+ в шаровом слое Ω в ряд Лорана по сферическим гармоникам, мы получаем:

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} c_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \hat{c}_0 \mathfrak{G}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \hat{c}_\nu^{(i)} \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}, \quad z \in \hat{\Omega}, \tag{23}$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из Ω, а коэффициенты $c_\nu^{(i)}$, $\hat{c}_\nu^{(i)}$ определены однозначно. Поскольку $\hat{\Omega} \subset \Omega$, разложение справедливо и для $z \in \hat{\Omega}$. Однако коэффициенты разложения определены однозначно, поэтому, сравнивая (22) и (23), мы видим, что $c_\nu^{(i)} = k_\nu^{(i)}$, $\hat{c}_\nu^{(i)} = \hat{k}_\nu^{(i)}$.

Следовательно,

$$\Phi(z) = \frac{1}{|z|^{2n-2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{J(\nu)} \hat{k}_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z/|z|) \right) |z|^{-\nu}, \quad z \in \Omega. \tag{24}$$

Как известно (см. [12, глава IX]),

$$1 \le J(\nu) \le c\nu^{2n-2}, \tag{25}$$

$$\max_{|z|=1} |h_\nu^{(i)}(z)| \le c(n)\nu^{n-1}. \tag{26}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{J(\nu)} \hat{k}_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z/|z|) \le J(\nu) \max_{1 \le i \le J(\nu)} |\hat{k}_\nu^{(i)}| \max_{|z|=1} |h_\nu^{(i)}(z)|.$$

Поэтому из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда и формул (25), (26) немедленно следует, что при выполнении условия (20) ряд (24) сходится в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{B}(r)$, а значит, и в Ω.

Обратно, если ряд (24) сходится в Ω, то, проинтегрировав $|\Phi|^2$ по произвольной сфере радиуса $r < \gamma < R$ и учтя (24), мы получим

$$\frac{1}{\gamma^{2n-2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\max_{1 \le i \le J(\nu)} |\hat{k}_\nu^{(i)}|^2 \right) |\gamma|^{-2\nu} \le \frac{1}{\gamma^{2n-2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{J(\nu)} |\hat{k}_\nu^{(i)}|^2 \right) |\gamma|^{-2\nu} < \infty. \tag{27}$$

В силу произвольности $r < \gamma < R$ и формулы Коши-Адамара мы заключаем, что выполнено условие (20). □

Получим теперь формулу Карлемана задачи 1.

Следствие 4. *Пусть $dist(\overline{D}, \partial B(r)) > 0$. Тогда для всякой функции $v \in C^{s,\lambda}(D \cup \overline{\Gamma})$ такой, что $\overline{\partial} v \in C^{p,\lambda}(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Карлемана:*

$$v(z) = \lim_{N \to \infty} v_N(z) \qquad z \in D, \tag{28}$$

где предел достигается в $C^{s,\lambda}(D \cup \overline{\Gamma})$ (и даже в $C^{p+1,\lambda}_{loc}(D)$)

$$v_N(z) = \left(\int_\Gamma v(\zeta) \mathfrak{C}_N(\zeta, z) + \int_D (\overline{\partial} v)(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta, z) \right),$$

$$a \quad \mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{* \partial_\zeta \overline{h_\nu^{(i)}(\zeta)} h_\nu^{(i)}(z)}{(n+\nu-1)|z|^{2n+2\nu-2}}$$

– ядра Карлемана.

Доказательство. В самом деле, для данных Коши $f = \overline{\partial} u$ и $u_0 = u_{|\Gamma}$ задача Коши 1 разрешима. Поэтому, согласно теореме 1 и следствию 3, выполнены условия i), ii) и (20), а решение u этой задачи задается формулой (5). В силу единственности решения задачи Коши мы заключаем, что $u = v$ в D.

Более того, теперь (см. доказательство следствия 3) мы знаем, что функция Φ задана формулой (24) с коэффициентами (21), т.е. для всех $z \in D \cup \Gamma$ мы имеем

$$v(z) = \int_\Gamma u_0(\zeta)\mathfrak{U}(\zeta, z)) + \int_D (\overline{\partial} v)(\zeta)\mathfrak{U}(\zeta, z))-$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \left(\int_\Gamma u_0(\zeta) * \partial \frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n+\nu-1} + \int_D f(\zeta) \wedge *\partial \frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n+\nu-1} \right) \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}},$$

что и дает тождество (28) после перегруппировки слагаемых.

Что касается характера сходимости, то нужно отметить следующее: функция Φ гармонична в Ω, а ряд (23) состоит из гармонических слагаемых. По этой причине в силу теоремы Стильтьеса-Витали ряд (23) сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из Ω к гармонической функции $v - F^-$.

□

Замечание 2. *Пусть $dist(\overline{D}, \partial B(r)) > 0$. Тогда для всякой функции v, удовлетворяющей условиям следствия 4,*

$$\overline{\partial} v(z) = \lim_{N\to\infty} \overline{\partial} v_N(z) \qquad z \in D,$$

где предел достигается в $C^{p,\lambda}(D \cup \Gamma)$.

Аналогично доказываются следующие утверждения (ср. также [6] для $f \equiv 0$).

Следствие 5. *Если $dist(\overline{D}, \partial B(r)) > 0$, то условие* iii) *в теореме* 1 *эквивалентно следующему:*

$$\limsup_{\nu\to\infty} max_{1\le i\le J(\nu)} \sqrt[\nu]{|k_\nu^{(i)}|} \le 1/R,$$

где

$$k_\nu^{(i)} = \int_\Gamma u_0(\zeta)(*\partial)\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{(n+\nu-1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}} + \int_D f(\zeta) \wedge (*\partial)\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{(n+\nu-1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}}. \tag{29}$$

Следствие 6. *Пусть $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$. Тогда для всякой функции $v \in C^{s,\lambda}(D \cup \overline{\Gamma})$ такой, что $\overline{\partial} v \in C^{p,\lambda}(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Карлемана:*

$$v(z) = \lim_{N\to\infty} v_N(z) \qquad z \in D, \tag{30}$$

где первый предел достигается в $C^{s,\lambda}(D \cup \Gamma)$(и даже в $C^{p+1,\lambda}_{loc}(D)$)

$$v_N(z) = \left(\int_\Gamma v(\zeta)\mathfrak{C}_N(\zeta, z) + \int_D (\overline{\partial} v)(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta, z) \right),$$

а

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \mathfrak{U}(\zeta, 0) + *\partial_\zeta \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(\zeta)} h_\nu^{(i)}(z)}{(n+\nu-1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}}$$

— ядра Карлемана.

Замечание 3. *Пусть $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$. Тогда для всякой функции v, удовлетворяющей условиям следствия 6,*

$$\overline{\partial} v(z) = \lim_{N\to\infty} \overline{\partial} v_N(z) \qquad z \in D,$$

где предел достигается в $C^{p,\lambda}(D \cup \Gamma)$.

Уместно отметить, что при $n = 1$ и $f \equiv 0$ соотношения (28) и (30) суть хорошо известные формулы Голузина-Крылова (см., например, [2]).

Список литературы

[1] Carleman T. *Les fonctions quasianalytiques* / T.Carleman. – Paris: Gauthier-Villars, 1926.

[2] Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемена в комплексном анализе. Первые приложения* / Л.А.Айзенберг. – Новосибирск: Наука, 1990.

[3] Tarkhanov N.N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations* / N.N.Tarkhanov. – Berlin: Akademie Verlag, 1995.

[4] Nacinovich M. *On Carleman formulas for the Dolbeault cohomology* / M.Nacinovich, B.-W.Schulze, N.Tarkhanov // Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Sc. Mat., Suppl. – 1999. – V. XLV. P. 253-262

[5] Хенкин Г.М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе* // Итоги науки и техники. современные проблемы математики(фундаментальные направления)/ Г.М.Хенкин. – М.:ВИНИТИ, 1985.– Т. 7. – С. 23-124.

[6] Айзенберг Л.А. *О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на куске ее границы* / Л.А.Айзенберг, А.М.Кытманов // Мат. сб. – 1991. – Т. 182, N 5. – С. 490-597.

[7] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения* / А.М.Кытманов. – Новосибирск: Наука, 1992.

[8] Kerzman N.H. *ölder and L^p-estimates for solutions of $\overline{\partial} u = f$* / N.H.Kerzman //Comm.Pure and Appl.Math. – 1971. – V.24, №3. – P. 301-379.

[9] Ремпель С. *Теория индекса эллиптических краевых задач* /С.Ремпель, Б.-В.Шульце. – М.: Мир, 1986.

[10] Shlapunov A.A. *Green's Formulas in Complex Analysis* / A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov // Journ. of Math. Sciences. – 2004. – V. 120 (6).

[11] Andreotti A. *E.E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part 1. Reduction to vanishing theorems* / A.Andreotti, D.Hill // Ann. Scuola Norm. Superiore Pisa. – 1972. – V. 26, N 3. – P. 325-363.

[12] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974.

[13] Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем* / Н.Н.Тарханов. – Новосибирск, 1991.

[14] Шлапунов А.А. *О задаче Коши для уравнения Лапласа* / А.А. Шлапунов // Сиб. мат. журнал. – 1992. – Т. 33, N.3. – С. 205-215.

ON THE CAUCHY PROBLEM IN HÖLDER SPACES FOR MULTI-DIMENSIONAL CAUCHY-RIEMANN SYSTEM

D.P.Fedchenko, A.A.Shlapunov

Lat D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ with a piece-smooth boundary ∂D. We describe necessary and sufficient solvability conditions for the Cauchy problem in Hölder spaces in D for multi-dimensional Cauchy-Riemann operator $\overline{\partial}$. As an example we consider such a situation: the domain D is a part of a spherical shell $\Omega(r, R) = B(R) \setminus \overline{B}(r)$ $(0 < r < R < \infty)$, where $B(R)$ is a ball with the center at origin and of radius R, cuttoff by a smooth hypersurface Γ oriented as ∂D. In this case using the Laurent series for harmonic functions in the shell $\Omega(R, r)$ we construct Carleman's formulae for functions from the Hölder space $C^{s,\lambda}(D \cup \overline{\Gamma})$, $s \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda \leq 1$, by their values on $\overline{\Gamma}$ and the values of $\overline{\partial} u$ in D.