

# ГИДРОДИНАМИКА

УДК 532.5:621.22

## ТЕЧЕНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕД С КУСОЧНО ПОСТОЯННЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ И ВЯЗКОСТЯМИ В МЕЖТАРЕЛОЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СЕПАРАТОРА

И.И.Вайнштейн, П.С.Литвинов\*

*В работе рассмотрена гидродинамическая модель межтарелочного потока в сепараторе, состоящего из двух несмешивающихся однородных жидкостей с различными постоянными плотностями и вязкостями. В осесимметричном случае получено уравнение для линии раздела сред и доказано существование его решения. Приведены графики линии раздела при различных значениях параметров.*

К настоящему времени наиболее полное исследование гидродинамики межтарелочных потоков и процессов осаждения частиц в сепараторах получено в рамках линейной теории [1], где наряду с другими предположениями принимается, что поток в межтарелочном пространстве сепаратора однороден (постоянная плотность и вязкость) и в таком потоке изучаются процессы осаждения частиц.

При наиболее типичных видах разделения и очистки, производимых с помощью аппаратов, родственных жидкостному сепаратору, например, разделение двух несмешивающихся жидкостей: очистка топлива и масел от воды и загрязнений, обезжиривание или осветление молока и др. - можно в отличие от требования однородности всего потока в первом приближении принять, что в межтарелочном пространстве образуются два потока с различными постоянными вязкостями  $\mu_j$  и плотностями  $\rho_j$ , ( $j = 1, 2$ ) (рис. 1).

В связи с этим представляет интерес изучение гидродинамики таких потоков и процессов осаждения в них частиц применительно к различным технологическим процессам, которые осуществляются в сепараторе.

Рассмотрим общую постановку задачи. Пусть слой с индексом  $j = 1$  примыкает к верхней тарелке сепаратора.

Для каждого слоя запишем уравнения Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{V}_j}{dt} = \vec{F}_j - \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j + \nu_j \Delta \vec{V}_j \quad (1)$$

и неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{V}_j = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{V}_j$  — вектор относительной скорости движения частицы жидкости,  $\vec{F}_j$  — массовые силы (центробежная и Кориолисова), отнесенные к единичной массе,  $p_j$  — давление,  $\nu_j$  — кинематическая вязкость,  $\rho_j$  — плотность жидкости. Рассматривается установившееся течение.

На тарелках (верхней и нижней) выполняется условие прилипания.

На поверхности раздела сред  $\Gamma$  требуется выполнение равенств [2], [3]

$$\vec{V}_1|_{\Gamma} = \vec{V}_2|_{\Gamma}, \quad (\vec{V}_1 \cdot \vec{n})|_{\Gamma} = (\vec{V}_2 \cdot \vec{n})|_{\Gamma} = 0, \quad \bar{P}_1|_{\Gamma} \cdot \vec{n} - \bar{P}_2|_{\Gamma} \cdot \vec{n} = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{P}_j$  — тензоры напряжений,  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности раздела, направленная в сторону нижней тарелки.

Следуя [1], перейдем в биконическую систему координат  $(\delta, \varphi, x)$ , жестко связанную с пакетом тарелок.

$$\xi = (\delta \sin \alpha - x \cos \alpha) \cos \varphi = r \cos \varphi, \quad \zeta = \delta \cos \alpha + x \sin \alpha;$$

\*© И.И.Вайнштейн, П.С.Литвинов, Красноярский государственный технический университет, 2006.

$$\eta = (\delta \sin \alpha - x \cos \alpha) \sin \varphi = r \sin \varphi, \quad r = \delta \sin \alpha - x \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол конусности.



Рис. 1. Межтарелочное пространство сепаратора

Пусть  $U_j, V_j, W_j$  — безразмерные составляющие скорости движения частицы жидкости в продольном, окружном и поперечном направлениях,  $P_j$  — безразмерное динамическое давление.

$$V_{j\delta} = V_0 U_j, \quad V_{j\varphi} = V_0 V_j, \quad V_{jx} = \frac{h}{\delta_0} V_0 W_j, \quad p_j = 2r_0 \omega V_0 \rho_j P_j + \frac{\omega^2 r^2}{2} \rho_j,$$

$$s = \ell \sin \alpha - \frac{h}{\delta_0} \chi \cos \alpha, \quad r = \delta_0 s, \quad r_0 = \delta_0 \sin \alpha, \quad \delta = \delta_0 \ell, \quad x = h \chi, \quad V_0 = \frac{Q}{(2\pi r_0 h)},$$

$\ell, \chi$  — безразмерные координаты,  $\delta_0$  — длина образующей тарелки,  $h$  — расстояние между двумя соседними тарелками,  $\omega$  — угловая скорость вращения тарелки,  $Q$  — общий расход жидкости в межтарелочном пространстве,  $V_0$  — характерная скорость.

Система уравнений Навье-Стокса (1) и уравнение неразрывности (2) после линеаризации (отбрасываются члены, содержащие малый параметр  $\frac{h}{\delta_0}$  — специфическую особенность межтарелочного пространства, заключающуюся в том, что  $\frac{h}{\delta_0} \ll 1$ ) примет вид [1]

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial \chi^2} + 2\lambda_j^2 V_j = 2\lambda_j^2 \frac{\partial P_j}{\partial \ell}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial \chi^2} - 2\lambda_j^2 U_j = 2\lambda_j^2 \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_j}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial \chi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\ell U_j)}{\partial \ell} + \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial(\ell V_j)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\ell W_j)}{\partial \chi} = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_j = h \sqrt{\frac{\omega \sin \alpha}{\nu_j}} \quad \text{— безразмерный параметр.}$$

Здесь учли, что для большинства сепараторов числа Рейнольдса, содержащие множитель  $\frac{h}{\delta_0}$ , невелики. Поэтому конвективными членами в уравнениях (1), (2) можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Кроме того, в силах вязкости и в слагаемых, соответствующих силам Кориолиса, также пренебрегаем теми членами, которые имеют порядок  $\frac{h}{\delta_0}$  и выше.

При  $\chi = 0, \chi = 1$  (условия прилипания)

$$U_1 = V_1 = W_1 = 0, \quad \chi = 0, \quad (8)$$

$$U_2 = V_2 = W_2 = 0, \quad \chi = 1. \quad (9)$$

На поверхности раздела  $\Gamma$

$$V_1 = V_2, \quad U_1 = U_2, \quad W_1 = W_2. \quad (10)$$

Рассмотрим второе и третье условия в (3). Записав компоненты тензора напряжений в биконической системе координат и отбросив члены, содержащие малый параметр  $\frac{h}{\delta_0}$ , получим

$$P_{xx}^{(j)} = P_{\delta\delta}^{(j)} = P_{\varphi\varphi}^{(j)} = -\frac{2V_0\delta_0\mu_j}{h^2}\lambda_j^2 \left( P_j + \frac{\ell^2}{2\eta_0} \right),$$

$$P_{x\delta}^{(j)} = \mu_j \frac{V_0}{h} \frac{\partial U_j}{\partial \chi}, \quad P_{x\varphi}^{(j)} = \mu_j \frac{V_0}{h} \frac{\partial V_j}{\partial \chi}, \quad P_{\delta\varphi}^{(j)} = \mu_j \frac{V_0}{\delta_0} \left( \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial U_j}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_j}{\partial \ell} - \frac{V_j}{\ell} \right),$$

здесь

$$\eta_0 = \frac{V_0}{r_0\omega} \quad \text{— безразмерный параметр.}$$

Пусть  $\chi = f(\ell, \varphi)$  — безразмерная поверхность раздела сред. Нормаль  $\vec{n}$  к поверхности раздела в биконической системе координат имеет вид

$$\vec{n} = \left( -\frac{1}{\delta_0} \frac{\partial f}{\partial \ell}; -\frac{1}{\delta_0(\ell \sin \alpha - \frac{h}{\delta_0} \chi \cos \alpha)} \frac{\partial f}{\partial \varphi}; \frac{1}{h} \right).$$

Второе и третье условия в (3) с учетом малости  $\frac{h}{\delta_0}$  принимают вид

$$-U_j \frac{\partial f}{\partial \ell} - \frac{1}{\ell \sin \alpha} V_j \frac{\partial f}{\partial \varphi} + W_j = 0, \quad (11)$$

$$\mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \chi} = \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial \chi}, \quad \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \chi} = \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial \chi}, \quad (12)$$

$$\rho_1 \left( P_1 + \frac{\ell^2}{2\eta_0} \right) = \rho_2 \left( P_2 + \frac{\ell^2}{2\eta_0} \right). \quad (13)$$

Окончательно приходим к задаче: требуется найти уравнение поверхности раздела сред  $\chi = f(\ell, \varphi)$  и решение системы (4)–(7), удовлетворяющие условиям (8)–(13).

Перейдем к решению задачи. Из (6) следует, что  $P_j$  не зависит от  $\chi$ , т.е.  $P_j = P_j(\ell, \varphi)$ . Следуя [1], введем комплексную скорость

$$\Omega_j = V_j + iU_j.$$

Тогда уравнения (4) и (5) можно записать в виде одного уравнения

$$-i \frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial \chi^2} + 2\lambda_j^2 \Omega_j = 2\lambda_j^2 F_j, \quad (14)$$

где

$$F_j = \frac{\partial P_j}{\partial \ell} - \frac{i}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_j}{\partial \varphi}.$$

Из (13) следует  $P_2(\ell, \varphi) = kP_1(\ell, \varphi) + \frac{(k-1)\ell^2}{2\eta_0}$ , где  $k = \frac{\rho_1}{\rho_2}$  и

$$F_2 = kF_1 + \frac{k-1}{\eta_0} \ell. \quad (15)$$

Из граничных условий (8), (9), (10)

$$\Omega_1|_{\chi=0} = 0, \quad \Omega_2|_{\chi=1} = 0, \quad \Omega_1|_{\chi=f(\ell,\varphi)} = \Omega_2|_{\chi=f(\ell,\varphi)}. \quad (16)$$

Условия (12) запишутся в виде

$$\mu_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \chi} = \mu_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \chi} \quad \text{при} \quad \chi = f(\ell, \varphi). \quad (17)$$

Положим на поверхности раздела  $\chi = f(\ell, \varphi)$

$$\Omega_1|_{\chi=f(\ell,\varphi)} = \Omega_2|_{\chi=f(\ell,\varphi)} = \Omega_f = V_f + iU_f, \quad (18)$$

где  $\Omega_f$  — неизвестная функция.

Уравнение (14) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка по переменной  $\chi$ . Его решение имеет вид

$$\Omega_j = C_{1j} e^{\lambda_j(1-i)\chi} + C_{2j} e^{-\lambda_j(1-i)\chi} + F_j.$$

Здесь учли, что  $F_j$  не зависит от  $\chi$ .

Удовлетворяя условиям (16), получаем

$$\Omega_j = (M_j + iN_j)F_j + (m_j + in_j)\Omega_f, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_1(f - \chi) \cos \lambda_1 \chi + \operatorname{ch} \lambda_1 \chi \cos \lambda_1(f - \chi)}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, \\ N_1 &= -\frac{\operatorname{sh} \lambda_1(f - \chi) \sin \lambda_1 \chi + \operatorname{sh} \lambda_1 \chi \sin \lambda_1(f - \chi)}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, \\ m_1 &= \frac{\operatorname{ch} \lambda_1(f + \chi) \cos \lambda_1(f - \chi) - \operatorname{ch} \lambda_1(f - \chi) \cos \lambda_1(f + \chi)}{\operatorname{ch} 2\lambda_1 f - \cos 2\lambda_1 f}, \\ n_1 &= \frac{\operatorname{sh} \lambda_1(f + \chi) \sin \lambda_1(f - \chi) - \operatorname{sh} \lambda_1(f - \chi) \sin \lambda_1(f + \chi)}{\operatorname{ch} 2\lambda_1 f - \cos 2\lambda_1 f}, \\ M_2 &= 1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_2(1 - \chi) \cos \lambda_2(\chi - f) + \operatorname{ch} \lambda_2(\chi - f) \cos \lambda_2(1 - \chi)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1 - f) + \cos \lambda_2(1 - f)}, \\ N_2 &= -\frac{\operatorname{sh} \lambda_2(1 - \chi) \sin \lambda_2(\chi - f) + \operatorname{sh} \lambda_2(\chi - f) \sin \lambda_2(1 - \chi)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1 - f) + \cos \lambda_2(1 - f)}, \\ m_2 &= \frac{\operatorname{ch} \lambda_2(2 - f - \chi) \cos \lambda_2(\chi - f) - \operatorname{ch} \lambda_2(\chi - f) \cos \lambda_2(2 - f - \chi)}{\operatorname{ch} 2\lambda_2(1 - f) - \cos 2\lambda_2(1 - f)}, \\ n_2 &= \frac{\operatorname{sh} \lambda_2(2 - f - \chi) \sin \lambda_2(\chi - f) - \operatorname{sh} \lambda_2(\chi - f) \sin \lambda_2(2 - f - \chi)}{\operatorname{ch} 2\lambda_2(1 - f) - \cos 2\lambda_2(1 - f)}. \end{aligned}$$

Удовлетворяя условию (17), получим

$$\mu_1(M'_1 + iN'_1)F_1 + \mu_1(m'_1 + in'_1)\Omega_f = \mu_2(M'_2 + iN'_2)F_2 + \mu_2(m'_2 + in'_2)\Omega_f, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} M'_1 &= \lambda_1 \frac{\sin \lambda_1 f - \operatorname{sh} \lambda_1 f}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, \quad N'_1 = \lambda_1 \frac{\operatorname{sh} \lambda_1 f + \sin \lambda_1 f}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, \\ m'_1 &= \lambda_1 \frac{\operatorname{sh} 2\lambda_1 f + \sin 2\lambda_1 f}{\operatorname{ch} 2\lambda_1 f - \cos 2\lambda_1 f}, \quad n'_1 = \lambda_1 \frac{\sin 2\lambda_1 f - \operatorname{sh} 2\lambda_1 f}{\operatorname{ch} 2\lambda_1 f - \cos 2\lambda_1 f}, \\ M'_2 &= \lambda_2 \frac{\operatorname{sh} \lambda_2(1 - f) - \sin \lambda_2(1 - f)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1 - f) + \cos \lambda_2(1 - f)}, \quad N'_2 = \lambda_2 \frac{-\operatorname{sh} \lambda_2(1 - f) - \sin \lambda_2(1 - f)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1 - f) + \cos \lambda_2(1 - f)}, \end{aligned}$$

$$m'_2 = \lambda_2 \frac{-\operatorname{sh} 2\lambda_2(1-f) - \sin 2\lambda_2(1-f)}{\operatorname{ch} 2\lambda_2(1-f) - \cos 2\lambda_2(1-f)}, \quad n'_2 = \lambda_2 \frac{\operatorname{sh} 2\lambda_2(1-f) - \sin 2\lambda_2(1-f)}{\operatorname{ch} 2\lambda_2(1-f) - \cos 2\lambda_2(1-f)}.$$

Учитывая соотношение (15), из (20) определяем  $\Omega_f$

$$\Omega_f = (A + iB)F_1 + (C + iD)\frac{k-1}{\eta_0}\ell, \quad (21)$$

где  $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ,

$$A = \frac{(kM'_2 - \mu M'_1)(\mu m'_1 - m'_2) + (kN'_2 - \mu N'_1)(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2},$$

$$B = \frac{(kN'_2 - \mu N'_1)(\mu m'_1 - m'_2) - (kM'_2 - \mu M'_1)(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2},$$

$$C = \frac{M'_2(\mu m'_1 - m'_2) + N'_2(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2}, \quad D = \frac{N'_2(\mu m'_1 - m'_2) - M'_2(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2}.$$

После подстановки (21) в (19), выделяя мнимую и действительную части, получим представление для скоростей  $V_j$  и  $U_j$  через давление

$$V_j = \bar{M}_j \frac{\partial P_1}{\partial \ell} + \bar{N}_j \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \bar{m}_j \frac{k-1}{\eta_0} \ell, \quad (22)$$

$$U_j = \bar{N}_j \frac{\partial P_1}{\partial \ell} - \bar{M}_j \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \bar{n}_j \frac{k-1}{\eta_0} \ell, \quad (23)$$

где

$$\bar{M}_1 = M_1 + Am_1 - Bn_1, \quad \bar{N}_1 = N_1 + Bm_1 + An_1, \quad \bar{M}_2 = kM_2 + Am_2 - Bn_2,$$

$$\bar{N}_2 = kN_2 + Bm_2 + An_2, \quad \bar{m}_1 = Cm_1 - Dn_1, \quad \bar{n}_1 = Dm_1 + Cn_1,$$

$$\bar{m}_2 = M_2 + Cm_2 - Dn_2, \quad \bar{n}_2 = N_2 + Dm_2 + Cn_2.$$

Далее интегрируем уравнение неразрывности (7) по  $\chi$  от 0 до  $f(\ell, \varphi)$  и от  $f(\ell, \varphi)$  до 1 соответственно.

$$\begin{aligned} \ell W_1|_{\chi=f} &= - \int_0^{f(\ell, \varphi)} \left( \frac{\partial(\ell U_1)}{\partial \ell} + \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial(\ell V_1)}{\partial \varphi} \right) d\chi = \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial \ell} \int_0^{f(\ell, \varphi)} \ell U_1 d\chi - \ell U_1|_{\chi=f} \frac{\partial f}{\partial \ell} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{f(\ell, \varphi)} V_1 d\chi - \frac{1}{\sin \alpha} V_1|_{\chi=f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Удовлетворяем условиям (11). После подстановки  $W_1|_{\chi=f}$  из (24) в (11) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \int_0^{f(\ell, \varphi)} \ell U_1 d\chi + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{f(\ell, \varphi)} V_1 d\chi = 0. \quad (25)$$

Аналогично, интегрируя от  $f(\ell, \varphi)$  до 1, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \int_{f(\ell, \varphi)}^1 \ell U_2 d\chi + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{f(\ell, \varphi)}^1 V_2 d\chi = 0. \quad (26)$$

Уравнения (25), (26) после подстановки скоростей  $U_j, V_j$  из (22), (23) и учета, что давление  $P_1$  не зависит от  $\chi$ , принимают вид

$$\bar{N}_j^0 L P_1 + \left( \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \bar{M}_j^0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \ell \frac{\partial \bar{N}_j^0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \ell} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \ell} + \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial \bar{N}_j^0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{M}_j^0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \ell} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{k-1}{\eta_0} \ell \left( \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \bar{m}_j^0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \ell \frac{\partial \bar{n}_j^0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \ell} + 2\bar{n}_j^0 \right) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_1^0 &= \int_0^{f(\ell, \varphi)} \bar{N}_1 d\chi = N_1^0 + Bm_1^0 + An_1^0, & \bar{n}_1^0 &= \int_0^{f(\ell, \varphi)} \bar{n}_1 d\chi = Dm_1^0 + Cn_1^0, \\ \bar{N}_2^0 &= \int_{f(\ell, \varphi)}^1 \bar{N}_2 d\chi = kN_2^0 + Bm_2^0 + An_2^0, & \bar{n}_2^0 &= \int_{f(\ell, \varphi)}^1 \bar{n}_2 d\chi = N_2^0 + Dm_2^0 + Cn_2^0, \\ \bar{M}_1^0 &= \int_0^{f(\ell, \varphi)} \bar{M}_1 d\chi = M_1^0 + Am_1^0 - Bn_1^0, & \bar{m}_1^0 &= \int_0^{f(\ell, \varphi)} \bar{m}_1 d\chi = Cm_1^0 - Dn_1^0, \\ \bar{M}_2^0 &= \int_{f(\ell, \varphi)}^1 \bar{M}_2 d\chi = kM_2^0 + Am_2^0 - Bn_2^0, & \bar{m}_2^0 &= \int_{f(\ell, \varphi)}^1 \bar{m}_2 d\chi = M_2^0 - Cm_2^0 - Dn_2^0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_1^0 &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\sin \lambda_1 f - \operatorname{sh} \lambda_1 f}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, & n_1^0 &= \frac{1}{2\lambda_1} \frac{\operatorname{sh} \lambda_1 f - \sin \lambda_1 f}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, \\ N_2^0 &= \frac{1}{\lambda_2} \frac{\sin \lambda_2(1-f) - \operatorname{sh} \lambda_2(1-f)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1-f) + \cos \lambda_2(1-f)}, & n_2^0 &= \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_2(1-f) - \sin \lambda_2(1-f)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1-f) + \cos \lambda_2(1-f)}, \\ m_1^0 &= \frac{1}{2\lambda_1} \frac{\operatorname{sh} \lambda_1 f + \sin \lambda_1 f}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, & m_2^0 &= \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_2(1-f) + \sin \lambda_2(1-f)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1-f) + \cos \lambda_2(1-f)}, \\ M_1^0 &= f - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\operatorname{sh} \lambda_1 f + \sin \lambda_1 f}{\operatorname{ch} \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f}, & M_2^0 &= 1 - f - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_2(1-f) + \sin \lambda_2(1-f)}{\operatorname{ch} \lambda_2(1-f) + \cos \lambda_2(1-f)}, \end{aligned}$$

$$LP_1 = \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \ell \frac{\partial P_1}{\partial \ell} \right) + \frac{1}{\ell \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \varphi^2}.$$

$LP_1$  — оператор Лапласа, записанный в биконической системе координат.

Таким образом, приходим к системе уравнений с частными производными (27) для определения двух функций — давления и поверхности раздела.

Рассмотрим осесимметрический случай задачи. Скорости  $U_j, V_j, W_j$ , давления  $P_j$  и линия раздела не зависят от  $\varphi$ ,  $\chi = f(\ell)$  ( $\chi = \text{const}$  рассмотрен в [4]).

В этом случае система (25), (26) примет вид

$$\frac{d}{d\ell} \int_0^{f(\ell)} (\ell U_1) d\chi = 0, \quad \frac{d}{d\ell} \int_{f(\ell)}^1 (\ell U_2) d\chi = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^{f(\ell)} (\ell U_1) d\chi = C_1, \quad \int_{f(\ell)}^1 (\ell U_2) d\chi = C_2. \quad (28)$$

Подставляя  $U_j$  из (23) с соответствующими индексами в (28) и после вынесения из-под знака интеграла величин, не зависящих от  $\chi$ , получаем систему для определения давления и линии раздела

$$\begin{cases} \ell \frac{\partial P_1}{\partial \ell} \bar{N}_1^0 + \bar{n}_1^0 \frac{k-1}{\eta_0} \ell^2 = C_1 \\ \ell \frac{\partial P_1}{\partial \ell} \bar{N}_2^0 + \bar{n}_2^0 \frac{k-1}{\eta_0} \ell^2 = C_2. \end{cases} \quad (29)$$

После исключения из системы (29)  $\frac{\partial P_1}{\partial \ell}$  получаем уравнение для неизвестной линии раздела

$$\bar{N}_2^0(C_1 + \beta \ell^2 \bar{n}_1^0) - \bar{N}_1^0(C_2 + \beta \ell^2 \bar{n}_2^0) = 0, \quad \beta = \frac{1-k}{\eta_0}. \quad (30)$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  определяем из условия общего расхода

$$Q = 2\pi r h V_0 \left( \int_0^{f(\ell)} U_1 d\chi + \int_{f(\ell)}^1 U_2 d\chi \right) = 2\pi r h V_0 \left( \bar{N}_1^0 \frac{\partial P_1}{\partial \ell} + \bar{n}_1^0 \frac{k-1}{\eta_0} \ell + \bar{N}_2^0 \frac{\partial P_1}{\partial \ell} + \bar{n}_2^0 \frac{k-1}{\eta_0} \ell \right).$$

Учитывая

$$V_0 = \frac{Q}{(2\pi h \delta_0 \sin \alpha)}, \quad r = \ell \delta_0 \sin \alpha,$$

получим

$$Q = Q \ell \left( \bar{N}_1^0 \frac{\partial P_1}{\partial \ell} - \bar{n}_1^0 \beta \ell + \bar{N}_2^0 \frac{\partial P_1}{\partial \ell} - \bar{n}_2^0 \beta \ell \right). \quad (31)$$

Отсюда с учетом системы (29) получаем  $C_1 + C_2 = 1$ . Для нахождения  $C_1$  определим расход в первом слое  $Q_1$ :

$$Q_1 = 2\pi r h V_0 \int_0^{f(\ell)} U_1 d\chi = Q \ell \left( \bar{N}_1^0 \frac{\partial P_1}{\partial \ell} - \bar{n}_1^0 \beta \ell \right) = Q C_1.$$

Таким образом,  $C_1 = \frac{Q_1}{Q}$ ,  $C_2 = \frac{Q_2}{Q}$  - относительные расходы в первом и втором слоях соответственно.  $0 < C_1, C_2 < 1$ .

Перепишем уравнение (30) в виде

$$\Phi(\ell, f(\ell)) = \bar{N}_2^0(C_1 + \beta \ell^2 \bar{n}_1^0) - \bar{N}_1^0(1 - C_1 + \beta \ell^2 \bar{n}_2^0) = 0. \quad (32)$$

Функции  $\bar{N}_1^0, \bar{N}_2^0, \bar{n}_1^0, \bar{n}_2^0$  непрерывны по  $f$  при  $0 < f < 1$ . Далее находим значения следующих пределов:

$$\lim_{f(\ell) \rightarrow 0} \Phi(\ell, f) = \lim_{f(\ell) \rightarrow 0} \frac{k \sin \lambda_2 - \text{sh } \lambda_2}{\lambda_2 \text{ ch } \lambda_2 + \cos \lambda_2} C_1 < 0,$$

$$\lim_{f(\ell) \rightarrow 1} \Phi(\ell, f) = \lim_{f(\ell) \rightarrow 1} -\frac{k \sin \lambda_1 - \text{sh } \lambda_1}{\lambda_1 \text{ ch } \lambda_1 + \cos \lambda_1} (1 - C_1) > 0,$$

при любых  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . И так как функция  $\Phi(\ell, f(\ell))$  после доопределения в точках  $f = 0$  и  $f = 1$  ее предельными значениями, при любом фиксированном  $0 \leq \ell \leq 1$ , непрерывна как функция одной переменной  $f$  и на концах отрезка  $[0; 1]$  принимает значения разных знаков, то уравнение (32) имеет относительно  $f$  решение. Таким образом, доказано существование линии раздела в осесимметричном случае.

При  $k = 1$ ,  $\beta = 0$  в уравнение, определяющее линию раздела, явно не входит переменная  $\ell$ . Отсюда следует, что в этом случае линия раздела - прямая параллельная образующим тарелок.

После определения поверхности раздела и давления по формулам (22)-(24) находим скорости. Зная скорости и давление, можно решать различные теоретические и экспериментальные задачи, связанные с гидродинамикой тонкослойных потоков жидкости в барабанах сепараторов и процессов тонкослойного сепарирования.

Составлена программа для нахождения линии раздела и скоростей в зависимости от входящих в уравнение параметров. При каждом фиксированном  $\ell$  соответствующее значение  $f(\ell)$  находили, решая уравнение (30) методом деления отрезка пополам с задаваемой точностью.

На рис. 2 представлены линии раздела в зависимости от плотностей, которые играют основную роль в процессах сепарирования. Расчеты проведены (в системе СИ) при  $\mu_1 = 0,0085$ ,  $\mu_2 = 0,0058$ ,  $\omega = 120$ ,  $\eta_0 = 0,008$ ,  $h = 0,0005$ ,  $C_1 = 0,8$ ,  $\rho_2 = 886$ . Случаю  $\rho_1 = \rho_2 = 886$  соответствует прямая. Графики, лежащие выше прямой, соответствуют  $\rho_1 = 1286$  и  $\rho_1 = 1686$ . Выше расположены графики при  $C_1 = 0,1$  и при предыдущих значениях остальных параметров.



Рис. 2. Межтарелочный поток

## Список литературы

- [1] Гольдин А.М. *Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования* / А.М.Гольдин, В.А.Карамзин. – М.: Агропромиздат, 1985. – 263 с.
- [2] ПУХНАЧЕВ В.В. *Движение вязкой жидкости со свободными границами* / В.В.Пухначев. – Новосибирск: НГУ, 1989. – 96 с.
- [3] АНДРЕЕВ В.К. *Математическое моделирование конвективных течений* / В.К.Андреев, Ю.А.Гапоненко. – Красноярск: КрасГУ, 2006. – 392 с.
- [4] ВАЙНШТЕЙН И.И. *Линеаризованная задача о течении двухслойных жидкостей с кусочно-постоянными плотностями и вязкостями и осаждение частиц в межтарелочном пространстве сепаратора* / И.И.Вайнштейн, П.С.Литвинов. – Красноярск: КГТУ, 1997. – С. 21-32.

### THE FLOW OF DOUBLE-LAYERS SURROUNDINGS WITH PIECEWISE CONSTANT DENSITIES AND VISCOSITIES IN INTERPOLATES SPACE OF THE SEPARATOR

I.I.Vainshtein, P.S.Litvinov

*It is considered the hydrodynamic model of the interpolates stream in the separator, consisting of two unmixed homogeneous fluids with the different constant densities and viscosities. In the axially symmetric case the equation for the line of the surrounding separator is given and the existence of its solution is proved. Graphics of lines of the separation for different values of parameters are reduced.*