УДК 544.512

ПЛОТНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ В СИСТЕМАХ ТРОЕК ШТЕЙНЕРА

Е.В.Антосяк, В.В.Беляев*

В данной работе вводятся новые понятия плотного подмножества и плотной подсистемы в системах троек Штейнера и устанавливаются некоторые ограничения на их порядки.

Введение

Сначала дадим определения основных понятий, которые используются в данной работе и потребуются нам для формулировки основных результатов.

Определение 1.1. Пусть S — непустое конечное множество, элементы которого мы будем называть *точками*, и $\mathcal{B}(S)$ — семейство подмножеств из S, элементы которого мы будем называть *блоками*. Множество S вместе с выделенной системой блоков $\mathcal{B}(S)$ называют *системой троек Штейнера*, если выполняются следующие два условия:

(STS1) любой блок состоит из трех точек,

(STS2) любые две различные точки содержатся в единственном блоке.

Мощность множества точек S называют *порядком* системы S. Семейство блоков системы троек Штейнера S мы будем в дальнейшем обозначать через $\mathcal{B}(S)$.

Заметим, что в определении систем троек Штейнера обычно добавляют еще одно условие: множество S содержит более трех точек, или, другими словами, порядок S больше 3. Мы отказываемся от этого ограничения, считая, что множество S может быть произвольным непустым конечным множеством. Такое расширенное толкования понятия систем троек Штейнера приводит очевидным образом к появлению новых тривиальных систем троек Штейнера. Первая тривиальная система троек состоит из одноточечного множества S и пустого семейства блоков $\mathcal{B}(S)$. Вторая тривиальная система троек состоит из трехточечного множества S и одного блока, совпадающего с множеством S. Ясно, что и в первом, и во втором случаях условия (STS1) и (STS2) будут выполняться.

Определение 1.2. Непустое множество H из системы троек Штейнера S мы будем называть *подсистемой* в S, если любой блок из $\mathcal{B}(S)$, содержащий хотя бы две различные точки из H, полностью содержится в H. Подсистему H из S мы будем называть *собственной подсистемой* в S, если $H \neq S$.

Легко увидеть, что если H — подсистема в S, то H вместе со всеми блоками из $\mathcal{B}(S)$, содержащимися в H, образует систему троек Штейнера.

Определение 1.3. Подмножество P из системы троек Штейнера S мы будем называть *плотным* в S, если любой блок системы S содержит хотя бы одну точку из P. Плотное подмножество P, которое одновременно является собственной подсистемой в S, мы будем называть *плотной подсистемой* в S.

При изучении подсистем и плотных подмножеств в системах троек Штейнера возникают два естественных вопроса: насколько большим может быть порядок собственной подсистемы и насколько мал может быть порядок плотного подмножества в системе троек Штейнера S по сравнению с порядком S? Удивительно то, что эти, казалось бы, различные вопросы тесно связаны между собой, а именно справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.4. *Пусть H — собственная подсистема в системе троек Штейнера S. Тогда*

$$|S| \geq 2|H| + 1.$$

Более того, если $|S| = 2|H| + 1$, то H — плотное подмножество в S и, следовательно, H — плотная подсистема в S.

Теорема 1.5. *Пусть P — плотное подмножество в системе троек Штейнера S. Тогда*

$$|S| \leq 2|P| + 1.$$

*© Е.В.Антосяк, Красноярский государственный университет; В.В.Беляев, Московский физико-технический институт (университет), 2006.

Более того, если $|S| = 2|P| + 1$, то P — подсистема в S и, следовательно, P — плотная подсистема в S.

Таким образом, оценки для порядков подсистем и плотных подмножеств, данные в теоремах 1.4 и 1.5, не улучшаемы в том и только том случае, когда система троек Штейнера содержит плотные подсистемы. Отметим также, что из теорем 1.4 и 1.5 вытекает

Теорема 1.6. *Пусть H — плотная подсистема в системе троек Штейнера S. Тогда*

$$|S| = 2|H| + 1.$$

Известно [1], что порядок любой системы троек Штейнера имеет вид $6k+1$ или $6k+3$, где k — произвольное неотрицательное целое число, причем для всех чисел указанного вида существуют системы троек Штейнера такого порядка (теорема 15.4.3). Учитывая теорему 15.4.3, мы получаем следующую теорему.

Теорема 1.7. *Если система троек Штейнера S содержит плотную подсистему, то $|S| \equiv 3(mod 12)$ или $|S| \equiv 7(mod 12)$.*

Теорема 1.7 вызывает новые вопросы.

Вопрос 1. Верно ли, что для любого натурального n вида $12k + 3$ или $12k + 7$, где k — произвольное неотрицательное целое число, найдется система троек Штейнера порядка n, содержащая плотную подсистему?

Вопрос 2. Любая ли система троек Штейнера порядков $12k+3$ или $12k+7$ содержит плотную подсистему?

Следующий результат, полученный в данной работе, касается взаимного расположения плотных подсистем в системе троек Штейнера, в том случае, конечно, если такие найдутся. Здесь нас также ожидает достаточно интересный факт.

Теорема 1.8. *Пусть H_1 и H_2 — различные плотные подсистемы в системе троек Штейнера S. Тогда теоретико-множественное дополнение в S симметрической разности H_1 и H_2 также образует плотную подсистему в S.*

Итак, если H_1 и H_2 — различные плотные подсистемы в S, то, взяв объединение множеств $H_1 \cap H_2$ и $(S \setminus H_1) \cap (S \setminus H_2)$, мы получим снова плотную подсистему $H_3 := (H_1 \cap H_2) \cup ((S \setminus H_1) \cap (S \setminus H_2))$.

Ясно, что $S = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, причем $H_1 \cap H_2 = H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_3$.

В частности, из теоремы 1.8 следует, что возможен один из двух взаимоисключающих случаев: либо система троек Штейнера содержит единственную плотную подсистему, либо объединение всех плотных подсистем совпадает со всей системой.

При проведении доказательств изложенных выше результатов нам будет удобно пользоваться алгебраической терминологией, точнее бинарной операцией, которая естественным образом определяется в системах троек Штейнера. Определение этой операции будет дано в разделе 1. Раздел 2 данной работы посвящен доказательству теорем 1.4–1.7, а в разделе 3 будет доказана теорема 1.8.

1. Группоиды Штейнера

С помощью условий (STS1) и (STS2) на множестве точек в системе троек Штейнера S можно естественным образом определить частичную бинарную операцию "сложения" точек. Действительно, пусть x и y — произвольные различные точки из S. Согласно условию (STS2), пара точек x и y содержится в единственном блоке $B \in \mathcal{B}(S)$. Так как, согласно (STS1), блок B состоит из трех точек, то кроме точек x и y блок B содержит еще одну точку z. Таким образом, любая пара различных точек из S однозначно определяет некоторую точку. Полагая $z := x + y$, мы получаем бинарную операцию, определенную на парах различных точек, которую мы будем называть *сложением.* Частичную операцию сложения можно доопределить на множество всех пар точек из S по правилу

(GS1) $x + x = x$

для любой точки $x \in S$.

Итак, мы получили бинарную операцию, определенную уже для любой пары точек. Очевидно, что операция сложения, определенная на S, обладает следующими свойствами:

(GS2) $x + y = y + x$;

(GS3) $x + (x + y) = y$

для произвольных $x, y \in S$.

Далее, множество, на котором определена бинарная операция, удовлетворяющая тождествам (GS1), (GS2) и (GS3), мы будем называть *группоидом Штейнера.*

Итак, любая система троек Штейнера может быть превращена в группоид Штейнера с помощью операции сложения точек, определенной указанным выше способом.

Обратно, пусть S — группоид Штейнера, то есть на множестве S определена операция сложения $+$, удовлетворяющая условиям (GS1), (GS2) и (GS3).

Предложение 1.1. *Любой подгруппоид B из группоида Штейнера S, порожденный двумя различными элементами, содержит точно 3 элемента и порождается любой парой различных элементов из B.*

Доказательство. Пусть x и y — различные элементы из S, $B =< x, y >$ — подгруппоид, порожденный элементами x и y, и $z = x + y$. Понятно, что $z \in B$, причем легко показать, что элемент z отличен как от x, так и от y. Действительно, пусть, например, выполняется равенство $x+y = y$. Тогда, в силу коммутативности сложения, $y+x = y$ и, следовательно, $y+(y+x) = y+y$. Применяя к правой части равенства тождество (GS1), а к левой — (GS3), мы получаем $x = y$, что противоречит выбору x и y. Далее, из условий (GS2) и (GS3) следует, что $x + z = y$ и $y + z = x$, что, вместе с равенствами $x + x = x$, $y + y = y$ и $z + z = z$, дает нам замкнутость множества $\{x, y, z\}$ относительно сложения. Значит, $B = \{x, y, z\}$. Более того, равенства $x + y = z$, $x + z = y$ и $y + z = x$ показывают, что группоид B порождается любой парой своих различных элементов.

С помощью предложения 1.1 группоид Штейнера S легко превратить в систему троек Штейнера, выбирая в качестве блоков все двапорожденные подгруппоиды из S. Таким образом, условия (STS1,2) и (GS1,2,3) представляют собой комбинаторную и алгебраическую форму описания одной и той же ситуации. Алгебраический подход в изучении систем троек Штейнера позволяет нам использовать различные алгебраические конструкции для построения новых систем троек Штейнера. Так, например, понятно, что прямое произведение группоидов Штейнера S_1 и S_2

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2)|x_i \in S_i\}$$

с операцией сложения

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

также является группоидом Штейнера. Учитывая тот факт, что прямое произведение имеет порядок, равный произведению порядков сомножителей, мы получаем

Предложение 1.2. *Если существуют системы Штейнера порядков n и m, то найдется система Штейнера порядка nm.*

Также использование алгебраического языка вызывает ряд новых вопросов, связанных с существованием группоидов Штейнера, удовлетворяющих некоторым условиям.

Приведем примеры.

Вопрос 5. Каково строение группоидов Штейнера, удовлетворяющих тождеству $x + (y + z) = (x + y) + (x + z)$?

Заметим, что указанному в вопросе тождеству удовлетворяет трехэлементный группоид Штейнера, и, значит, множество таких группоидов непусто.

Нетрудно показать, что существует единственная, с точностью до изоморфизма, система троек Штейнера порядка 7 — это проективная плоскость порядка 2 или, короче, плоскость Фано. Назовем группоид Штейнера, соответствующий плоскости Фано, группоидом Фано.

Вопрос 6. Какие тождества выполняются в группоиде Фано? Описать все группоиды Штейнера, в которых справедливы те же тождества, что и в группоиде Фано.

Алгебраический язык позволяет нам также несколько по-иному взглянуть на основные понятия, данные во введении. Так, например, понятие подсистемы в системе троек Штейнера равносильно понятию подгруппоида в группоиде Штейнера. Точнее, подмножество H из системы троек Штейнера S является подсистемой в S тогда и только тогда, когда множество H замкнуто относительно сложения точек, то есть H — подгруппоид в S, рассматриваемый как группоид Штейнера. То, что P есть плотное подмножество в системе троек Штейнера S, эквивалентно тому, что для любой пары различных точек, не лежащих в P, их сумма принадлежит P. Далее при изучении систем троек Штейнера мы будем использовать оба подхода: комбинаторный и алгебраический, переходя без оговорок, по мере необходимости, с комбинаторного языка на алгебраический и обратно.

2. Плотные подмножества и подсистемы

Для доказательства теоремы 1.4 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 2.1. *Пусть S — система троек Штейнера, H — собственная подсистема в S, a — точка, лежащая вне H, и $T = \{a + x \mid x \in H\}$. Тогда $T \cap H = \emptyset$ и $|T| = |H|$.*

Доказательство. Напомним, что точку, лежащую в блоке, содержащем точки a и x, и отличную от них, мы договорились обозначать через $a + x$. Докажем сначала, что $T \cap H = \emptyset$. Для этого достаточно показать, что для любой точки x из H точка $a + x$ не лежит в H, то есть она лежит в $S \setminus H$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что для некоторого x из H точка $a + x$ тоже лежит в H. Тогда, поскольку H — система троек Штейнера и точки x и $a + x$ принадлежат H, по (STS2) имеем, что точка $x + (a + x)$ также лежит в H. Поскольку H — группоид Штейнера, по (GS2) имеем, что $x + (a + x) = x + (x + a)$, а по (GS3), $x + (x + a) = a$. Получили, что точка a лежит в H. Но мы изначально взяли точку a вне H. Тем самым, придя к противоречию, мы доказали, что $T \cap H = \emptyset$.

По определению системы троек Штейнера, $a + x = a + y$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Следовательно, $|T| = |H|$. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть S — система троек Штейнера, H — собственная подсистема в S, a — точка, лежащая вне H, и $T = \{a + x \mid x \in H\}$. Множество T не содержит точку a, поскольку если для некоторого $x \in H$ выполняется, что $a + x = a$, то $x = a$, а $a \notin H$. Множество T не имеет общих точек с H, по лемме 3.1. Следовательно, $|S| \geq |T \cup H \cup \{a\}| = |T| + |H| + 1 = 2|H| + 1$. Первая часть теоремы доказана.

Вторую часть теоремы докажем от противного. Допустим, что $|S| = 2|H| + 1$ и подмножество H не является плотным, то есть в $\mathcal{B}(S)$ нашелся блок B, не содержащий точек из H, и a — некоторая точка из B. Тогда имеем: $|S| \geq |T| + |H| + |B|$. Получили, по лемме 2.1, что $|S| \geq 2|H| + 3$, что противоречит допущению. Теорема 1.4 доказана.

Доказательство теоремы 1.5. Для $P = S$ заключение выполняется. Пусть теперь $P \neq S$. Пусть a — произвольный элемент из $S \setminus P$. Поскольку P— плотное, для любого элемента b из $S \setminus P$, отличного от a, $a + b \in P$. Тогда $|(S \setminus P) \setminus \{a\}| \leq |P|$, $|S| - |P| - 1 \leq |P|$. Следовательно, $|S| \leq 2|P| + 1$. Первая часть теоремы доказана.

Вторую часть докажем от противного. Допустим, что $|S| = 2|P| + 1$ и P является плотным подмножеством, но не является подсистемой, то есть в $B(S)$ существует блок $\{a, b, a + b\}$ такой, что $a, b \in P$, а $a + b \in S \setminus P$. Рассмотрим $T_{a+b} = \{a + b + z | z \in S \setminus P\}$. Ясно, что $|S| = |S \setminus P| + |P| \geq |S \setminus P| + |T_{a+b} \cup \{a, b\}| = |S| - |P| + |S \setminus P - 1| + 2$. Отсюда получаем, что $|S| \leq 2|P| - 1$, что противоречит допущению. Теорема 1.5 доказана.

Доказательство теоремы 1.6. H — собственная подсистема, следовательно, по теореме 1.4, $|S| \geq 2|H| + 1$. H — плотное подмножество, тогда, по теореме 1.5, $|S| \leq 2|H| + 1$. Следовательно, $|S| = 2|H| + 1$. Теорема 1.6 доказана.

Доказательство теоремы 1.7. По теореме 15.4.3 из [1], порядок любой системы троек Штейнера имеет вид $6k + 1$ или $6k + 3$, где k — произвольное неотрицательное целое число, либо, что эквивалентно, порядок равен $12k + 1$, $12k + 3$, $12k + 7$ или $12k + 9$. Допустим, что система троек Штейнера порядка $12k + 1$ имеет плотную подсистему H. Тогда, по теореме 1.6, $12k + 1 = 2|H| + 1$, отсюда получаем, что $|H| = 6k$, где k — произвольное целое неотрицательное число, но системы троек Штейнера такого порядка не существует. Допустим, что система троек Штейнера порядка $12k + 9$ имеет плотную подсистему H. Тогда, по теореме 1.6, $12k + 9 = 2|H| + 1$, отсюда получаем, что $|H| = 6k + 4$, где k — произвольное целое неотрицательное число, но системы троек Штейнера такого порядка не существует. Получили, что $|H| = 12k + 3$ или $12k + 7$. Теорема 1.7 доказана.

3. Пересечения плотных подсистем

Доказательство теоремы 1.8. Докажем сначала, что $H_3 := (H_1 \cap H_2) \cup ((S \setminus H_1) \cap (S \setminus H_2))$ — подсистема в S. Для этого достаточно доказать, что для любых различных точек x_1 и x_2 из H_3 точка $x_1 + x_2$ лежит тоже в H_3. Возможны три случая взаимного расположения точек x_1 и x_2:

1. $x_1, x_2 \in H_1 \cap H_2$. Поскольку H_1 — система троек Штейнера, $x_1 + x_2 \in H_1$; поскольку H_2— система троек Штейнера, $x_1 + x_2 \in H_2$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in H_1 \cap H_2$, $x_1 + x_3 \in H_3$.

2. $x_1, x_2 \in (S \setminus H_1) \cap (S \setminus H_2)$. Поскольку H_1 — плотная подсистема и $x_1, x_2 \notin H_1$, $x_1 + x_2 \in H_1$; поскольку H_2 — плотная подсистема и $x_1, x_2 \notin H_2$, $x_1 + x_2 \in H_2$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in H_1 \cap H_2$, $x_1 + x_3 \in H_3$.

3. $x_1 \in H_1 \cap H_2, x_2 \in (S \setminus H_1) \cap (S \setminus H_2)$. Допустим, что $x_1 + x_2 \in H_i, i = 1, 2$. Но, поскольку H_i — система троек Штейнера, в ней уже существует блок, содержащий пару точек x_1 и $x_1 + x_2$.

Получили, что система троек Штейнера S содержит два блока, содержащих одну пару точек, что противоречит с определением системы троек Штейнера. Следовательно, $x_1 + x_2 \notin H_1$ и $x_1 + x_2 \notin H_2$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in (S \setminus H_1) \cap (S \setminus H_2)$, $x_1 + x_3 \in H_3$.

Теперь докажем, что подсистема H_3 — плотная в S. Пусть $B = \{x_1, x_2, x_1+x_2\}$ — произвольный блок из $B(S)$. Допустим, что $B \in S \setminus H_3$. Возможны два случая взаимного расположения точек x_1, x_2 и $x_1 + x_2$:

1. Допустим, что $B \in H_1 \setminus H_2$. Но подсистема H_2 — плотная, следовательно, любой блок из $B(S)$ должен с ней пересекаться хотя бы по одной точке. Противоречие.

2. Допустим, что $x_1, x_2 \in H_1 \setminus H_2$, а $x_1+x_2 \in H_2 \setminus H_1$. Но H_3 уже содержит блок, содержащий пару точек x_1, x_2. Противоречие.

Получили противоречие с тем, что $B \in S \setminus H_3$. Следовательно, H_3 — плотная подсистема в S. Теорема 1.8 доказана.

Список литературы

[1] Холл М. *Комбинаторика* / М.Холл. – М.: Мир, 1970.

DENSE SUBSYSTEMS OF STEINERS TRIPLES SYSTEMS

E.V.Antosyak, V.V.Belyaev

In this paper the new term dense subset and dense subsystem of Steiners triples systems was coined and we found some constraints on this orders.