УДК 510.643

РАЗРЕШИМОСТЬ ПО ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЛОГИК

А.В.Кошелева*

В статье доказана разрешимость по допустимости правил вывода финитно-аппроксимируемых и разрешимых логик $\lambda \supseteq Lin\,DA$. Таким образом, известные логики $Lin\,T$ и $Lin\,DA$, порожденные соответственно фреймами $\langle Q, \geq, \leq\rangle$, $\langle Q, >, <\rangle$, разрешимы по допустимости.

В настоящее время существует хорошо развитая теория о разрешимости по допустимости правил вывода широкого класса одномодальных транзитивных логик. Для многомодальных логик таких результатов получено пока мало. Например, в [5] доказано, что бимодальные линейные логики, порожденные фреймами $\langle Z, \geq, \leq\rangle$, $\langle N, \geq, \leq\rangle$, не являются финитно-аппроксимируемыми, но разрешимы относительно допустимости правил вывода. Мы докажем, что логики, порожденные фреймами $\langle Q, \geq, \leq\rangle$, $\langle Q, >, <\rangle$, разрешимы по допустимости. Для доказательства мы будем использовать те же идеи, что и в работе [6], в которой показана разрешимость по допустимости некоторого класса логик над $S5_n$.

Введем следующие сокращения: $\Box p$ будем писать вместо $p \wedge \Box_1 p \wedge \Box_2 p$, а $\Diamond p$ — вместо $p \vee \Diamond_1 p \vee \Diamond_2 p$.

Приведем некоторые аксиомы бимодальных логик:

C_1. $\Diamond_1 \Box_2 p \to p$.

C_2. $\Diamond_2 \Box_1 p \to p$.

D_1. $\Diamond_1 \top$.

D_2. $\Diamond_2 \top$.

T_1. $\Box_1 p \to p$.

T_2. $\Box_2 p \to p$.

Y_1. $\Box_1 p \to \Box_1 \Box_1 p$.

Y_2. $\Box_2 p \to \Box_2 \Box_2 p$.

A_1. $\Box_1 \Box_1 p \to \Box_1 p$.

A_2. $\Box_2 \Box_2 p \to \Box_2 p$.

L_1. $\Box p \to \Box_1 \Box_2 p$.

L_2. $\Box p \to \Box_2 \Box_1 p$.

$Dum1$. $\Box_1(\Box_1(p \to \Box_1 p) \to p) \to (\Diamond_1 \Box_1 p \to p)$.

$Dum2$. $\Box_2(\Box_2(p \to \Box_2 p) \to p) \to (\Diamond_2 \Box_2 p \to p)$.

Известно, что формула D_i истинна на фрейме тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию $\forall x \exists y\,(xR_iy)$, формула A_i истинна на фрейме тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию $\forall x \forall y \exists z\,(xR_iy \to xR_iz \wedge zR_iy)$ (смотрите, например, работы [1], [2], [3], [4]).

Аксиомы C_1 и C_2 задают на фреймах соответственно следующие свойства: $\forall x \forall y\,(xR_1y \to yR_2x)$, $\forall x \forall y\,(xR_2y \to yR_1x)$, а аксиомы L_1 и L_2 эквивалентны соответственно условиям: $\forall x \forall y \forall z\,(xR_2y \wedge yR_1z \to x = z \vee xR_1z \vee xR_2z)$, $\forall x \forall y \forall z\,(xR_1y \wedge yR_2z \to x = z \vee xR_1z \vee xR_2z)$ (смотрите, например, [1], [3]).

Логика Lin — это бимодальная логика, содержащая (кроме аксиом бимодальной логики K_2) аксиомы C_1, C_2, Y_1, Y_2, L_1, L_2. Логика $Lin\,T$ — это бимодальная логика, содержащая аксиомы логики Lin и T_1, T_2, а логика $Lin\,DA$ — это логика, содержащая аксиомы логики Lin, D_1, D_2 и A_1, A_2. $Lin\,T\,Dum$ — это $Lin\,T$, содержащая обе аксиомы Dum_1 и Dum_2.

Если бимодальная логика расширяет логику Lin, то она называется *линейной*.

В [1] доказаны такие результаты:

1. Логика $Lin\,T$ порождается фреймом $\langle Q, \geq, \leq\rangle$ (теорема 2.1).

2. Логика $Lin\,DA$ порождается фреймом $\langle Q, >, <\rangle$ (теорема 2.1).

3. Логика $Lin\,T\,Dum$ порождается фреймом $\langle Z, \geq, \leq \rangle$ (теорема 2.7).

В [5] доказано, что логики, порожденные фреймами $\langle Z, \geq, \leq \rangle$, $\langle N, \geq, \leq \rangle$, не являются финитно-аппроксимируемыми, но разрешимы относительно допустимости правил вывода.

Ниже мы докажем, что логики, порожденные фреймами $\langle Q, \geq, \leq \rangle$, $\langle Q, >, < \rangle$, финитно-аппроксимируемы и разрешимы по допустимости.

Определение 1. Фильтрация *модели $\mathcal{M}$ по $\mathcal{S}$ есть такая модель Крипке*

$$\mathcal{M}_{\equiv_S} := \langle W_{\equiv_S}, R_1^{'}, \ldots, R_n^{'}, V_S \rangle,$$

в которой

1) $\forall\, p \in Var(S)\, (V_S(p) := \{[a]_{\equiv_S} \mid a \Vdash_V p\})$;

2) $\forall\, a, b \in W_{\equiv_S}\, (aR_i b \Rightarrow [a]_{\equiv_S} R_i^{'} [b]_{\equiv_S})$, $i := 1, \ldots, n$;

3) $\forall\, a, b \in W_{\equiv_S}\, ([a]_{\equiv_S} R_i^{'} [b]_{\equiv_S} \Rightarrow (\Box_i \alpha \in S \wedge a \Vdash_V \Box_i \alpha \Rightarrow b \Vdash_V \alpha))$, $i := 1, \ldots, n$.

Лемма 2. Лемма о фильтрации. *Если $\mathcal{M}_{\equiv_S} := \langle W_{\equiv_S}, R_1^{'}, \ldots, R_n^{'}, V_S \rangle$ — фильтрация модели $\mathcal{M}$ по $\mathcal{S}$, то $\forall\, a \in W_{\equiv_S}$ и $\forall\, \alpha \in S$: $a \Vdash_V \alpha \Leftrightarrow [a]_{\equiv_S} \Vdash_{V_S} \alpha$.*

Приведем определение *прайоровской* фильтрации, рассмотренной в работе [1]. Пусть $\mathcal{M} := \langle W, R_1, R_2, V \rangle$ — некоторая модель, а S — множество формул, замкнутое относительно взятия подформул. Прайоровской фильтрацией называется такая модель $\mathcal{M}_{\equiv_S} := \langle W^{'}, R_1^{'}, R_2^{'}, V^{'} \rangle$, в которой $[a]_{\equiv_S} R_1^{'} [b]_{\equiv_S} \Leftrightarrow (\Box_1 \alpha \in S \wedge a \Vdash \Box_1 \alpha \Rightarrow b \Vdash \Box_1 \alpha \wedge \alpha)$, $[a]_{\equiv_S} R_2^{'} [b]_{\equiv_S} \Leftrightarrow (\Box_2 \alpha \in S \wedge a \Vdash \Box_2 \alpha \Rightarrow b \Vdash \Box_2 \alpha \wedge \alpha)$ и выполняется условие $[a]_{\equiv_S} R_1^{'} [b]_{\equiv_S} \Leftrightarrow [b]_{\equiv_S} R_2^{'} [a]_{\equiv_S}$. Если модель $\mathcal{M}$ транзитивна и $R_2 = R_1^{-1}$, то прайоровская фильтрация существует.

Предложение 3. *Логики $Lin\,T$ и $Lin\,DA$ финитно-аппроксимируемы.*

Доказательство. Допустим, что на модели $\mathcal{M} := \langle Q, R_1, R_2, V \rangle$, фрейм которой адекватен логике λ, где λ — одна из логик $Lin\,T$ или $Lin\,DA$, опровергается формула α. Пусть $\mathcal{M}_{\equiv_S} := \langle Q^{'}, R_1^{'}, R_2^{'}, V^{'} \rangle$ — прайоровская фильтрация модели $\mathcal{M}$ по множеству $Sub\,\alpha$ с дополнительным условием $[a] R_i^{'} [b] \Leftrightarrow \exists\, a_1\, (aR_i a_1 \wedge a_1 R_i b)$, $i := 1, 2$. Эта модель будет фильтрацией, так как все условия определения фильтрации 1 выполняются.

Из пункта 2) определения 1 мы получим, что на $\mathcal{M}_{\equiv_S}$ выполняются свойства, задаваемые на фреймах аксиомами L_1, L_2 и T_1, T_2 (для логики $Lin\,T$), D_1, D_2 (для логики $Lin\,DA$). Из условия $[a] R_1^{'} [b] \Leftrightarrow [b] R_1^{'} [a]$ фильтрации Прайора мы получим выполнение на $\mathcal{M}_{\equiv_S}$ свойств, задаваемых аксиомами C_1, C_2, а из условия $[a] R_i^{'} [b] \Leftrightarrow \exists\, a_1\, (aR_i a_1 \wedge a_1 R_i b)$, $i := 1, 2$ — выполнение свойств, задаваемых A_1, A_2.

Так как логики $Lin\,T$ и $Lin\,DA$ полные по Крипке, из доказанного следует, что они финитно-аппроксимируемы. ∎

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{M}$ — корневая модель с адекватным логике $Lin\,DA$ фреймом. Тогда*

$$\forall\, a \in \mathcal{M} : \, a \Vdash \Box_1 \Box_2 \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \Vdash \alpha.$$

Доказательство. Действительно, предположим, что это не так, т. е. $\exists\, a \Vdash \Box_1 \Box_2 \alpha$ и $\exists\, b \nVdash \alpha$. Так как фрейм адекватен логике $Lin\,DA$, т. е. в нем для $\forall\, x\, \exists\, y\, (xR_i y)$, $i := 1, 2$, и все отношения транзитивны, то мы получим, что $\exists\, c\, (aR_1 c \wedge cR_2 b)$. Тогда $a \nVdash \Box_1 \Box_2 \alpha$. ∎

Также нетрудно проверить следующее предложение:

Предложение 5. *1) Если $\Box_1 \Box_2 \alpha(p_1, \ldots, p_n) \rightarrow \beta(p_1, \ldots, p_n) \in \lambda \supseteq Lin\,DA$, то правило $r := \dfrac{\alpha(p_1, \ldots, p_n)}{\beta(p_1, \ldots, p_n)}$ допустимо в λ.*

2) Пусть $\lambda \supseteq Lin\,DA$ и дано правило $r := \dfrac{\alpha(p_1, \ldots, p_n)}{\beta(p_1, \ldots, p_n)}$. Если формула $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ опровергается при всех означиваниях n переменных $p_1, \ldots, p_n$ на одноэлементном корневом рефлексивном фрейме, то r допустимо в λ.

Определение 6. *Пусть дана модель Крипке $\mathcal{M}$. Элемент $a \in \mathcal{M}$ называется* формульно определимым *в $\mathcal{M}$, если существует формула α, истинная на a и опровергающаяся на всех остальных элементах модели $\mathcal{M}$.*

Определение 7. *Пусть дан фрейм Крипке $\mathcal{F} := \langle F, R_1, \ldots, R_n \rangle$ и пусть V — некоторое означивание на этом фрейме. Означивание V называется* формульно определимым, *если существует такое означивание V_1 на $\mathcal{F}$, что $\forall\, p \in Dom(V)$ существует такая формула α, что $V(p) := V_1(\alpha)$.*

Определение 8. *Модель Крипке $\mathcal{M}$ называется* n-характеристической *для модальной логики λ, если область означивания V этой модели состоит из n различных пропозициональных переменных и для любой формулы α, построенной из этих переменных, выполняется следующее: $\alpha \in \lambda \Leftrightarrow \mathcal{M} \Vdash \alpha$.*

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{M}_n$, $n \in N$, — последовательность n-характеристических моделей Крипке для модальной логики λ. Правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_m/\beta$ допустимо в λ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in N$ и каждого формульно определимого означивания V переменных из r в $\mathcal{M}_n$ выполняется следующее. Если $V(\alpha_1) = \mathcal{M}_n, \dots, V(\alpha_m) = \mathcal{M}_n$, то $V(\beta) = \mathcal{M}_n$ (т. е. если r истинно на $\mathcal{M}_n$ при всех формульно определимых означиваниях).*

Пусть дана финитно-аппроксимируемая логика λ. Для дальнейших доказательств нам потребуется n-характеристическая модель, полученная следующим образом. Пусть $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \dots$ — последовательность всевозможных конечных корневых моделей, фрейм каждой из которых адекватен логике λ, и означены эти модели n различными переменными $p_1, \dots, p_n$. Возьмем для каждой модели $\mathcal{A}_i$ такой ее p-морфный образ — модель $\mathcal{A}_i^{'}$, для которой, в свою очередь, все возможные p-морфизмы являются изоморфизмами. Пусть $\mathcal{A}_1^{'}, \dots, \mathcal{A}_k^{'}, \dots$ — последовательность полученных таким образом моделей. Если в этой последовательности имеются изоморфные модели, то из них оставим только одну. Дизъюнктное объединение $\cup_{j\in I}\mathcal{A}_{i_j}^{'}$ обозначим $Ch_\lambda(n)$. По построению фрейм модели $Ch_\lambda(n)$ адекватен логике λ, следовательно, $\forall\, \alpha(p_1, \dots, p_n)$: $\alpha \in \lambda \Rightarrow Ch_\lambda(n) \Vdash \alpha$. Если $\alpha(p_1, \dots, p_n) \notin \lambda$, то $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ опровергается в конечной модели $\mathcal{M}$, фрейм которой адекватен λ. Без ограничения общности можем считать, что модель $\mathcal{M}$ является корневой и на $\mathcal{M}$ задано означивание переменных $p_1, \dots, p_n$. По построению $Ch_\lambda(n)$ p-морфный образ модели $\mathcal{M}$ будет подмоделью модели $Ch_\lambda(n)$. Так как логика финитно-аппроксимируемая, то $Ch_\lambda(n) \nVdash \alpha$. Таким образом, $Ch_\lambda(n)$ — действительно n-характеристическая модель. В случае финитно-аппроксимируемой логики $\lambda \supseteq Lin\,DA$ мы получим последовательность $\mathcal{A}_{i_1}^{'}, \dots, \mathcal{A}_{i_k}^{'}, \dots$ конечных корневых моделей, в которой нет изоморфных моделей и для любой модели $\mathcal{A}_{i_j}^{'}$ не существует отличных от нее самой p-морфных прообразов.

В [4], § 3.3 n-характеристические модели для финитно-аппроксимируемых логик, расширяющих $K4$ построены по слоям следующим образом.

Пусть λ — нормальная финитно-аппроксимируемая модальная логика, расширяющая $K4$ и $P_n := \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество пропозициональных переменных. Первый слой $Sl_1(Ch_\lambda(n))$ модели $Ch_\lambda(n)$ состоит из множества всех сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из P_n, причем ни в одном сгустке нет элементов с одинаковым означиванием, в $Sl_1(Ch_\lambda(n))$ нет сгустков, которые изоморфны, как модели, и каждый сгусток из $Sl_1(Ch_\lambda(n))$ является λ-фреймом. Пусть подмодель $S_m(Ch_\lambda(n))$ построена. Построим подмодель $S_{m+1}(Ch_\lambda(n))$ следующим образом. Выбираем любую антицепь $\mathcal{Y}$ сгустков из $S_m(Ch_\lambda(n))$, имеющую по крайней мере один сгусток глубины m, и добавляем в $S_{m+1}(Ch_\lambda(n))$ сгусток C, полагая C непосредственным R-предшественником сгустков из $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{Y}{:=}\{C_1\}$, то C не является p-морфным образом C_1. При этом фрейм $C^{R\leq}$ должен быть λ-фреймом. Продолжая этот процесс, получаем модель $Ch_\lambda(n)$.

Теорема 10 (теорема 3.3.7 [4])**.** *Любой элемент модели $Ch_{K4}(n)$ формульно определим. В частности, для любой финитно-аппроксимируемой логики λ, расширяющей $K4$, любой элемент модели $Ch_\lambda(n)$ формульно определим.*

Предложение 11 (предложение 3.3.5 [4])**.** *Пусть λ_1 и λ_2 — модальные логики, расширяющие $K4$ и пусть $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$. Тогда для любого n модель $Ch_{\lambda_2}(n)$ является открытой подмоделью модели $Ch_{\lambda_1}(n)$.*

Лемма 12. *Каждый элемент модели $Ch_\lambda(n)$, где λ финитно-аппроксимируемая логика, расширяющая $Lin\,DA$, является формульно определимым.*

Доказательство. В книге [4] в теореме 10 для каждого элемента модели $Ch_{K4}(n)$ была построена формула $\beta(a)(p_1, \dots, p_n)$, которая истинна на некотором элементе b, таком, что $b^{R\leq}$ — транзитивная модель и означена переменными $p_1, \dots, p_n$, тогда и только тогда, когда модель $b^{R\leq}$ p-морфно отображается на модель $a^{R\leq}$. Используем этот факт для доказательства формульной определимости элементов модели $Ch_\lambda(n)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая дизъюнктная компонента модели $Ch_\lambda(n)$ и пусть для каждого ее элемента a мы составили соответствующие формулы $\beta(a)(p_1, \dots, p_n)$, истинные на элементе b таком, что $b^{R\leq}$

— транзитивная модель и означена переменными $p_1, \ldots, p_n$, тогда и только тогда, когда модель $b^{R_1 \leq}$ p-морфно отображается на модель $a^{R_1 \leq}$. Такие формулы существуют по теореме 10.

Пусть c — это такой элемент модели $\mathcal{A}$, что $c^{R_1 \leq}$ содержит все элементы этой модели. Так как формулы D_1 и D_2 принадлежат λ, то сгусток, содержащий элемент c, рефлексивен по всем отношениям. Тогда формула

$$\gamma := \Diamond_1 \Box_2 \Diamond_2 \beta(c)$$

будет истинна на всех элементах модели $\mathcal{A}$.

Так как модель $c^{R_1 \leq}$ изоморфна некоторой открытой подмодели модели $Ch_{K4}(n)$, то в $\mathcal{A}$ нет двух различных точек a и b, таких, что $\beta(a) = \beta(b)$. Тогда формула

$$\delta(a) := \beta(a) \wedge \gamma$$

в модели $\mathcal{A}$ может быть истинна только на элементе a.

Предположим, что существует элемент $b \in Ch_\lambda(n)$, $b \notin \mathcal{A}$, на котором истинна $\delta(a)$, где $a \in \mathcal{A}$. Пусть b принадлежит дизъюнктной компоненте $\mathcal{B}$. Так как $b \Vdash \Diamond_1 \Box_2 \Diamond_2 \beta(c)$, то в $\mathcal{B}$ существует такая точка c_1, что модель $c_1^{R_1 \leq}$ включает в себя все элементы из $\mathcal{B}$ и $c_1 \Vdash \beta(c)$. Тогда $c_1^{R_1 \leq}$ p-морфно отображается на $c_1^{R_1 \leq}$, а так как $\forall\, x,\, y \in Ch_\lambda(n)\, (xR_1y \Leftrightarrow yR_2x)$, то $\mathcal{B}$ p-морфно отображается на $\mathcal{A}$. Так как такой открытой подмодели $\mathcal{B}$ в модели $Ch_\lambda(n)$ быть не может, каждый элемент в $Ch_\lambda(n)$ формульно определим. ∎

Теорема 13. *1) Правило* $r := \dfrac{\alpha(p_1, \ldots, p_n)}{\beta(p_1, \ldots, p_n)}$ *допустимо в финитно-аппроксимируемой и разрешимой логике* $\lambda \supseteq Lin\, DA$ *тогда и только тогда, когда или а)* α *опровергается при всех означиваниях* n *переменных одноэлементного корневого рефлексивного фрейма или б)* $\Box_1 \Box_2 \alpha \to \beta \in \lambda$.

2) Условия а) и б) алгоритмически распознаваемы, и, следовательно, логика λ *разрешима по допустимости правил вывода.*

Доказательство. Если условие а) выполняется, то r допустимо по пункту 2) предложения 5. Так как в модели $Ch_\lambda(n)$ число одноэлементных корневых подмоделей равно 2^n, то проверить, опровергается ли на них α, мы можем за конечное число шагов.

Если формула $\Box_1 \ldots \Box_t \alpha \to \beta \in \lambda$, то по пункту 1) предложения 5 r допустимо. Так как λ разрешима, то это условие алгоритмически проверяемо.

Пусть теперь существуют такая корневая подмодель $\mathcal{A}$ модели $Ch_\lambda(n)$, V — означивание $Ch_\lambda(n)$, что на некотором элементе $a \in \mathcal{A}$: $a \nVdash_V \Box_1 \ldots \Box_t \alpha(p_1, \ldots, p_n) \to \beta(p_1, \ldots, p_n)$, и такая одноэлементная корневая подмодель $\mathcal{B}$ модели $Ch_\lambda(n)$, что $\mathcal{B} \Vdash_V \alpha(p_1, \ldots, p_n)$. Так как $a \Vdash_V \Box_1 \ldots \Box_t \alpha(p_1, \ldots, p_n)$, то по лемме 4, $\mathcal{A} \Vdash_V \alpha(p_1, \ldots, p_n)$.

Выберем далее такую модель $Ch_\lambda(n + n1)$ с означиванием V_1 переменных $p_1, \ldots, p_n$, $p_{n+1}, \ldots, p_{n+n1}$, в которой существует корневая подмодель $\langle \mathcal{F}(\mathcal{A}), V_1 \rangle$, все элементы которой имеют разное означивание, но $\forall\, a \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$: $a \Vdash_{V_1} p_i \Leftrightarrow a \Vdash_V p_i$ для $i := 1, \ldots, n$. По построению характеристических моделей такую модель всегда можно найти, выбирая достаточно большое $n1$.

Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ состоит из элементов $a_1, \ldots, a_s$, а $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ из элемента b.

По лемме 12, $\forall\, a_i \in \mathcal{F}(\mathcal{A})\ \exists\, \varphi(a_i)(p_1, \ldots, p_{n+n1})$: $a_i \Vdash_{V_1} \varphi(a_i)(p_1, \ldots, p_{n+n1})$ и $\varphi(a_i)$ опровергается на всех остальных элементах модели $Ch_\lambda(n + n1)$.

Рассмотрим следующее означивание V_2 переменных $p_1, \ldots, p_n$ на $\mathcal{F}(Ch_\lambda(n + n1))$. Пусть на элементах из $\mathcal{F}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ означивание V_2 совпадает с означиванием V элементов модели $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ из $Ch_\lambda(n)$, а элементы $\mathcal{F}(Ch_\lambda(n + n1)) \setminus \mathcal{F}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ означим так, как означена точка модели $\mathcal{B}$.

Ясно, что $\langle \mathcal{F}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}), V_2 \rangle \Vdash \alpha$, а так как $\mathcal{A} \nVdash \beta$, то $\langle \mathcal{F}(\mathcal{A}), V_2 \rangle \nVdash \beta$. Так как любой адекватный логике λ фрейм можно p-морфно отобразить в одноэлементный корневой рефлексивный фрейм, то $\langle \mathcal{F}(Ch_\lambda(n + n1)), V_2 \rangle \Vdash \alpha$.

По определению означивания V_2 выше и лемме 12 V_2 является формульно определимым означиванием, действительно, $V_2(p_i){:=}V_1((\bigvee_{a_k \in \mathcal{F}(\mathcal{A}), a_k \Vdash_{V_1} p_i} \varphi(a_k)) \vee$

$\vee\, ((\neg \bigvee_{a_k \in \langle \mathcal{F}(\mathcal{A}), V_1 \rangle} \varphi(a_k)) \wedge \varepsilon(p_i)))$, где $\varphi(a_k)$ — формулы из леммы 12, а $\varepsilon(p_i) := \begin{cases} \top, & b \Vdash_{V_1} p_i, \\ \bot, & b \nVdash_{V_1} p_i. \end{cases}$

Следовательно, r недопустимо по теореме 9.

Таким образом, 1) доказано. В силу разрешимости и финитной аппроксимируемости логики λ из 1) следует, что λ разрешима по допустимости правил вывода. ∎

Список литературы

[1] Сегерберг К. *Модальные логики с линейными отношениями альтернативности* / К. Сегерберг. – Семантика модальных и интенсиональных логик, под общ. ред. В. А. Смирнова – М.: Прогресс, 1981. – С. 180-204.

[2] Chagrov A. *Modal logics* / A.Chagrov, M.Zakharyaschev. – London: Cambridge Press, 1997. – 589 p.

[3] Goldblatt R. *Logic of time and computation* / R. Goldblatt // Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University. – 1987. – №7. – 126 p.

[4] Rybakov V.V. *Admissibility of logical inference rules* / V.V.Rybakov. – Elseiver Sci.Publ., North-Holland. – New-York-Amsterdam. – 1997. – V.136. – 617 p.

[5] Rybakov V.V. *Logical consecutions discrete linear temporal logic* / V.V.Rybakov // in prepare.

[6] Кошелева А.В. *Разрешимость проблемы допустимости правил вывода в некоторых $S5_t$-логиках* / А.В.Кошелева // Алгебра и логика. – 2005. – Т.44, №4. – С. 438-458.

DECIDABILITY ON ADMISSIBILITY OF INFERENCE RULES OF SOME LINEAR LOGICS

A.V.Kosheleva

In article decidability on admissibility of inference rules of finitely-approximated and decidable logics $\lambda \supseteq Lin\,DA$ will be proved. Thus, known logics $Lin\,T$ and $Lin\,DA$, generated by $\langle Q, \geq, \leq \rangle$, $\langle Q, >, < \rangle$ frames, accordingly, decidable on admissibility.