

## КОНТУР АМЕБЫ КОМПЛЕКСНОЙ ПРЯМОЙ В $\mathbb{C}^n$

**К.В. Кузвесов\***
*Изучается строение контура амобы комплексной прямой в  $\mathbb{C}^n$ .*

Понятие амобы для алгебраической гиперповерхности было введено в [1] и систематически стало изучаться в работах [2], [4]. Без изменений его можно ввести и для произвольного алгебраического множества [3].

**Определение.** Амобой  $A_V$  алгебраического множества  $V \in (C \setminus \{0\})^n$  называется образ  $V$  при логарифмическом отображении  $Log : (C \setminus \{0\})^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , действующем по формуле

$$Log : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|).$$

**Определение.** Контуром амобы  $A_V$  называется множество критических точек логарифмического отображения  $Log$ , суженного на  $V$ :

$$Log : V \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

В случае, когда  $V = \{z \in (C \setminus \{0\})^n : f(z) = 0\}$  – гиперповерхность, точка  $p \in V$  является критической для отображения  $Log|_V$  тогда и только тогда, когда ее образ при логарифмическом отображении Гаусса  $\gamma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow (z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} : \dots : z_n \frac{\partial f}{\partial z_n})$$

лежит в действительном проективном подпространстве  $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$  ([4], [5]). Таким образом, контур амобы гиперповерхности есть множество  $Log(\gamma^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}))$ .

Отметим, что контур амобы для гиперповерхности был изучен в [6]. В настоящей работе описывается контур для прямых (плоскостей комплексной размерности 1).

Рассмотрим комплексную прямую в  $\mathbb{C}^n$ :

$$\begin{cases} z_2 = a_2 z_1 + b_2 \\ \dots \\ z_n = a_n z_1 + b_n \end{cases}.$$

Контуром ее амобы по определению является множество критических значений логарифмического отображения

$$Log : (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (\log|z_1|, \log|a_2 z_1 + b_2|, \dots, \log|a_n z_1 + b_n|).$$

Для нахождения контура вычислим матрицу якоби отображения  $Log$  в координатах  $z_1, \bar{z}_1$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \log|z_1| & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \log|z_1| \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \log|z_2| & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \log|z_2| \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \log|z_n| & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \log|z_n| \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & \frac{1}{\bar{z}_1} \\ \frac{a_2}{z_2} & \frac{a_2}{\bar{z}_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{a_n}{z_n} & \frac{a_n}{\bar{z}_n} \end{pmatrix}.$$

Условием критичности, т.е. неаксимальности ранга вычисленной матрицы, будет переопределенная система уравнений:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{1}{z_1} & \frac{1}{\bar{z}_1} \\ \frac{a_j}{z_j} & \frac{a_j}{\bar{z}_j} \end{vmatrix} = 0, & j = 2, \dots, n, \\ \begin{vmatrix} \frac{a_k}{z_k} & \frac{a_l}{\bar{z}_k} \\ \frac{a_l}{z_l} & \frac{a_l}{\bar{z}_l} \end{vmatrix} = 0, & k, l = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

\* © К.В.Кузвесов, Красноярский государственный университет, 2006.

Нетрудно видеть, что это условие переписывается как

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \overline{z_1} \frac{b_j}{a_j} = 0, & j = 2, \dots, n, \\ \operatorname{Im} \left( z_1 + \frac{b_k}{a_k} \right) \left( z_1 + \frac{b_l}{a_l} \right) = 0, & k, l = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Чтобы вычислить мнимые части выражений, введем обозначения:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + iy, \\ \frac{b_j}{a_j} &= c_j + id_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда система условий на контур переписется в виде

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y \\ c_j & d_j \end{vmatrix} = 0, & j = 2, \dots, n, \\ \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c_l & d_l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_l & d_l \end{vmatrix} = 0, & k, l = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система будет совместна тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_l & d_l \end{vmatrix} = 0, \quad k, l = 2, \dots, n,$$

что в свою очередь может быть переписано как условия на коэффициенты

$$\frac{a_k b_l}{a_l b_k} \in \mathbb{R}, \quad k, l = 2, \dots, n.$$

Таким образом, доказана

**Теорема.** Контур амёбы комплексной прямой в  $\mathbb{C}^n, n > 2$ , задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} z_2 = a_2 z_1 + b_2 \\ \dots \\ z_n = a_n z_1 + b_n \end{cases},$$

непуст тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_k b_l}{a_l b_k} \in \mathbb{R}, \quad \forall k, l = 2, \dots, n. \quad (3)$$

При этих условиях контур амёбы представляет собой образ вещественной прямой  $d_2 x = c_2 y$  на комплексной плоскости переменного  $z_1$  при отображении  $\operatorname{Log}$ .

**Замечание.** Любое из условий существования контура амёбы в (3) можно считать выполненным, если хотя бы один из входящих в него коэффициентов равен нулю. Для  $b_j = 0$  это видно из системы (2), а для  $a_k = 0$  — из условий (1).

Приведем примеры амёб для прямых в  $\mathbb{C}^3$ .

Рассмотрим прямую

$$\begin{cases} z_2 = z_1 + 1, \\ z_3 = z_1 + 1 + i. \end{cases} \quad (4)$$

Для нее отношение  $\frac{a_2 b_3}{a_3 b_2} = 1 + i$  не является вещественным, поэтому контур амёбы отсутствует и амёба диффеоморфна самой прямой в  $(\mathbb{C} \setminus 0)^3$ . На рис. 1 слева показан общий вид амёбы, а справа — увеличенно центральная ее часть в несколько другом ракурсе.

Случай, когда отношение  $\frac{a_2 b_3}{a_3 b_2}$  вещественно, изображен на рис. 2 слева. Это амёба прямой

$$\begin{cases} z_2 = z_1 + 1, \\ z_3 = z_1 + 2. \end{cases} \quad (5)$$

Отношение  $\frac{a_2 b_3}{a_3 b_2}$  в этом случае равно 2. Амёба представляет собой поверхность с краем в  $\mathbb{R}^3$ , каждая внутренняя точка которой имеет по два прообраза на исходной прямой (5):

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow (|z_2|, |z_3|) = (|x + 1 + iy|, |x + 2 + iy|), \\ (x, -y) &\rightarrow (|z_2|, |z_3|) = (|x + 1 - iy|, |x + 2 - iy|). \end{aligned}$$

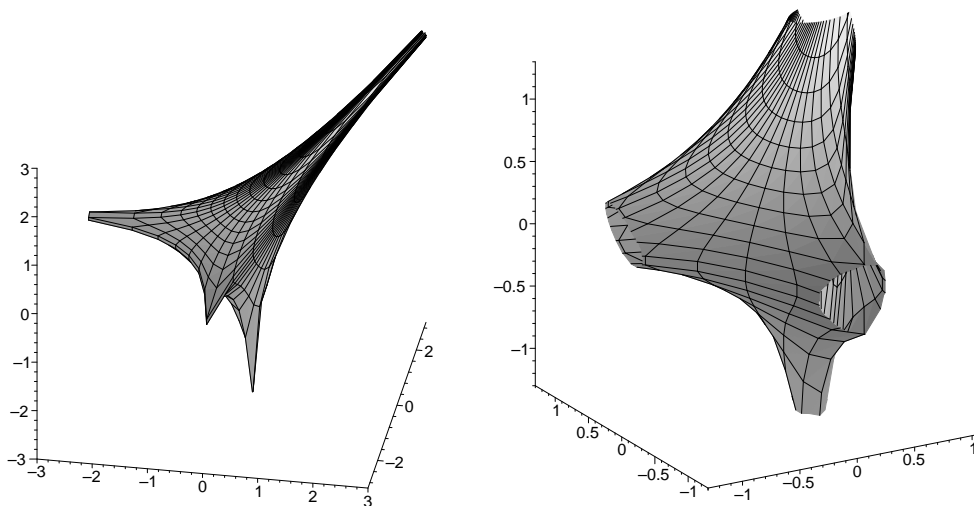


Рис. 1. Невырожденная амеба прямой (4)

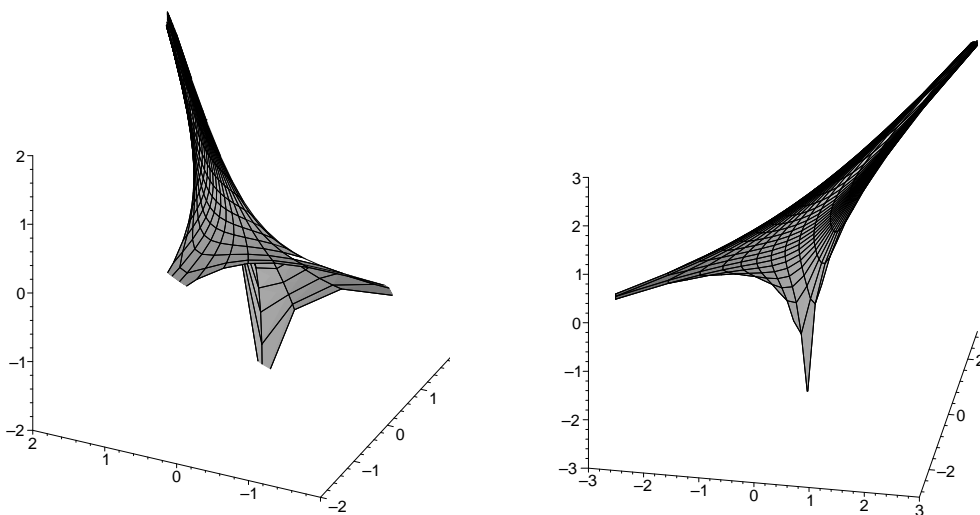


Рис. 2. Вырожденные амебы (5) и (6)

Таким образом, по сравнению с невырожденным случаем эта амеба „схлопывается“ — противоположные точки поверхности слипаются в одну.

Контуром такой амебы является ее край, прообразом которого в данном случае будет вещественный срез плоскости переменного  $z_1$ .

Наконец, если хотя бы один из коэффициентов в уравнениях прямой обращается в ноль, то амеба „ложится“ в плоскость в  $\mathbb{R}^3$  и в этой плоскости представляет собой амебу комплексной прямой с заведомо непустым контуром. Такой случай изображен на рис. 2 справа, где изображена амеба прямой

$$\begin{cases} z_2 = z_1 + 0, \\ z_3 = z_1 + 1 + i. \end{cases} \quad (6)$$

## Список литературы

- [1] GELFAND I. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants* / I.Gelfand, M.Kapranov, A.Zelevinsky. — Birkhäuser, Boston, 1994.
- [2] FORSBERG M. *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas* / M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh // *Advances in mathematics*. — 2000. — V. 151. — P. 54-70.

- [3] PASSARE M. *Amoebas: their spines and contours* / M.Passare, A.Tsikh // Contemporary maths. – 2005. – V.377. – P. 275-288.
- [4] MIKHALKIN G. *Real algebraic curves, the moment map and amoebas* / G.Mikhalkin // Ann. Math. – 2000. – V. 151. – P. 309-326.
- [5] THEOBALD T. *Computing amoebas* / T.Theobald // Experimental Math. – 2002. – V. 11. – P. 513-526.
- [6] КУЗВЕСОВ К.В. *Контур компактифицированной амобы гиперплоскости* / К.В.Кузвесов // Вестник КрасГУ. Сер. физ.мат. науки. – 2006. – Вып. 7. – С. 85-89.

**THE COUNTOUR OF COMPLEX LINE IN  $\mathbb{C}^n$**

**K.V.Kuzvesov**

*The structure of complex line amoeba contour in  $\mathbb{C}^n$  is investigated.*