УДК 517.55

КОНТУР КОМПАКТИФИЦИРОВАННОЙ АМЕБЫ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

К.В. Кузвесов*

Исследуется строение контура компактифицированной амебы комплексной гиперплоскости.

Понятие амебы для алгебраической гиперповерхности было введено в книге [1].

Определение. *Амебой* A_V алгебраического (или аналитического) множества $V \subset (C \setminus \{0\})^n$ называется образ V при логарифмическом отображении $Log: (C \setminus \{0\})^n \to R^n$, действующем по формуле

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|).$$

Определение [2]. *Контуром* амебы A_V называется множество критических значений логарифмического отображения Log, суженного на V:

$$Log: V \to R^n.$$

В случае, когда $V = \{z \in (C \setminus \{0\})^n : f(z) = 0\}$ – гиперповерхность, точка $p \in V$ является критической для отображения $Log|_V$ тогда и только тогда, когда ее образ при логарифмическом отображении Гаусса $\gamma: C^n \to CP_{n-1}$

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} : \dots : z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$$

лежит в действительном проективном подпространстве $RP_{n-1} \subset CP_{n-1}$ ([3], [4]). Таким образом, контур амебы A_V есть множество $Log(\gamma^{-1}(RP_{n-1}))$. Нетрудно видеть, что граница амебы лежит в контуре: $\partial A_V \subseteq C$. Границу ∂A_V мы будем называть *внешней* частью контура, остальные точки контура – *внутренней* его частью.

Вместо обычных амеб иногда бывает удобно рассматривать компактифицированные амебы.

Определение [5]. *Компактифицированной амебой* $\overline{A_V}$ проективного алгебраического многообразия $\overline{V} \subset CP_n$, заданного в однородных координатах $(Z_0 : \dots : Z_n)$, называется образ этого многообразия при моментном отображении $\mu: CP_n \to \Sigma_n$

$$(Z_0 : \dots : Z_n) \mapsto \frac{(|Z_0|, \dots, |Z_n|)}{|Z_0| + \dots + |Z_n|}$$

в стандартный симплекс $\Sigma_n = \{t \in R^{n+1} : t_j \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$.

Замечание. Проективное пространство CP_n представляет собой объединение комплексного тора $(C \setminus \{0\})^n$ и $(n+1)$ гиперплоскостей $\{Z_j = 0\}$, $j = 0, \dots, n$. Поскольку обычная амеба A_V соответствует лишь точкам комплексного тора $(C \setminus \{0\})^n$, компактифицированная амеба $\overline{A_V}$ соответствует обычной амебе с присоединенными $(n+1)$ компактифицированными амебами для гиперповерхностей $V_j = V \cap \{Z_j = 0\}$ размерности $(n-1)$.

Определение. *Контуром компактифицированной амебы* назовем образ множества критических точек проекции $Log|_V$ при моментном отображении μ.

Пример 1. Амеба комплексной прямой $z_1 + z_2 + 1 = 0$ изображена на рис. 1 справа. Контур этой амебы кроме границы ∂A_V других точек не содержит. На рис. 1 слева комплексная прямая изображена на диаграмме Рейнхарта, где осями служат $|z_1|, |z_2|$. Компактифицированная амеба комплексной прямой изображена на рис. 2 в виде затемненного треугольника.

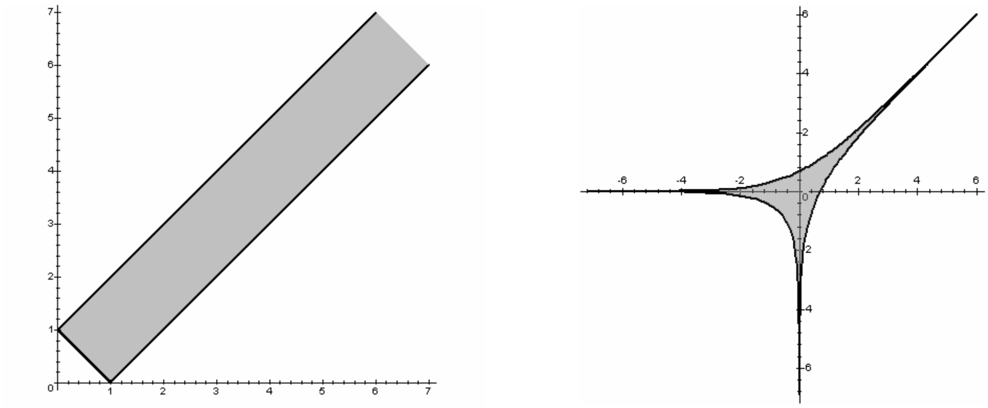

Рис. 1. Диаграмма Рейнхарта и амеба комплексной прямой $z_1 + z_2 + 1 = 0$

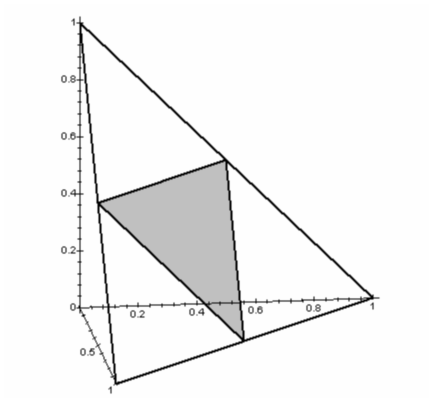

Рис. 2. Компактифицированная амеба комплексной прямой $z_1 + z_2 + 1 = 0$

Пример 2. Амеба дискриминанта $\Delta(z_1, z_2)$ уравнения $y^3 + z_2 y^2 + z_1 y - 1 = 0$ изображена на рис. 3. В отличие от амебы комплексной прямой, контур этой амебы содержит *внутреннюю* часть – часть каспидальной кривой (“клюва”), расположенную внутри амебы.

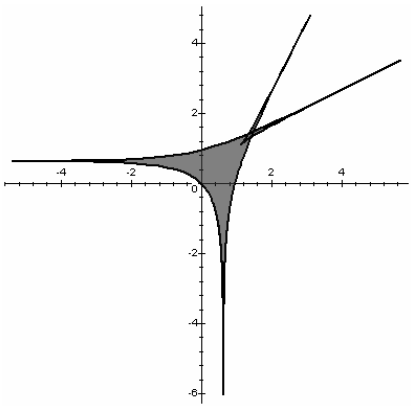

Рис. 3. Амеба дискриминанта $\Delta(z_1, z_2) = 27 - 4z_2^3 + 4z_1^3 + 18 z_1 z_2 - z_1^2 z_2^2$

Теорема. Компактифицированная амеба $\overline{A_V}$ гиперплоскости $V = \{z \in (C \setminus \{0\})^n : f = b_0 + b_1 z_1 + \dots + b_n z_n = 0\}$, все $b_j \neq 0$, есть n-мерный многогранник в симплексе Σ_n с $2(n+1)$ гипергранями, заданный условиями

$$t_j \geq 0, \quad \sum_{l=0}^{n} t_l = 1, \quad \beta_j t_j \leq \sum_{k \neq j} \beta_k t_k, \quad j = 0, \dots, n, \tag{1}$$

где $\beta_j = |b_j|$. Внешняя часть контура амебы (т.е. лежащая на границе $\partial \overline{A_V}$) состоит из $n+1$ симплициальных граней $\overline{A_V}$:

$$\left\{ t \in \Sigma_n : \quad \beta_j t_j = \sum_{k \neq j} \beta_k t_k \right\}, \quad j = 0, \ldots, n,$$

а внутренняя часть – из $2^n - (n+2)$ многогранников вида

$$\left\{ t \in \Sigma_n : \quad \sum_{k \in I} \beta_k t_k = \sum_{l \notin I} \beta_l t_l \right\}, \quad I \subset \{0, \ldots, n\}, \quad 2 \leq \# I \leq n-1 .$$

Замечание. Как уже отмечалось, в случае $n = 2$ внутренняя часть контура компактифицированной амебы пуста. При $n = 3$ компактифицированная амеба гиперплоскости $z_1 + z_2 + z_3 + 1 = 0$ (в C^3) изображается в виде октаэдра (рис. 4, справа).

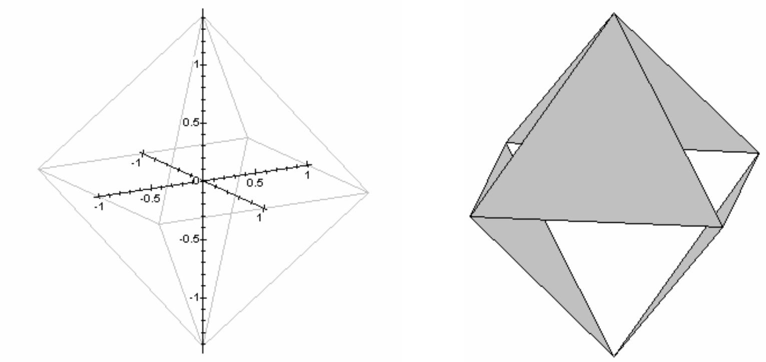

Рис. 4. Внутренняя и внешняя части контура компактифицированной амебы комплексной гиперплоскости $z_1 + z_2 + z_3 + 1 = 0$

Серым цветом на рисунке выделена внешняя часть контура амебы, состоящая из $n + 1 = 4$ граней октаэдра; остальные $2^n - 1 - (n+1) = 3$ внутренние части контура представляют собой параллелограммы, разбивающие октаэдр на две четырехугольные пирамиды (рис. 4, слева). В соответствии с замечанием к определению компактифицированной амебы, четыре незатемненные грани октаэдра соответствуют амебам меньшей размерности и представляют собой треугольники (см. рис. 2).

Доказательство. Доказательство того, что компактифицированная амеба $\overline{A_V}$ представляет собой многогранник, заданный условиями (1), приводится в статье [5].

Для нахождения контура амебы необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ \dfrac{z_1 f'_{z_1}}{s_1} = \cdots = \dfrac{z_n f'_{z_n}}{s_n} \end{cases},$$

принимающую в нашем случае вид

$$\begin{cases} b_0 + b_1 z_1 + \cdots + b_n z_n = 0 \\ \dfrac{b_1 z_1}{s_1} = \cdots = \dfrac{b_n z_n}{s_n} \end{cases},$$

где $(s_1 : \ldots : s_n) \in RP_{n-1}$. Решение $z(s)$ этой системы и есть множество критических точек логарифмического отображения $Log|_V$. Нетрудно видеть, что $z(s)$ задается формулами.

$$b_j z_j = -b_0 \frac{s_j}{s_1 + \cdots + s_n}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда контур $\overline{A_V}$, равный образу $\mu(z(s))$, задается параметризацией $s \to t$:

$$(t_0,\dots,t_n)=\frac{\left(\frac{1}{\beta_0},\frac{1}{\beta_1}\left|\frac{s_1}{s_1+\dots+s_n}\right|,\dots,\frac{1}{\beta_n}\left|\frac{s_n}{s_1+\dots+s_n}\right|\right)}{\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{\beta_1}\left|\frac{s_1}{s_1+\dots+s_n}\right|+\dots+\frac{1}{\beta_n}\left|\frac{s_n}{s_1+\dots+s_n}\right|}.$$

Напомним, что $\beta_j=|b_j|$. Упрощая это выражение и обозначая $s_0:=s_1+\dots+s_n$, получим

$$(t_0,\dots,t_n)=\frac{\left(\frac{|s_0|}{\beta_0},\frac{|s_1|}{\beta_1},\dots,\frac{|s_n|}{\beta_n}\right)}{\frac{|s_0|}{\beta_0}+\frac{|s_1|}{\beta_1}+\dots+\frac{|s_n|}{\beta_n}}. \tag{2}$$

Уравнения

$$s_0=0, s_1=0,\dots,s_n=0 \tag{3}$$

разбивают пространство R^n параметров s на области знакопостоянства $s_0, s_1,\dots,s_n$, в каждой из которых мы можем раскрыть модули в выражении (2). Выполняя это, мы получим уравнения для кусков контура амебы $\overline{A_V}$:

$$\varepsilon_0\beta_0 t_0=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\beta_j t_j,\quad \varepsilon_j=sign\, s_j. \tag{4}$$

Отметим, что каждый из указанных кусков контура плоский, так как задается линейным уравнением. Далее будет показано, что каждая такая часть представляет собой сечение амебы $\overline{A_V}$ плоскостью, проходящей через “вершинные точки” амебы.

Для подсчета числа кусков контура (в координатах t_j) и выяснения их местоположения в амебе $\overline{A_V}$ перейдем в параметризации (2) от однородных координат $s_1:\ldots:s_n$ проективного пространства RP_{n-1} к афинным координатам, полагая $s_n=1$. Оставшиеся свободные параметры $s_1,\dots,s_{n-1}$ параметризуют все точки контура, кроме тех, что могут быть получены как предельные при $s_1,\dots,s_{n-1}\to\infty$.

Тогда плоскости

$$s_1=0,\dots,s_{n-1}=0$$

разбивают пространство R^{n-1} на 2^{n-1} гипероктантов – областей знакопостоянства $s_1,\dots,s_{n-1}$, а плоскость

$$s_0=s_1+\dots+s_{n-1}+1=0$$

дополнительно разбивает каждый гипероктант R^{n-1}, кроме первого $\{s_1>0,\dots,s_{n-1}>0\}$, на две части (рис. 5).

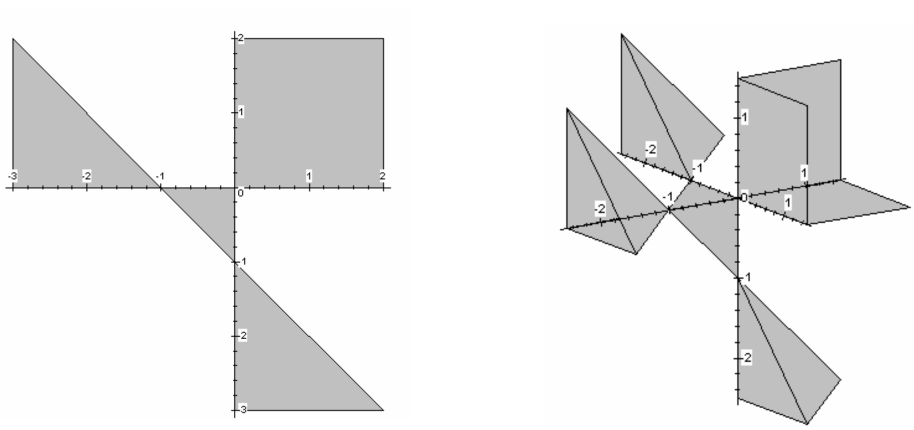

Рис. 5. Параметризация контура амебы комплексной гиперплоскости для $n=3$ ***и*** $n=4$

Следовательно, всего имеется $2^n - 1$ областей знакопостоянства $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$, соответствующих $2^n - 1$ плоским частям контура $\overline{A_V}$.

Внешним частям контура, лежащим на границе амебы $\overline{A_V}$, соответствуют следующие комбинации знаков $s_1, \ldots, s_{n-1}$ и $s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1$:

а) $s_1 > 0, \ldots, s_{n-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1 > 0$.

В этом случае соответствующая часть в контуре (4) задается уравнением

$$\beta_0 t_0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j t_j \ ;$$

б) $s_1 < 0, \ldots, s_{n-1} < 0, s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1 > 0$.

Перенося в (4) слагаемые $\beta_1 t_1, \ldots, \beta_{n-1} t_{n-1}$ в левую часть, получим:

$$\beta_0 t_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j t_j = \beta_n t_n \, ;$$

в) $s_1 < 0, \ldots, s_k < 0, \ldots, s_{n-1} < 0, s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1 < 0$

Перенося слагаемое $\beta_0 t_0$ в правую часть, а $\beta_k t_k$ – в левую, получим:

$$\beta_k t_k = \sum_{j \neq k} \beta_j t_j \, .$$

В каждом из перечисленных случаев система (4) может быть приведена к виду

$$t \in \Sigma_n : \quad \beta_j t_j = \sum_{k \neq j} \beta_k t_k \, , \tag{5}$$

соответствующему границе многогранника компактифицированной амебы $\overline{A_V}$. Всего имеется $n+1$ внешних частей контура. На рис. 5 эти части отмечены серым цветом; в правой части рисунка, соответствующей $n = 4$, серым отмечены лишь границы трехмерных областей параметризации.

Покажем, что все остальные комбинации знаков $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ соответствуют *внутренним* частям контура амебы $\overline{A_V}$, и эти части задаются в Σ_n уравнениями

$$\sum_{k \in I} \beta_k t_k = \sum_{l \notin I} \beta_l t_l, \quad I \subset \{0, \ldots, n\}, \quad 2 \leq \# I \leq n-1 \, . \tag{6}$$

Рассматривая ненулевые значения t, соответствующие внутренней части Σ_n, мы получим для обеих сумм строгие неравенства вида:

$$t \in \operatorname{int} \Sigma_n : \quad \beta_j t_j < \sum_{k \in I} \beta_k t_k = \sum_{l \notin I} \beta_l t_l, \quad \forall j = 0 \ldots n \, .$$

Эта система всегда имеет решение, т.к. мы можем выбрать $t_k = t', k \in I$, $t_l = t'', l \notin I$, и подобрать такое λ, чтобы $t_k = \lambda t', t_l = \lambda t''$ лежали внутри Σ_n. Сопоставляя неравенства системы, с неравенствами (1), задающими амебу $\overline{A_V}$ в целом, легко видеть, что определяемые ими части контура действительно лежат *внутри* амебы.

Формально число уравнений вида (6) равно $\sum_{k=2}^{n-1} C_{n+1}^k$, но так как комплементарным наборам индексов I и $I' = \{0, \ldots, n\} \setminus I$ соответствуют одинаковые уравнения, то общее число внутренних частей контура равно $\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} C_{n+1}^k = 2^n - 1 - (n+1)$.

Выясним строение внешних и внутренних частей контура. Для этого рассмотрим границу амебы $\overline{A_V}$. Как уже упоминалось, она задается уравнениями

$$t \in \Sigma_n : \quad \beta_j t_j = \sum_{k \neq j} \beta_k t_k \, , \quad j = 0, \ldots, n \, . \tag{7}$$

Рассмотрим пересечение плоскостей (7) с ребрами симплекса Σ_n. Для этого положим все $t_j = 0$, кроме пары $t_k \neq 0,\ t_l \neq 0$. Тогда искомые точки пересечения будут задаваться уравнениями

$$\beta_j t_j = \beta_k t_k, \quad t_j + t_k = 1, \quad j = 0,\ldots,n, \quad k = 0,\ldots,n, \quad j \neq k .$$

Эти точки являются вершинными точками амебы $\overline{A_V}$, а сама амеба есть выпуклая линейная комбинация этих точек.

Для того чтобы выяснить, через какие вершинные точки $\overline{A_V}$ проходят плоские части контура амебы, подставим координаты этих точек в соответствующие уравнения (4). Иначе говоря, в этих уравнениях нам нужно занулить все t_j, кроме двух.

Рассматривая уравнения (4) в видах (5) и (6), обратим внимание, что все компоненты левой и правой сумм неотрицательны. Поэтому, оставляя ненулевыми два параметра t_j, мы обязательно должны один из них оставить в левой части, а другой – в правой.

Таким образом, внешние части (5) контура пересекают симплекс Σ_n в n вершинных точках амебы. Соответственно, каждая такая часть представляет собой симплекс, натянутый на n вершинных точек. Аналогично, внутренние части (6) контура при $\#I = k$ пересекают Σ_n в $k(n+1-k)$ точках и также являются выпуклой комбинацией этих точек.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser, Boston, 1994.
2. Passare M., Tsikh A. Amoebas: their spines and contours// Contemporary maths. V. 377 (2005). P. 275-288.
3. Mikhalkin G. Real algebraic curves, the moment map and amoebas// Ann. Math. V. 151 (2000). P. 309–326.
4. Theobald T. Computing amoebas// Experimental Math. V. 11 (2002). P. 513–526.
5. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas// Advances in mathematics. V. 151 (2000). P. 54–70.

THE CONTOUR OF COMPACTIFIED HYPERPLANE AMOEBA

K.V.Kuzvesov

In this paper the structure of compactified hyperplane amoeba contour is investigated.