

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12: 531.51

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ГЕНЕРАЦИИ СТАТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ

А.М.Баранов, Н.Н.Паклин*

Рассмотрено статическое сферически симметричное распределение идеальной жидкости. Описана процедура нахождения точных решений и способы ее обобщения. Представлено семейство точных решений в координатах кривизн.

В работе [1] была предложена процедура генерации точных статических сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости. Действие процедуры, названной методом сдвигов, было продемонстрировано в радиационных координатах Бонди. Уравнения Эйнштейна удалось преобразовать к линейному виду благодаря специальному выбору метрических коэффициентов. Таким образом, было получено семейство точных решений.

Здесь мы обобщим процедуру генерации, а в качестве примера предложим другой способ записи метрических коэффициентов, приводящих уравнения Эйнштейна к линейному виду. В результате семейство точных решений значительно расширяется.

Статическое сферически симметричное гравитационное поле будем описывать в терминах метрических коэффициентов первой квадратичной формы (метрики), которую мы выберем в виде

$$ds^2 = y^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{z} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где $y = y(r)$, $z = z(r)$; t, r, θ, φ – временная, радиальная и угловые переменные соответственно; c – скорость света.

Вещество будем описывать тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\mu + p)u_i u_k - p g_{ik}, \quad (2)$$

где $\mu(r)$ – плотность энергии; $p(r)$ – давление; u_i – 4-скорость; g_{ik} – метрический тензор, отвечающий записи метрики в форме (1). Индексы i, k пробегает значения 0, 1, 2, 3.

Уравнения Эйнштейна берутся в стандартном виде

$$R_{ik} - g_{ik} R / 2 = -8\pi G_N T_{ik} / c^4, \quad (3)$$

где R_{ik} – тензор Риччи; R – след тензора Риччи (скалярная кривизна); G_N – постоянная тяготения Ньютона (далее положим $G_N = 1$, $c = 1$), в случае статики, сферической симметрии и идеальной жидкости представляют собой недоопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Удобно ввести новую независимую переменную $x = r^2$, тогда плотность энергии и давление явно выражаются через метрические коэффициенты и их производные по переменной x , которые будем обозначать штрихом:

$$8\pi\mu = \frac{1-z}{x} - 2z'; \quad (4)$$

$$8\pi p = \frac{z-1}{x} + 4z \frac{y'}{y}, \quad (5)$$

а для метрических коэффициентов получается уравнение

$$4x^2 zy'' + 2x^2 z'y' + (1 - z + xz')y = 0. \quad (6)$$

* © А.М.Баранов, bam@lan.krasu.ru; Н.Н.Паклин, paklin@lan.krasu.ru, Красноярский государственный университет, 2006.

Последнее уравнение относительно функции y является линейным однородным второго порядка, т.е. функция z считается заданной. Если в этом уравнении считать теперь заданной функцию y , то относительно функции z получится линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$(y + 2xy')xz' + (4x^2y'' - y)z + y = 0. \quad (7)$$

Линейность уравнения сама по себе очень удачное обстоятельство, потому что, во-первых, теория таких уравнений хорошо развита, во-вторых, знание частного решения помогает находить общее решение.

Пусть, например, задана функция $z(x)$ и мы нашли частное решение $y_0(x)$, тогда общее решение можно выразить в виде квадратуры

$$y(x) = y_0(x) \left[A + B \int \frac{dx}{\sqrt{z(x)y_0^2(x)}} \right], \quad (8)$$

где A и B – постоянные. Если же мы задали функцию $y(x)$, то метод вариации постоянной позволяет выразить общее решение $z(x)$ в виде

$$z(x) = z_0(x)[C - z_1], \quad (9)$$

где C – постоянная, а функции $z_0(x)$ и $z_1(x)$ выражаются через квадратуры как

$$z_0(x) = \exp \int \frac{y - 4x^2y''}{y + 2xy'} \frac{dx}{x}; \quad z_1 = \int \frac{y}{z_0(y + 2xy')} \frac{dx}{x}. \quad (10)$$

Метод сдвигов

Точное статическое сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости определяется парой функций (y, z) . Пусть нам известно частное решение (y, z) , например плоское пространство-время, описывается парой $(y = 1, z = 1)$. Зафиксируем функцию z и найдем более общее решение для функции \bar{y} , в итоге получим другое точное решение (\bar{y}, z) . Произошел сдвиг в пространстве решений, для краткости назовем его y -сдвигом. Если нам удалось получить общее решение для функции y , то дальнейшая процедура замкнется и y -сдвиг превратится в тождественное преобразование. Если зафиксировать функцию y и найти более общее решение для функции \bar{z} , то получим еще одно точное решение (y, \bar{z}) . Такое преобразование назовем z -сдвигом. Точные решения (\bar{y}, z) и (y, \bar{z}) можно использовать для получения новых точных решений. Применим y -сдвиг к паре (y, \bar{z}) , в результате получим пару (\tilde{y}, \bar{z}) . Если применим z -сдвиг к паре (\bar{y}, z) , то в результате получим пару (\bar{y}, \tilde{z}) . Вообще говоря, $(\tilde{y}, \bar{z}) \neq (\bar{y}, \tilde{z})$, т.е. сдвиги не коммутируют.

Применяя сдвиги поочередно к различным частным решениям, можно находить семейства заведомо точных решений. Следует отметить, что физический смысл таких решений нужно исследовать дополнительно. Некоторые решения обладают сингулярностями, а некоторые вообще лишены физического смысла. Однако решение, полученное из нефизического решения, может обладать физическим смыслом. Следовательно, каждое точное решение представляет интерес, хотя бы как затравочное.

Обобщение метода сдвигов

Из формулы (9) видно, что общее решение для функции $z(x)$ содержит одну постоянную интегрирования C . Если после z -сдвига постоянную интегрирования устремить к нулю $C \rightarrow 0$, то произойдет предельный переход (обратный z -сдвиг): $\lim_{C \rightarrow 0} z(x) = z_0(x)$, назовем его для краткости C -сдвигом.

Общее решение для функции $y(x)$ из выражения (8) содержит две постоянные интегрирования A и B . Если после y -сдвига постоянную интегрирования B устремить к нулю, то произойдет предельный переход: $\lim_{B \rightarrow 0} y(x) = Ay_0(x)$, где $Ay_0(x) = y_1(x)$ – частное решение, для краткости назовем этот предельный переход B -сдвигом. Если же постоянную интегрирования A устремить к нулю после y -сдвига, то произойдет другой предельный переход: $\lim_{A \rightarrow 0} y(x) = y_2(x)$, где $y_2(x)$ – другое частное решение, для краткости назовем этот предельный переход A -сдвигом. Обратный y -сдвиг получается в результате двойного предельного перехода

$$\lim_{B \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} y(x) = y_0(x).$$

Сдвиги и пределы коммутируют.

Очень удобно дополнить сдвиги такими предельными переходами, так как это позволяет получать больше точных решений и устанавливать связи между решениями, которые не были связаны сдвигами. Например, сдвиги часто приводят к квадратурам, не выражающимся через элементарные функции и содержащим несколько параметров. Предельный переход по одному из параметров позволяет выразить квадратуру через элементарные функции, а дальнейшие сдвиги дают новые решения.

Семейство точных решений, полученное обобщенным методом сдвигов, можно представить в виде двумерной (плоской) диаграммы (таблицы). Дадим этому семейству условное название «слой». Можно дополнить обобщенный метод сдвигов множеством точечных преобразований независимой переменной r и метрических коэффициентов g_{ik} . В результате точечных преобразований $(r, g_{ik}) \rightarrow (\bar{r}, \bar{g}_{ik})$ уравнения тяготения могут изменить свой вид. Применяя обобщенный метод сдвигов к новым уравнениям, будем получать новые слои. Эти новые семейства представляют собой те же точные решения, но переписанные в новых координатах. Таким образом, переход между слоями изменяет аналитическую форму записи точного решения, не меняя его физических свойств.

Точное решение в одном из слоев может выражаться через специальные функции или сложные квадратуры, а переход в другой слой позволит выразить это же решение через элементарные функции. В этом и заключается смысл точечных преобразований, хотя новая точка зрения на проблему имеет самостоятельный интерес.

Если снабдить множество точечных преобразований параметром и потребовать выполнение аксиом группы, то переход между слоями будет непрерывным. Пространство решений в окрестности слоя приобретет структуру расслоенного многообразия, где роль базы будет играть групповой параметр.

В случае группы симметрии (в смысле теории Ли) уравнение не меняет вида и мы остаемся в пределах данного слоя. Метод групп Ли будет дополнять метод сдвигов, во многом пересекаясь с его результатами.

Применение обобщенного метода сдвигов

В качестве примера рассмотрим семейство решений, соответствующих (1). Начнем с внешнего решения Шварцшильда

$$y^2 = z = 1 - 2m/r, \quad (11)$$

$\mu = 0$, $p = 0$ (вакуум). Предельный переход $m \rightarrow 0$, соответствует C -сдвигу и B -сдвигу одновременно, в результате получается плоское решение

$$y = z = 1, \quad (12)$$

$\mu = 0$, $p = 0$ (вакуум). z -сдвиг внешнего решения Шварцшильда дает сингулярное решение

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - 2m/r, \quad z = 1 - 2m/r - C(r^2 - 4mr + 5m^2 - 2m^3/r); \\ 8\pi\mu &= (r - m)(3r - 5m)C/r^2; \\ 8\pi p &= -(r - m)^2 C/r^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Предельный переход $m \rightarrow 0$ из этого решения соответствует C -сдвигу и дает решение, известное как «статическая вселенная Эйнштейна», которое получается так же, как z -сдвиг из плоского решения:

$$y = 1, \quad z = 1 - Cr^2, \quad 8\pi\mu = C, \quad 8\pi p = -C/3. \quad (14)$$

Это однородная статическая модель вселенной с уравнением состояния $p = -\mu/3$.

Теперь применим y -сдвиг к внешнему решению Шварцшильда:

$$z = 1 - 2m/r, \quad y = A\sqrt{z} + B[r^2 + 5mr - 30m^2 + 15\sqrt{z}m^2 \ln(r - m + r\sqrt{z})]. \quad (15)$$

Для этого решения $\mu = 0$, а $p \neq 0$, т.е. без космологической постоянной физический смысл вообще отсутствует, с учетом же космологического члена: $8\pi\mu = \Lambda$, а $8\pi p + \Lambda < 0$. Предельный переход $m \rightarrow 0$ из этого решения соответствует C -сдвигу и дает решение, которое получается так же, как y -сдвиг из плоского решения:

$$y = A + Br^2, \quad z = 1. \quad (16)$$

Данному решению физический смысл можно придать только с учетом космологической постоянной:
 $8\pi\mu = \Lambda$, $8\pi p = 4B/(A + Br^2) - \Lambda$.

z -Сдвиг решения (15) дает выражение вида (9) со сложными квадратурами вида (10), в которых функция y берется из (15). Предельный переход $B \rightarrow 0$ преобразует это сложное выражение в (13), а предельный переход $m \rightarrow 0$ приводит к решению Адлера

$$\begin{aligned} y &= A + Br^2, \quad z = 1 - Cr^2/(A + 3Br^2)^{2/3}; \\ 8\pi\mu &= C(3A + 5Br^2)/(A + 3Br^2)^{5/3}; \\ 8\pi p &= (A + Br^2)^{-1}[4B - C(A + 5Br^2)/(A + 3Br^2)^{2/3}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение Адлера получается так же, как z -сдвиг из (16). Предельный переход $A \rightarrow 0$ переводит решение Адлера в сингулярное решение

$$y = Br^2, \quad z = 1 - Cr^{2/3}, \quad 8\pi\mu = 5C/B^{2/3}z^{5/3}r^{4/3}, \quad 8\pi p = 4/r^2 - 5C/B^{2/3}z^{2/3}r^{4/3}. \quad (18)$$

Если применить к решению Адлера y -сдвиг, то получим решение вида (8), которое выражается через эллиптические интегралы Лежандра. В отличие от решения Адлера это обобщенное решение позволяет обратить плотность массы в нуль на границе шара: $\mu(R) = 0$.

Применим y -сдвиг к решению (13), в результате получим сингулярное решение вида (8), выражающееся через эллиптические интегралы Лежандра. Предельный переход $B \rightarrow 0$ переводит его в (15), а предельный переход $m \rightarrow 0$ дает «внутреннее решение Шварцшильда»

$$z = 1 - Cr^2, \quad y = A - B\sqrt{z}, \quad 8\pi\mu = 3C, \quad 8\pi p = C(A - 3B\sqrt{z})/(A - B\sqrt{z}), \quad (19)$$

которое можно получить как y -сдвиг из «статической вселенной Эйнштейна» (14).

Предельный переход $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 1$ преобразует (19) в решение де Ситтера

$$z = y^2 = 1 - Cr^2, \quad 8\pi\mu = 3C, \quad 8\pi p = -3C. \quad (20)$$

Это однородная статическая модель вселенной с уравнением состояния $p = -\mu$.

z -Сдвиг решения (20) дает решение, известное как «четвертое решение Толмена» (Толмен-4)

$$\begin{aligned} y^2 &= A + Br^2, \quad z = (1 + Cr^2)(A + Br^2)/(A + 2Br^2); \\ 8\pi\mu &= (B - AC - CBr^2)/(A + 2Br^2) + 2AB(1 + Cr^2)/(A + 2Br^2)^2; \\ 8\pi p &= (B + AC + 3CBr^2)/(A + 2Br^2). \end{aligned} \quad (21)$$

y -Сдвиг решения (21) дает решение вида (8), которое выражается через эллиптические интегралы Лежандра. В отличие от решения Толмен-4 это обобщенное решение позволяет на границе шара обратить в нуль плотность массы: $\mu(R) = 0$.

Если применить z -сдвиг к внутреннему решению Шварцшильда, то получим решение вида (9) со сложными квадратурами вида (10), где функция y берется из (19), которое в пределе $A \rightarrow 0$ дает решение (21).

Решение (14) можно получить как предельный переход $n \rightarrow 0$ из «пятого решения Толмена» (Толмен-5)

$$\begin{aligned} y &= Ar^n, \quad z = 1/a - br^c, \quad c = 2a/(1+n), \quad a = 1 + 2n - n^2, \\ 8\pi\mu &= [a - 1 + ab(c+1)r^c]/ar^2, \quad 8\pi p = [2n + 1 - a - ab(2n+1)r^c]/ar^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Само решение (22) допускает обобщение посредством y -сдвига:

$$\begin{aligned} z &= 1/a - br^c, \quad y = r[AP(\alpha, \beta, \sqrt{1 - abr^c}) + BQ(\alpha, \beta, \sqrt{1 - abr^c})], \\ \alpha &= (-c + \sqrt{32 - 16c + c^2})/2c, \quad \beta = 2\sqrt{2 - a}/c. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь A , B – постоянные, P , Q – обобщенные функции Лежандра. В пределе $n \rightarrow 0$ (23) переходит в (19).

Решение (16) можно получить как предельный переход $n \rightarrow \pm 1$ из «шестого решения Толмена» (Толмен-6)

$$z = 1/(2 - n^2), \quad y = r(A/r^n + Br^n), \quad (24)$$

$$8\pi\mu = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 - 2}\right) \frac{1}{r^2}, \quad 8\pi p = \frac{A(n-1)^2 + (n+1)^2 Br^{2n}}{(n^2 - 1)(A + Br^{2n})r^2}.$$

Если $n \neq 0$, то решение (24) не допускает обобщения посредством y -сдвига. Если $n = 0$, то y -сдвиг решения (24) дает сингулярное решение

$$y = r[A + B \ln(r)], \quad z = \frac{1}{2}, \quad 8\pi\mu = \frac{1}{2r^2}, \quad 8\pi p = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{A + B \ln(r)} \right). \quad (25)$$

Если применить z -сдвиг к решению (24), то получим решение вида (9) со сложными квадратурами вида (10), где функция y берется из (24). Это обобщенное решение в пределе $n \rightarrow \pm 1$ дает решение (17), в остальных случаях получаются сингулярные решения.

Результаты

Изложенные результаты можно наглядно представить в виде диаграммы на рис.1. Необходимо отметить, что на рис.1 изображены не все возможные переходы. Если учесть коммутативность сдвигов и пределов, то решения, связанные опосредованно, можно соединить прямыми переходами.

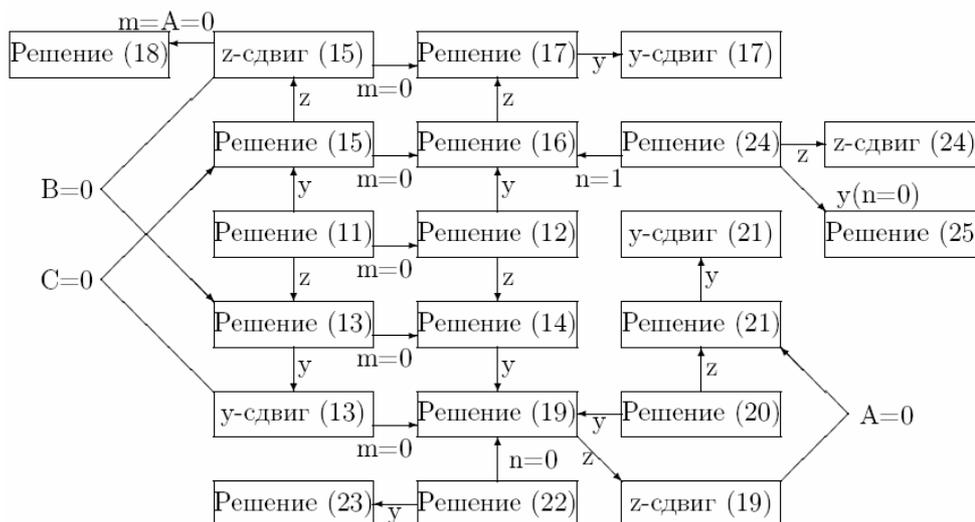


Рис.1. Наглядная схема цепочек сдвигов и пределов, показывающих переходы от одних точных решений к другим

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А.М. Генерирование и конструирование статических сферически симметричных решений уравнений тяготения / А.М.Баранов, Н.Н.Паклин // Известия вузов. Физика. – 1990. – № 6. – С. 5-9.

AN EXTENSION OF THE GENERATION METHOD OF STATIC SPHERICAL SOLUTIONS OF THE GRAVITATION EQUATIONS

A.M. Baranov, N.N. Paklin

A static spherically symmetric distribution of a perfect fluid is considered. A procedure of exact solutions' finding and ways of its generalization is described. The set of exact solutions in coordinates of curvatures is submitted.