УДК 517.95+532

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРУППОВОГО АНАЛИЗА К УРАВНЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИКИ

А.А. Родионов*

Представлены групповые свойства уравнений вращательно-симметричного движения в эйлеровых и лагранжевых координатах. Приведены примеры поиска решений этих уравнений. Дана физическая интерпретация решений.

Групповой анализ дифференциальных уравнений давно стал мощным инструментом исследования нелинейных уравнений и краевых задач. Особенно плодотворно его применение к фундаментальным уравнениям механики и физики, поскольку принципы инвариантности закладываются уже при выводе этих уравнений. Не случайно уравнения гидродинамики являются объектом приложения новых идей и методов группового анализа, развиваемых Л.В. Овсянниковым и его школой.

Целью группового анализа уравнений в эйлеровых координатах является поиск основной группы преобразований, оставляющей уравнения инвариантными. Основной группе преобразований соответствует базис алгебры Ли операторов, для которых строятся оптимальные системы подалгебр. На операторах оптимальных систем подалгебр ведется целенаправленный поиск существенно различных точных инвариантных решений.

Часто в гидродинамике выделяют классы задач со свободными границами. В эйлеровых координатах на свободной границе необходимо выполнение кинематического и динамического условий. В лагранжевых же координатах кинематическое условие выполняется всегда, необходимо выполнение динамического условия на свободной границе. Переход от эйлеровых к лагранжевым координатам – нелокальное преобразование, и поэтому между основными группами Ли изучаемых уравнений, вообще говоря, не должно быть изоморфизма. Уравнения гидродинамики в лагранжевых координатах часто интегрируются, что вводит в результирующую систему произвольные функции (начальные данные). Тем самым возникает задача групповой классификации: выделяются классы функций начального распределения, для которых базисы алгебры Ли операторов различные. В дальнейшем ведется поиск точных решений. Оказывается, что основная группа Ли при переходе к переменным Лагранжа становится бесконечномерной и по пространственным координатам. Схема исследования уравнений приведена на рис. 1. Заметим, что многие из решений в переменных Лагранжа не удается найти, рассматривая уравнения гидродинамики в переменных Эйлера.

Рис. 1

Эйлеровы координаты. В переменных Эйлера рассматриваем уравнения вращательно-симметричного движения неоднородной жидкости в цилиндрических координатах

$$u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho} p_r = 0, \quad v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} = 0, \quad w_t + uw_r + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z = 0,$$
$$\rho_t + u\rho_r + w\rho_z = 0, \quad u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0, \tag{1}$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости по направлениям r, θ, z; ρ – плотность жидкости, p – давление; функции зависят от t, r, z.

Базис алгебры Ли операторов для уравнений (1) будет таким [1]:

$$X_1 = \partial_z, \quad X_2 = t\partial_z + \partial_w, \quad X_3 = \partial_t, \quad X_4 = r\partial_r + z\partial_z + t\partial_t,$$
$$X_5 = 2r\partial_r + 2z\partial_z + t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2p\partial_p, \tag{2}$$
$$X_6 = 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p, \quad X_7 = -\frac{1}{r^2 v\rho}\partial_v + \frac{1}{r^2}\partial_p, \quad X_8(\varphi) = \varphi(t)\partial_p.$$

Операторы X_1, X_3 определяют группу сдвигов по переменным z, t соответственно; оператор X_2 – группу галилеевых переносов по z; операторы X_4, X_5, X_6 дают группы растяжений по соответствующим направлениям; оператор $X_8(\varphi)$ является бесконечномерным и определяет сдвиги по p с произвольной функцией $\varphi(t)$; оператор X_7 отражает свойство вращательной симметрии системы (1), ему соответствует группа

$$G_7: \quad t' = t, \quad r' = r, \quad z' = z, \quad u' = u, \quad v' = \pm\left(v^2 - \frac{2a}{\rho r^2}\right)^{-1/2}, \quad w' = w, \quad p' = p + \frac{a}{r^2}, \quad \rho' = \rho,$$

где a – параметр.

Вычисления показывают [2], что оптимальная система подалгебр первого порядка Θ_1 имеет вид

$$\varepsilon X_1 + \delta X_7 + X_8(\varphi); \quad X_2 + \varepsilon X_7 + X_8(\varphi); \quad X_4 - X_5 - 2X_6 + X_8(\varphi); \quad \varepsilon_1 X_2 + X_3 + \varepsilon_2 X_7;$$
$$\varepsilon X_2 + \nu X_3 + X_6; \quad \nu X_2 + X_6; \quad \varepsilon X_1 + X_6; \quad \varepsilon X_2 + X_5 + cX_6; \quad \varepsilon X_2 + X_5 - 2X_6 + \nu X_7;$$
$$X_4 + bX_5 + cX_6; \quad X_4 + bX_5 - 2(3+b)X_6 + \nu X_7; \quad \nu X_3 + X_4 - X_5 + cX_6; \tag{3}$$
$$\nu_1 X_3 + X_4 - X_5 - 4X_6 + \nu_2 X_7; \quad \nu X_1 + X_4 - 2X_5 + cX_6; \quad \nu_1 X_1 + X_4 - 2X_5 - 2X_6 + \nu_2 X_7;$$
$$\delta = \{0{,}1\}; \quad \varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = \{-1;0;1\}; \quad \nu,\ \nu_1,\ \nu_2 = \{-1;1\},$$

где b, c – произвольные постоянные, $\varphi(t)$ – произвольная гладкая функция. На каждой из этих линейных комбинаций операторов можно строить существенно различные инвариантные решения уравнений (1) [3].

Пример. Рассмотрим подалгебру $\varepsilon X_1 + \delta X_7 + X_8(\varphi)$ при $\varepsilon \neq 0$, $\delta = 0$. Инварианты оператора определяют вид решения

$$(u, v, w, \rho, p) = (U, V, W, R, \varepsilon z\varphi(t) + P)$$

Функции U, V, W, R, P зависят от (t, r). Уравнения (1) преобразуются в фактор-систему

$$U_t + UU_r - \frac{V^2}{r} + \frac{1}{R}P_r = 0, \quad V_t + UV_r + \frac{UV}{r} = 0, \quad W_t + UW_r + \frac{\varepsilon\varphi(t)}{R} = 0,$$
$$R_t + UR_r = 0, \quad (rU)_r = 0. \tag{4}$$

Из (4) получаем $U = C(t)/r$ с произвольной функцией $C(t)$.

Введем лагранжеву координату $\xi: dr/dt = U,\ r\big|_{t=0} = \xi.$ Тогда

$$r = \left[\xi^2 + 2\int_0^t C(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Решение четырех уравнений системы (4) представимо в виде

$$V = \xi V_0(\xi) r^{-1}, \quad W = -\frac{\varepsilon}{R_0(\xi)} \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau + W_0(\xi),$$
$$R = R_0(\xi), \quad P = -\int R_0(\xi) r_\xi [r_{tt} - \xi^2 V_0^2(\xi) r^{-3}]\, d\xi \tag{6}$$

с произвольными гладкими функциями $R_0(\xi)$, $W_0(\xi)$, $V_0(\xi)$. .

Точное частное решение исходной системы (1) будет таким:

$$u = r^{-1} C(t), \quad v = V(\xi, t), \quad w = W(\xi, t), \quad \rho = R_0(\xi),$$
$$p = \varepsilon z \varphi(t) + P(\xi, t), \quad \xi = \left[r^2 - 2\int\limits_0^t C(\tau)\, d\tau \right]^{1/2}. \tag{7}$$

При $C(t) = 0$ решение (7) описывает нестационарное вихревое движение струи со свободной границей $r(t) = \xi_1 = \text{const}$ (либо движение в трубе), вдоль которой приложено давление $q(z,t) = z\varphi(t) + P(\xi_1, t)$. Если $C(t) \neq 0$, то получим описание движения цилиндрической оболочки со свободными границами $r_1(t) = r(\xi_1, t)$, $r_2(t) = r(\xi_2, t)$, $\xi_1 > \xi_2$, а $r(\xi, t)$ определяется из (5). В обоих случаях плотность жидкости распределена по произвольному закону по радиусу $\rho = R_0(\xi)$.

Лагранжевы координаты. Введем переменные Лагранжа, решая задачу Коши:

$$\frac{dr}{dt} = u(r,z,t), \quad \frac{dz}{dt} = w(r,z,t), \quad r\big|_{t=0} = \eta, \quad z\big|_{t=0} = \zeta. \tag{8}$$

Тогда второе и четвертое уравнения системы (1) проинтегрируются:

$$rv = \eta v_0(\eta, \zeta), \quad \rho = \rho_0(\eta, \zeta), \tag{9}$$

здесь $v_0(\eta, \zeta)$ – значение азимутальной скорости, $\rho_0(\eta, \zeta)$ – значение плотности жидкости в начальный момент времени. Оставшиеся три уравнения запишутся в виде

$$r_{tt} - \frac{V}{r^3} + \frac{rR}{\eta}(z_\zeta p_\eta - z_\eta p_\zeta) = 0, \quad z_{tt} - \frac{rR}{\eta}(r_\zeta p_\eta - r_\eta p_\zeta) = 0, \quad r(r_\zeta p_\eta - r_\eta p_\zeta) = \eta, \tag{10}$$

где $V(\eta, \zeta) = \eta^2 v_0^2(\eta, \zeta)$, $R(\eta, \zeta) = 1/\rho_0(\eta, \zeta)$.

В таблице приведен результат групповой классификации уравнений (10) по функции распределения плотности $R(\eta, \zeta)$ и момента импульса $V(\eta, \zeta)$ с учетом инвариантности начальных условий $r = \eta$, $z = \zeta$ при $t = 0$ [1].

№ п/п	$R(\eta, \zeta)$	$V(\eta, \zeta)$	Операторы
1	1 (идеальная жидкость)		
2	произвольная	произвольная	$L_0 = \{Y^1, Y^0(\varphi)\}$
3	$\Phi(\eta)\exp(\beta\zeta)$	$\delta\Phi(\eta)\exp(\beta\zeta) + G(\eta)\exp(\gamma\zeta)$	$L_0,\ 2Y^4 - \gamma Y^2 - 2\beta Y^5 + \delta(\gamma - \beta) Y^6,\ \gamma \neq \beta$
4	$\Phi(\eta)\exp(\beta\zeta)$	$[\delta\Phi(\eta)\zeta + G(\eta)]\exp(\beta\zeta)$	$L_0,\ 2Y^4 - \beta Y^2 - 2\beta Y^5 - \delta Y^6$
5	$\Phi(\zeta/\eta)(\eta\zeta)^\lambda$	$\delta\Phi(\zeta/\eta)(\eta\zeta)^\lambda + G(\zeta/\eta)(\eta\zeta)^\lambda$	$L_0,\ Y^3 + (2-\gamma)Y^2 - 2\lambda Y^5 + \delta(\gamma - \lambda)Y^6,\ \lambda \neq \gamma$
6	$\Phi(\zeta/\eta)(\eta\zeta)^\gamma$	$\delta\Phi(\zeta/\eta)(\eta\zeta)^\gamma \ln\lvert\eta\zeta\rvert + {}$ $+ G(\zeta/\eta)(\eta\zeta)^\gamma$	$L_0,\ Y^3 + (2-\gamma)Y^2 - 2\gamma Y^5 - \delta Y^6$

Здесь Φ, G – произвольные гладкие функции своих аргументов; β, γ, δ, λ – постоянные; $Y^1 = t\partial_z$, $Y^0(\varphi) = \varphi(t)\partial_p$, $Y^2 = t\partial_t - 2p\partial_p$, $Y^3 = \eta\partial_\eta + \zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p$, $Y^4 = \partial_\zeta + \partial_z$, $Y^5 = p\partial_p$, $Y^6 = r^{-2}\partial_p$.

Заметим, что между базисными операторами (2) системы (1) в переменных Эйлера и операторами системы (10) в переменных Лагранжа имеется следующее соответствие:

$$\{X_2, 2X_4 - X_5, X_5 - X_4, X_1, X_6, X_7, X_8(\varphi)\} \leftrightarrow \{Y^1, Y^2, Y^3, Y^4, Y^5, Y^6, Y^0(\varphi)\}$$

Нет соответствия для оператора $X_2 = \partial_t$, поскольку в лагранжевых координатах требование инвариантности начальных условий не допускает сдвигов по t.

Пример. Положим $R \equiv 1$. Это случай идеальной жидкости, $\rho_0(\eta, \zeta) = 1$. Групповая классификация уравнений идеальной жидкости сама по себе является объемной задачей и изложена в [1]. Рассматривая $R \equiv 1$, можно считать $V = V(\eta)$. В этом случае допускается двухпараметрическая подгруппа $\langle \partial_\zeta, \partial_z \rangle$. Ее инварианты t, η, r, p. Частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 1 ищем в виде $r = r(\eta, t)$, $z = z(\eta, \zeta, t)$, $p = p(\eta, t)$. Подстановка в уравнения и интегрирование дают решение

$$r = \left[2\int \frac{\eta\, d\eta}{1 + ta(\eta)} + C(t) \right]^{1/2}, \quad z = [1 + ta(\eta)]\zeta + b(\eta)t, \quad p = -\int r_\eta \left(r_{tt} - \frac{V(\eta)}{r^3} \right) d\eta + \varphi(t) \tag{11}$$

с произвольными функциями $C(t)$, $a(\eta)$, $b(\eta)$, $\varphi(t)$, $C(0) = 0$.

Решение интерпретируется как движение вращающейся вокруг оси z и вытягивающейся в направлении этой оси цилиндрической оболочки (или полностью жидкого цилиндра, когда $C(t) \equiv 0$). При $a(\eta) = k = \text{const}$, $b(\eta) = 0$ оболочку можно считать конечной. Тогда

$$r^2 = \frac{\eta^2}{1 + kt} + C(t), \quad C(0) = 0, \quad z = (1 + kt)\zeta,$$

$$p = -\int \frac{\eta}{r^4 (1 + kt)} \left[\frac{3k^2}{4(1 + kt)^4}\eta^4 + \left(\frac{C''}{2(1 + kt)} + \frac{kC'}{2(1 + kt)^2} + \frac{k^2 C}{(1 + kt)^3} \right)\eta^2 + \frac{2CC'' - C'^2}{4} - V(\eta) \right] d\eta + \varphi(t).$$

Завихренность жидкости вокруг оси z рассчитывается по формуле

$$\omega = \frac{1}{r}(rv)_r = \frac{1}{rr_\eta}\left(\sqrt{V(\eta)}\right)_\eta .$$

В начальный момент времени область, занятая жидкостью, представляет собой цилиндрическую оболочку (слой) $\Omega = \{\eta,\zeta |\ \eta_1 < \eta < \eta_2,\ 0 < \zeta < h\}$. Плоскости $\zeta = 0$, $\zeta = h$ – непроницаемые стенки, а цилиндрические поверхности $\eta = \eta_{1,2}$ – свободные границы. Начальное поле скоростей на Ω имеет вид $u_0 = [C'(0) - k\eta^2]/(2\eta)$, $v_0 = V^{1/2}(\eta)/\eta$, $w_0 = k\zeta$, тем самым постоянная k определяется начальной скоростью $W = kh$ твердой стенки $\zeta = h$ (рис. 2). Обозначим через Γ_1, Γ_2 внутреннюю и внешнюю свободные границы цилиндрического слоя, через $r_1(t)$, $u_1(t, \eta_1)$ – внутренний радиус и скорость на Γ_1, через $r_2(t)$, $u_2(t, \eta_2)$ – внешний радиус и скорость на Γ_2. Движение поверхностей происходит по закону

$$\Gamma_i :\ r_i^2 = \frac{\eta_i^2}{1 + kt} + C(t), \quad u_i = \frac{1}{2r_i}\left[-k\frac{\eta_i^2}{(1 + kt)^2} + C'(t) \right], \quad i = 1,2, \quad r_2^2(t) - r_1^2(t) = \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{\tau}. \tag{12}$$

Последнее соотношение (12) есть закон сохранения объема цилиндрического слоя. Твердая стенка $\zeta = 0$ остается неподвижной. Верхняя стенка движется по закону $z = (1+kt)h$. Если $k > 0$, $C'(0) \neq 0$, получаем плоское движение кольца.

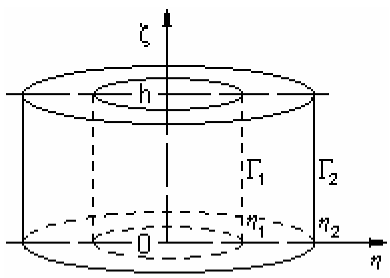

Рис. 2

Пусть σ_1, σ_2 – коэффициенты поверхностного натяжения на Γ_1, Γ_2. Из динамического условия на границах

$$p(r_2(t),t) - p(r_1(t),t) = \sigma_1 / r_1(t) + \sigma_2 / r_2(t)$$

и равенств (11), (12) можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка на функцию $C(t)$.

Анализ этого уравнения показывает, что в случае потенциального движения слоя $V \equiv 0$ всегда наступает момент исчезновения полости цилиндрического слоя. Скорость внутренней поверхности неограниченно растет, происходит гидравлический удар – схлопывание полости.

На рис. 3 приведены численно построенные зависимости безразмерного времени схлопывания $kt_*(\varepsilon)$, цилиндрической полости, $\varepsilon = (\eta_2/\eta_1)^2 - 1 > 0$. Кривая 1 отвечает числам $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, кривая 2 – $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, кривая 3 – $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$, а угловой момент равен нулю ($V(\eta) \equiv 0$). Кривые 4 и 5 ($V(\eta) \neq 0,\ \sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0$) показывают, что схлопывание полости может происходить и при ненулевом вращении.

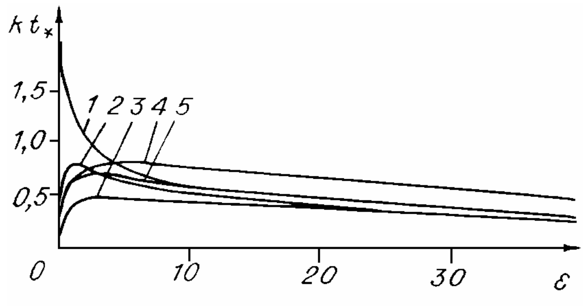

Рис. 3

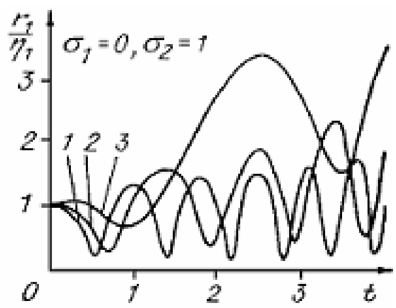

Рис. 4

При определенных условиях задания функции $V(\eta)$ устанавливается колебательное движение цилиндрического слоя. На рис. 4 представлены графики зависимостей радиуса внутренней свободной границы от времени t при $V(\eta)\neq 0,\ \sigma_1=0,\ \sigma_2\neq 0$ и $\varepsilon = 0.5$; 1.0; 3.0 соответственно. В тех случаях, когда силы инерции, связанные с вращением жидкости вокруг оси z, преобладают над другими силами, возможно неограниченное возрастание внутреннего радиуса [1].

Аналогичный анализ моделей и построение точных решений сделаны для уравнений двумерных движений идеальной и неоднородной несжимаемой жидкости, для уравнений вращательно-симметричных движений идеальной несжимаемой жидкости. Анализ проведен для уравнений в переменных Эйлера и Лагранжа [1, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев В.К. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В.К. Андреев, О.В. Капцов, В.В. Пухначев, А.А. Родионов. – Новосибирск: ВО “Наука”; Сиб. изд. фирма, 1994. – 320 с.
2. Родионов А.А. Оптимальная система подалгебр первого порядка для уравнений вращательно-симметричного движения неоднородной жидкости / А.А. Родионов // Труды сем. “Математическое моделирование в механике”. – Красноярск: ВЦК СО РАН, 1997. – С. 150-162. (Деп. ВИНИТИ 12.02.97, № 446-В97.)
3. Андреев В.К. Инвариантные решения ранга два для уравнений вращательно-симметричных движений неоднородной жидкости / В.К. Андреев, А.А. Родионов // ПММ. –1999. – Т. 63. – Вып. 3. – С. 1082-1092.
4. Андреев В.К. Групповая классификация и точные решения уравнений плоского и вращательно-симметричного течения идеальной жидкости в лагранжевых координатах / В.К. Андреев, А.А. Родионов // Дифференциальные уравнения. –1988. – Т. 24, №. 9. – С. 1577-1586.

APPLICATION OF GROUP THEORETICAL METHODS IN HYDRODYNAMICS EQUATIONS

A.A. Rodionov

The group properties for the systems of the equations of the rotationally-symmetric motions in Eulerian and Lagrangian coordinates are presented. We dives some examples of the constructions of the solutions for these equations. A physical interpretation of the result obtained is given.