УДК 512. 544

О СТУПЕНИ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ПЕРЕКРУЧЕННОЙ ГРУППЫ

А.Л.Мыльников*

В работе исследуются конечные группы, в которых любое подмножество, содержащее 1 и замкнутое относительно операции $x \circ y := xy^{-1}x$, является подгруппой. Доказывается, что такие группы разрешимы и их ступень разрешимости не превосходит двух.

Приведем некоторые определения из [1].

Определение 1. *Подмножество K из группы G называется скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и для любых x, y из K $xy^{-1}x \in K$.*

Определение 2. *Группа называется перекрученной, если в ней любое скрученное подмножество является подгруппой.*

Данная работа — фактически непосредственное продолжение работы [2], где доказывается то, что ступень разрешимости конечной перекрученной группы не превосходит трех. Опираясь на [2], в настоящей статье получено усиление этого результата. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Конечная перекрученная группа разрешима и ее ступень разрешимости не превосходит двух.*

1. Вспомогательные результаты

В данном разделе, для удобства читателя, приводятся известные результаты, которые используются при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1.1 [1, следствие 2.4]. *Любая секция перекрученной группы является перекрученной группой.*

Лемма 1.2 [1, теорема 1]. *Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) *G — перекрученная группа;*

2) *$G = O_2(G) \times O(G)$, где $O_2(G)$ — циклическая, а $O(G)$ — конечная перекрученная группа нечетного порядка.*

Лемма 1.3 [2, теорема 1]. *Коммутант конечной перекрученной группы нильпотентен.*

По теореме 2 из [1] и теореме 7 из [3, с. 23] получаем следующую

Лемма 1.4 [2, лемма 1.2]. *Для конечной нильпотентной группы G нечетного порядка следующие условия эквивалентны:*

1) *G — перекрученная группа;*

2) *G — модулярная группа (т.е. решетка подгрупп группы G модулярна);*

3) *Для любых подгрупп X, Y группы G $< X, Y >= XY = YX$.*

Лемма 1.5 [3, с. 32, теорема 14]. *Негамильтонова p-группа G тогда и только тогда модулярна, когда в ней содержится абелев нормальный делитель N с циклической фактор-группой G/N и найдутся такой элемент $t \in G$ и такое целое число s (не меньшее двух при $p = 2$), что $G =< N, t >$, и для каждого a из N выполняется соотношение $tat^{-1} = a^{1+p^s}$.*

Лемма 1.6 [4, с. 181, теорема 3.6]. *Если A — p'-группа автоморфизмов конечной p-группы P, то $[P, A, A] = [P, A]$.*

Лемма 1.7 [4, с. 180, теорема 3.5]. *Если A — p'-группа автоморфизмов конечной p-группы P, то $P = [P, A]C_P(A)$.*

Лемма 1.8 [4, с. 177, теорема 2.3]. *Пусть A — p'-группа автоморфизмов конечной абелевой p-группы P. Тогда $P = [P, A] \times C_P(A)$.*

Лемма 1.9 [3, с. 33, предложение 1.7]. *Пусть G — конечная модулярная p-группа. Совокупность всех элементов порядка p образует в ней характеристическую абелеву подгруппу.*

Лемма 1.10 [5, с. 211, теорема 12.5.2]. *Конечная p-группа, содержащая только одну подгруппу порядка p, является циклической или обобщенной группой кватернионов.*

Лемма 1.11 *Пусть $P = A \leftthreetimes E$ — конечная модулярная p-группа, $p \neq 2$, где A — абелева, E — элементарная абелева и $m(E) \geq 2$. Тогда $C_E(A) \neq 1$.*

Доказательство. Понятно, что заключение леммы выполняется, если P — гамильтонова группа. Поэтому можно считать, что группа P — негамильтонова. В этом случае по лемме 1.5 существуют подгруппа $N \lhd P, N$ — абелева, и $< x >\leq P$ такие, что $P = N < x >$, также существует натуральное число s такое, что для любого $z \in N$ $z^x = z^{1+p^s}$. Отсюда, в частности, следует, что $\Omega_1(N) \leq Z(P)$, и поэтому $E \cap \Omega_1(N) \leq C_E(A)$.

Допустим, что $C_E(A) = 1$.

Тогда $E \cap \Omega_1(N) = 1$ и, значит, $E \cap N = 1$. Поэтому группа E изоморфно вложима в фактор-группу P/N, которая, согласно выбору N, является циклической. Значит, группа E будет циклической, что противоречит условию леммы. Таким образом, $C_E(A) \neq 1$ и лемма 1.11 доказана.

Лемма 1.12 [4, с. 178, теорема 2.4]. *Если A — p'-группа автоморфизмов конечной абелевой p-группы P, действующая тождественно на $\Omega_1(P)$, то $A = 1$.*

Лемма 1.13 [2, следствие 2.4]. *Пусть $G = A \leftthreetimes < b >$ — конечная неабелева перекрученная группа нечетного порядка, где A — элементарная абелева p-группа, $|b| = q^m$, $p \neq q$, p, q — простые. Допустим, что b действует неприводимо на A.*

Тогда либо b^q действует неприводимо на A, либо b^q действует тождественно на A.

Из леммы 1.13 вытекает

Следствие 1.14 *Пусть G удовлетворяет условию леммы 1.13. Тогда либо $\Omega_1(< b >)$ действует неприводимо на A, либо $\Omega_1(< b >)$ действует тождественно на A.*

Лемма 1.15 [4, с. 65, теорема 2.4]. *Пусть G — абелева группа порядка n и F — поле, которое содержит примитивные n-е корни из единицы. Тогда каждое неприводимое представление G над F — линейно, т.е. имеет размерность 1.*

Лемма 1.16 [4, с. 174, теорема 1.4]. *Пусть P — конечная p-группа и b — нетривиальный p'-автоморфизм группы P. Тогда b действует нетривиально на $P/\Phi(P)$.*

Лемма 1.17 [4, с. 176, теорема 2.2]. *Пусть A — p'-группа автоморфизмов, действующая неразложимо на конечной абелевой p-группе P. Тогда P — гомоциклическая, т.е. P представима в виде прямого произведения циклических групп одинаковых порядков.*

Из теоремы 1 работы [6] вытекает следующая

Лемма 1.18 *Пусть $G = A \leftthreetimes < b >$ — группа Миллера-Морено нечетного порядка, где A — элементарная абелева p-группа порядка p^{2t}, $|b| = q, p \neq q, p, q$ — простые.*

Тогда G не является перекрученной.

2. Доказательство теоремы 1

Везде далее под G понимается минимальный контрпример к теореме 1.

Изучение контрпримера G разбивается на ряд этапов.

(1) *G'' — единственная минимальная нормальная подгруппа из G.*

Пусть $N \lhd G$, $N \neq 1$. Тогда по лемме 1.1 G/N — перекрученная группа и, в силу минимальности G, имеем $(G/N)'' = 1$ или $G'' \leq N$. Следовательно, G'' — единственная минимальная нормальная подгруппа из G.

(2) *G имеет нечетный порядок.*

Допустим противное, что G имеет четный порядок. Поскольку, согласно (1), в G есть только одна минимальная нормальная подгруппа, то, в силу леммы 1.2, получаем, что $G = O_2(G)$ — циклическая группа, что противоречит выбору контрпримера.

(3) *G'' — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p.*

По пункту (2) и теореме Фейта-Томпсона G разрешима. Тогда из (1) вытекает требуемое.

(4) *$O_p(G) = F(G)$.*

Понятно, что $O_p(G) \leq F(G)$. Ввиду (1) получаем и обратное включение.

(5) *$G = O_p(G) \leftthreetimes B$, где B — абелева p'-группа, $O_p(G)$ — неабелева.*

Так как, в силу выбора группы G, ее ступень разрешимости более двух, то из лемм 1.4, 1.5 вытекает, что $G \neq O_p(G)$. По лемме 1.3 G' — нильпотентная подгруппа и, значит, ввиду (4), имеем включение $G' \leq O_p(G)$. Следовательно, фактор-группа $\overline{G} := G/O_p(G)$ является абелевой, откуда вытекает, что $\overline{G}$ — p'-группа. Таким образом, $(|O_p(G)|, |G : O_p(G)|) = 1$ и, значит, существует p'-подгруппа B из G такая, что $G = O_p(G) \leftthreetimes B$. Подгруппа B — абелева, так как $B \cong \overline{G}$.

В силу выбора G, нетрудно видеть, что подгруппа $O_p(G)$ — неабелева.

(6) *Введем обозначение: $P := O_p(G)$.*

(7) *Пусть A — неединичная подгруппа из B такая, что $[P, A] < P$.*

Тогда $P = [P, A] \leftthreetimes C_P(A)$, где $[P, A]$ — абелева группа, $C_P(A)$ — циклическая группа.

Введем обозначения: $Q := [P, A], R := C_P(A)$.

Так как по (4) $P = F(G)$, то, ввиду разрешимости G, получаем, что $C_G(P) \leq P$. Тогда, поскольку $A \nleq P$, то $A \nleq C_G(P)$, откуда вытекает, что $Q \neq 1$.

Понятно, что $Q \lhd G$.

Рассмотрим подгруппу $T :=< Q, A >$. Понятно, что $T = Q \leftthreetimes A$. Подгруппа T — неабелева, так как по лемме 1.6 $[Q, A] = Q$. Тогда ступень разрешимости T в точности равна двум, так как $T < G$.

Понятно, что $T' = Q$. Таким образом, получаем, что Q — абелева группа. По лемме 1.7 $P = QR$. Так как Q — абелева, то из лемм 1.6, 1.8 вытекает, что $Q \cap R = 1$, и, значит, $P = Q \leftthreetimes R$.

Далее, по лемме 1.1 R — перекрученная группа. Тогда из лемм 1.4, 1.9 вытекает, что подгруппа $W := \Omega_1(R)$ является абелевой. Ясно, что $C_R(Q) \lhd G$. Значит, ввиду того, что $Q \lhd G$, из (1) получаем $C_R(Q) = 1$. Тогда $C_W(Q) = 1$ и по лемме 1.11 имеем равенство $m(W) = 1$. Применяя лемму 1.10, получаем, что R — циклическая.

(8) $[P, B] = P$.

Допустим противное, что $[P, B] < P$. Согласно пункту (7) получаем, что $P = [P, B] \leftthreetimes C_P(B)$, где $[P, B]$ — абелева, $C_P(B)$ — циклическая. Значит, фактор-группа $G/[P, B]$ — абелева и, следовательно, ступень разрешимости G равна двум, что противоречит выбору G.

(9) *B — циклическая q-группа, где q — простое число, отличное от p.*

Допустим противное, что группа B не является примарной циклической группой. Так как по (5) B — абелева, то $B = B_1 \times B_2$ для некоторых собственных подгрупп B_1 и B_2 из B.

Введем обозначения: $Q_i := [P, B_i]$, $R_i := C_P(B_i)$, $i = 1, 2$.

Далее анализ разбивается на ряд этапов.

(9.1) *$P = Q_i \leftthreetimes R_i$, где Q_i — абелева, а R_i — циклическая.*

Так как для подгрупп $T_i :=< Q_i, B_i >$ справедливы включения $T_i \subset G, i = 1, 2$, то ступень разрешимости T_i не превосходит двух, и, значит, ввиду леммы 1.6 и неабелевости подгруппы P, имеем $Q_i < P$. Применяя (7), получаем требуемое.

(9.2) $R_1 \leq Q_2$, $R_2 \leq Q_1$.

Покажем, что $R_1 \leq Q_2$. Доказательство того, что $R_2 \leq Q_1$, аналогично.

Предположим противное, что $R_1 \nleq Q_2$.

Ясно, что $Q_2 \lhd G$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} := G/Q_2$. Имеем $\overline{G} = \overline{P} \leftthreetimes \overline{B}$, где $\overline{P}, \overline{B}$ — образы, соответственно, подгрупп P и B.

Пусть $\overline{R}_i, \overline{B}_i$ — образы, соответственно, подгрупп R_i, B_i, $i = 1, 2$. Тогда, в силу (9.1), имеем $\overline{P} = \overline{R}_2$ и, значит, $\overline{P}$ — циклическая группа. Так как $R_1 \nleq Q_2$, то $\overline{R}_1 \neq 1$.

Далее, ввиду цикличности группы $\overline{P}$, имеем $\Omega_1(\overline{P}) = \Omega_1(\overline{R}_i)$, $i = 1, 2$, откуда вытекает, что любой элемент из $\overline{B}$ действует тождественно на $\Omega_1(\overline{P})$. Тогда, применяя лемму 1.12, получаем, что любой элемент из $\overline{B}$ действует тождественно на $\overline{P}$ и, следовательно, $\overline{G}$ — абелева группа, что противоречит выбору контрпримера.

(9.3) $R_i \lhd G$.

В силу абелевости подгруппы B, достаточно показать, что $R_i \lhd P$.

Рассмотрим подгруппу $T :=< R_1, R_2 >$. Из лемм 1.1, 1.4 имеем равенство $T = R_1R_2$. По (9.2) $R_1 \leq Q_2$, а по (9.1) $Q_2 \lhd P$. Тогда, ввиду $Q_2 \cap R_2 = 1$, получаем, что $T = R_1^{R_2} \leftthreetimes R_2$, откуда $R_1 = R_1^{R_2}$. Так как по (9.1) $P = Q_2R_2$ и Q_2 — абелева группа, то получаем, что $R_1 \lhd P$. Аналогично, $R_2 \lhd P$.

Далее, из (9.1), (9.2) вытекает, что $R_1 \cap R_2 = 1$. Тогда, ввиду (9.3), получаем противоречие с (1) и пункт (9) доказан.

(10) *$G = P \leftthreetimes < b >$, где P — неабелева p-группа, $|b| = q^m, p \neq q$, p, q — нечетные простые числа, $P = [P, b] = F(G)$.*

Следует из пунктов $(2), (4) - (6), (8), (9)$.

(11) *Пусть $P = Q \leftthreetimes R$, где Q, R — b-инвариантные абелевы подгруппы из Q, причем R — циклическая группа, $[Q, \Omega_1(< b >)] = Q$ и $\Omega_1(Q) \leq Z(P)$. Тогда P — абелева группа.*

Так как по (8) справедливо равенство $[P, b] = P$, то элемент b действует нетривиально на R. Значит, по лемме 1.12 элемент b действует нетривиально на $\Omega_1(R)$, откуда, ввиду цикличности подгруппы R, имеем $p \equiv 1 (mod q)$.

Так как $\Omega_1(Q) \leq Z(P)$, то из (1) вытекает, что элемент b действует неприводимо на $\Omega_1(Q)$. Поскольку $[Q, \Omega_1(< b >)] = Q$, то по следствию 1.14 получаем, что $\Omega_1(< b >)$ действует неприводимо на $\Omega_1(Q)$.

Далее, будем рассматривать подгруппу $\Omega_1(Q)$ как векторное пространство над полем порядка p. Так как $p \equiv 1 (mod q)$, то поле порядка p содержит примитивные корни q-й степени из единицы.

Пусть τ — естественное представление $\Omega_1(< b >)$ на $\Omega_1(Q)$. τ является точным и неприводимым представлением $\Omega_1(< b >)$. По лемме 1.15 получаем, что $m(\Omega_1(Q)) = 1$. Тогда по лемме 1.10 получаем, что Q — циклическая.

Далее, пусть x, y — элементы из P такие, что $< x >= Q$, $< y >= R$. Понятно, что $P =< x, y >$.

Из условия, цикличности подгруппы Q, а также, нормальности Q в G, вытекает, что существуют натуральные числа n, m такие, что $x^y = x^n$, $x^b = x^m$. Значит, $x^{[y,\ b]} = x$.

Из (8) следует, что элемент b действует нетривиально на подгруппе R. Тогда, согласно лемме 1.16, элемент b индуцирует нетривиальный автоморфизм на фактор-группе $R/\Phi(R)$, откуда вытекает равенство $< [y, b] >=< y >$. Значит, $x^y = x$ и, следовательно, подгруппа P — абелева.

(12) $|b| = q$.

Предположим противное, что $b^q \neq 1$.

Далее анализ разбивается на ряд этапов.

(12.1) *$P = Q \leftthreetimes R$, где $Q := [P, b^q]$ — абелева группа, $R := C_P(b^q)$ — циклическая группа.*

Пусть $T :=< Q, b^q >$. В силу леммы 1.6, имеем $T = Q \leftthreetimes < b^q >$. Так как справедливо включение $T \subset G$, то ступень разрешимости T не превосходит двух. Тогда, ввиду леммы 1.6 и неабелевости P, имеем $Q < P$. Применяя (7), получаем требуемое.

(12.2) $Q = [Q, \Omega_1(< b >)]$.

По (12.1) Q — абелева группа. Значит, по лемме 1.8 справедливо разложение $Q = N \times M$, где $N := C_Q(\Omega_1(< b >)), M := [Q, \Omega_1(< b >)]$.

Нетрудно видеть, что $N, M \lhd G$.

Так как, согласно (10), $P = F(G)$, то, ввиду разрешимости группы G, имеем $C_G(P) \leq P$, откуда $\Omega_1(< b >) \nleq C_G(P)$. Значит, $P \neq C_P(\Omega_1(< b >))$, откуда следует, что $Q \neq N$. Следовательно, $M \neq 1$. Тогда, ввиду (1), получаем, что $Q = M$.

(12.3) $\Omega_1(Q) \leq Z(P)$.

В силу (12.1) достаточно показать, что для любого x из $\Omega_1(Q)$ подгруппа $T_x :=< x, R >$ является абелевой.

Из лемм 1.1, 1.4 получаем, что $T_x =< x > R$. Так как по (12.1) $Q \lhd P, Q \cap R = 1$ и $x \in Q$, то имеем $T_x =< x >^R \leftthreetimes R$. Значит, ввиду равенства $|T_x :< x > | = |R|$, получаем равенство $|x||R| = | < x >^R ||R|$, откуда вытекает, что $< x >=< x >^R$. Таким образом, $< x > \lhd\ T_x$ и, следовательно, $< x > \cap Z(T_x) \neq 1$. Так как $| x| = p$, то $< x > \leq Z(T_x)$, откуда получаем, что T_x — абелева группа.

(12.4) P — *абелева.*

Вытекает из (12.1) — (12.3) и (11).

Далее, ввиду (12.4), получаем противоречие с выбором группы G, которое доказывает (12).

(13) $P' \leq Z(P)$.

Так как по (10) имеем $[P, b] = P$, то $G' = P$. Значит, $G'' = P'$, откуда, ввиду (1), получаем, что $P' \leq Z(P)$.

(14) $C_P(b) = 1$.

Допустим противное, что $C_P(b) \neq 1$.

Далее, анализ разбивается на ряд этапов.

(14.1) $C_P(b) = P' = G''$.

Покажем, что $C_P(b) \leq P'$.

Допустим противное, что $C_P(b) \nleq P'$.

Рассмотрим $\overline{G} := G/P'$. Понятно, что $\overline{G} = \overline{P} \leftthreetimes < \overline{b} >$, где $\overline{P}$, $\overline{b}$ — образы, соответственно, подгруппы P и элемента b. Так как $\overline{P}$ — абелева группа, то по лемме 1.8 $\overline{P} = C_{\overline{P}}(\overline{b}) \times [\overline{P}, \overline{b}]$. Ввиду $C_P(b) \nleq P'$, имеем $C_{\overline{P}}(\overline{b}) \neq 1$. Значит, $[\overline{P}, \overline{b}] < P$, откуда $[P, b] < P$, что противоречит (10).

Итак, $C_P(b) \leq P'$.

Далее, так как по (10) $[P, b] = P$, то имеем равенства $G' = P$ и $G'' = P'$, откуда по (3) получаем, что P' — элементарная абелева группа. Так как по (13) $P' \leq Z(P)$ и $C_P(b) \leq P'$, то $C_P(b) \lhd G$. Тогда из (1) и теоремы Машке заключаем, что $C_P(b) = P'$.

(14.2) $P' \leq Z(G)$ *и* $|P'| = p$.

Из (13) и (14.1) следует, что $P' \leq Z(G)$. Так как $P' = G''$ и, по (3), P' — элементарная абелева группа, то из (1) вытекает, что $|P'| = p$.

(14.3) *Пусть Q — нормальная в G собственная подгруппа из P. Тогда Q — элементарная абелева.*

Допустим противное, что существует собственная подгруппа Q из P, нормальная в группе G, и Q не является элементарной абелевой группой.

Так как $Q < P$, то ступень разрешимости подгруппы $< Q, b >$ не превосходит двух, откуда получаем, что подгруппа $[Q, b]$ является абелевой. По лемме 1.7 $Q = [Q, b]C_Q(b)$. Тогда из лемм 1.6, 1.8, ввиду нормальности подгруппы $[Q, b]$ в Q, вытекает, что $Q = [Q, b] \leftthreetimes C_Q(b)$.

Так как $Q \lhd G$, то по (1), (14.1) получаем, что $C_P(b) \leq Q$ и $C_P(b) = C_Q(b)$. Тогда из (14.1), (14.2) следует, что $Q = [Q, b] \times C_Q(b)$.

Далее, так как подгруппа Q не является элементарной абелевой, то $\Phi(Q) \neq 1$. По (14.1) $|C_P(b)| = p$ и, значит, $\Phi(Q) = \Phi([Q, b])$. Так как $\Phi(Q) \cap C_P(b) = 1$ и $\Phi(Q) \lhd G$, то получаем противоречие с (1), которое доказывает (14.3).

(14.4) $Z(P) = P'$.

По (14.2) $P' \leq Z(P)$.

$Z(P) < P$ и, значит, по (14.3) $Z(P)$ — элементарная абелева группа. Тогда, в силу (1) и теоремы Машке, заключаем, что $Z(P) = P'$.

(14.5) *Пусть $\overline{G} = G/\Phi(P)$ и $\overline{P}$, $\overline{b}$ — образы, соответственно, подгруппы P и элемента b в $\overline{G}$. Тогда элемент $\overline{b}$ действует неприводимо на подгруппе $\overline{P}$.*

Допустим противное, что $\overline{P} = \overline{Q} \times \overline{R}$ для некоторых собственных нетривиальных $\overline{b}$-инвариантных подгрупп $\overline{Q}$, $\overline{R}$.

Пусть Q, R — полные прообразы, соответственно, $\overline{Q}$, $\overline{R}$. Ясно, что $Q, R \lhd G$ и, значит, по (14.3) Q, $R \leq \Omega_1(P)$. Нетрудно видеть, что $P =< Q, R >$. Таким образом, получаем, что $P = \Omega_1(P)$. Тогда из лемм 1.1, 1.4 и 1.9 следует, что подгруппа P — абелева, что противоречит выбору контрпримера.

(14.6) $\Phi(P) = P\,'$.

Ясно, что $P\,' \leq \Phi(P)$. Покажем, что $\Phi(P) \leq P\,'$.

Допустим противное, что $P\,' < \Phi(P)$. Тогда, в силу (14.4), существуют элементы $x \in P$ и $a \in \Phi(P)$ такие, что подгруппа $T :=< x, a >$ является неабелевой. В силу лемм 1.1, 1.4 $T =< a >< x >$.

Так как $\Phi(P) < P$, то по (14.3) $\Phi(P)$ — элементарная абелева группа. Тогда экспонента P не превосходит p^2. Значит, $|T| \leq p^3$. Поскольку подгруппа T — неабелева, то $|T| > p^2$, и, следовательно, $|T| = p^3$. В силу неабелевости T, из (14.2) имеем $P\,' < T$.

Так как $T \nleq \Phi(P)$, то из (14.5) следует, что $P =< T^c|\; c \in < b >>$. Для любого элемента c из $< b >$ фактор-группа $\overline{T^c} := T^c/P\,'$ является элементарной абелевой, откуда $\overline{T^c} \leq \Omega_1(\overline{P})$, где $\overline{P} = P/P\,'$. Тогда получаем, что $\overline{P} = \Omega_1(\overline{P})$, откуда, в силу лемм 1.4, 1.9, $\overline{P}$ — элементарная абелева. Следовательно, $\Phi(P) \leq P\,'$. Получаем противоречие с исходным предположением, которое доказывает (14.6).

(14.7) *P — экстраспециальная группа.*

Вытекает из (14.2), (14.4) и (14.6).

Далее, так как по (14.7) P — экстраспециальна, то $|P| = p^{2t+1}$ для некоторого целого $t \geq 1$. Тогда $|\overline{P}| = p^{2t}$. По (14.5) элемент $\overline{b}$ действует неприводимо на $\overline{P}$. Тогда по лемме 1.18 получаем, что $\overline{G}$ не является перекрученной, откуда по лемме 1.1 G не является перекрученной. Получаем противоречие с выбором контрпримера G, которое доказывает пункт (14).

(15) *Пусть T — собственная b-инвариантная подгруппа из P. Тогда T — абелева.*

Пусть $S :=< T, b >$. Ясно, что $S = T \rtimes < b >$.

По лемме 1.7 и пункту (14) имеем $T = [T, b]$, откуда $S\,' = T$. Поскольку $S \subset G$, то ступень разрешимости S не превосходит двух. Следовательно, группа T — абелева.

(16) $\Omega_1(P) = \Omega_1(\Phi(P))$.

Предположим противное, что $\Omega_1(P) \neq \Omega_1(\Phi(P))$.

Далее анализ разбивается на ряд этапов.

(16.1) *$P = Q \rtimes R$, где Q, R — b-инвариантные абелевы подгруппы из P и $|R| = p$.*

Введем обозначение: $N := \Omega_1(\Phi(P))$.

Из лемм 1.1, 1.9 следует, что подгруппа $\Omega_1(P)$ — абелева. Тогда по теореме Машке $\Omega_1(P) = N \times R$, где R — некоторая b-инвариантная подгруппа. Ясно, что $R \cap \Phi(P) = 1$.

Пусть $\overline{P}, \overline{b}$ — образы, соответственно, подгруппы P и элемента b в $\overline{G} := G/\Phi(P)$. По теореме Машке $\overline{P} = \overline{R} \times \overline{Q}$, где $\overline{R}$ — образ подгруппы R, а $\overline{Q}$ — некоторая $\overline{b}$-инвариантная подгруппа из $\overline{P}$. Ясно, что $\overline{R} \neq 1$. Так как P — неабелева, то $P \neq < \Phi(P), R >$, откуда получаем, что $\overline{Q} \neq 1$.

Пусть Q — полный прообраз $\overline{Q}$. Ясно, что $Q \lhd G$ и $Q < P$. Тогда по (15) подгруппа Q — абелева. Легко видеть, что $P = Q \rtimes R$.

Понятно, что $C_R(Q) \lhd G$, откуда, ввиду $Q \lhd G$ и пункта (1), получаем, что $C_R(Q) = 1$. Так как по лемме 1.1 P — перекрученная группа, то, ввиду $C_R(Q) = 1$, из лемм 1.4, 1.11 получаем, что $m(R) = 1$, т.е. R — циклическая группа порядка p.

(16.2) *P — абелева.*

Из леммы 1.8 и пункта (14) получаем, что $[Q, b] = Q$. А из леммы 1.5 следует, что $\Omega_1(Q) \leq Z(Q)$, откуда, ввиду (1), элемент b действует неприводимо на $\Omega_1(Q)$. Далее, из (11), вытекает, что P — абелева группа.

В силу (16.2), получаем противоречие с выбором контрпримера G, которое доказывает (16).

(17) *Пусть $\overline{P}$, $\overline{b}$ — образы, соответственно, подгруппы P и элемента b в $\overline{G} := G/\Phi(P)$. Тогда элемент $\overline{b}$ действует неприводимо на $\overline{P}$.*

Допустим противное, что элемент $\overline{b}$ действует приводимо на $\overline{P}$.

Далее, анализ разбивается на ряд этапов.

(17.1) *$\overline{P} = \overline{P_1} \times \overline{P_2}$, где $\overline{P_i} \neq 1$ и элемент $\overline{b}$ действует неприводимо на $\overline{P_i}$, $i = 1, 2$.*

В силу теоремы Машке подгруппа $\overline{P}$ представима в виде прямого произведения минимальных $\overline{b}$-инвариантных подгрупп $\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_k}$.

Допустим, что $k \geq 3$.

Пусть P_i — полный прообраз $\overline{P_i}, \overline{T_i} :=< \overline{P_j}|\; j \neq i >$ и T_i — полный прообраз $\overline{T_i}$, где $i = 1, \ldots, k$. Ясно, что подгруппа T_i — b-инвариантна и $T_i < P$. Тогда по (15) T_i — абелева. Следовательно, для любых i, j подгруппа $< P_i, P_j >$ является абелевой, откуда получаем, что P — абелева, что противоречит выбору контрпримера G.

(17.2) *Пусть P_i — полный прообраз $\overline{P_i}$. Тогда P_i — абелева.*

Ясно, что подгруппа P_i — b-инвариантна. Тогда по (15) получаем, что P_i — абелева.

(17.3) $\Phi(P) \leq Z(P)$.

По (17.2) P_i — абелева. Так как $\Phi(P) \leq P_1 \cap P_2$ и $P =< P_1, P_2 >$, то получаем, что $\Phi(P) \leq Z(P)$.

(17.4) *Элемент b действует неразложимо на P_i и $\Phi(P)$.*

По (17.2) P_i — абелева. Так как $\Phi(P) < P$, то из (16) и (17.3) следует, что $\Omega_1(\Phi(P)) = \Omega_1(P_i) = \Omega_1(Z(P))$. Тогда из (1) вытекает требуемое.

(17.5) *Для любого элемента x из P_1 существует элемент y из P_2, такой, что $x^p = y^p$, причем $\overline{x} \neq 1$, $\overline{y} \neq 1$, где $\overline{x}, \overline{y}$ — образы, соответственно, x, y в $\overline{G}$.*

Так как $\Phi(P) < P_i$, то по (16) имеем $\Omega_1(P_i) = \Omega_1(\Phi(P))$. По (17.2) P_i — абелева. Тогда ранги P_i и $\Phi(P)$ совпадают между собой, $i = 1, 2$. Из (17.4) и леммы 1.17 получаем, что подгруппы P_i, $\Phi(P)$ являются гомоциклическими группами.

Пусть p^t — экспонента P. Экспонента P равна экспоненте P_i, $i = 1, 2$. Таким образом, получаем, что $P_1 =< x_1 > \times \cdots \times < x_k >$, $P_2 =< y_1 > \times \cdots \times < y_k >$ для некоторых элементов x_j, y_j, где $|x_j| = |y_j| = p^t$, $j = 1, \ldots, k$. Нетрудно видеть, что $\Phi(P) =< x_1^p > \times \cdots \times < x_k^p >=< y_1^p > \times \cdots \times < y_k^p >$, откуда и получаем требуемое.

(17.6) *Пусть x, y — элементы из P, удовлетворяющие пункту* (17.5).

Тогда группа $T :=< x, y >$ — неабелева.

Допустим противное, что T — абелева.

Ясно, что $|\overline{T}| = p^2$, где $\overline{T}$ — образ подгруппы T в $\overline{G} = G/\Phi(P)$.

Так как T — абелева, то $|xy^{-1}| = p$ и $T =< x > \times < xy^{-1} >$. По (16) $xy^{-1} \in \Phi(P)$ и, значит, $|\overline{T}| = p$. Получаем противоречие с тем, что $|\overline{T}| = p^2$.

Далее, так как $x^p = y^p$, то $|T :< x > | = p$. Значит, $|T| = p|x|$.

Из (16), (17.3) $\Omega_1(T) \leq Z(P)$. Так как по (17.6) подгруппа T — неабелева, то по лемме 1.10 $m(\Omega_1(T)) \geq 2$. Значит, существует элемент $z \in \Omega_1(T)$ такой, что $< x > \cap < z >= 1$. Тогда для $N :=< x, z >$ имеем $N =< x > \times < z >$. Ясно, $|N| = p|x|$. Поскольку $|N| = |T|$, то $N = T$ и, значит, подгруппа T — абелева. Получаем противоречие с (17.6), которое доказывает (17).

(18) *Пусть $x \in P \setminus \Phi(P)$. Тогда $P =< x^c |\, c \in< b >>$.*

Пусть $N :=< x^c |\, c \in< b >>$ и $T :=< \Phi(P), N >$.

Рассмотрим $\overline{T}$ — образ подгруппы T в $\overline{G} = P/\Phi(P)$. Ясно, что $\overline{T} \neq 1$ и $\overline{T}$ — $\overline{b}$-инвариантная подгруппа. Следовательно, по (17) имеем $\overline{T} = \overline{P}$. Тогда $T = P$ и, значит, $P = N$.

(19) $P =< x >< y >$, *где* $< x > \lhd P$.

Из лемм 1.1, 1.4, 1.5 следует, что существует элемент $y \in P$ и абелева подгруппа $N \lhd P$ такие, что $P = N < y >$, $\Omega_1(N) \leq Z(P)$ и для любой подгруппы $< a >$ из N справедливо $< a >^y =< a >$.

Ясно, что $N \nleq \Phi(P)$.

Пусть $x \in N \setminus \Phi(P)$. Покажем, что $< x > \cap < x^b > \neq 1$.

Допустим противное, что $< x > \cap < x^b >= 1$. Тогда, как нетрудно видеть, для любого натурального числа s имеем $< x > \cap < x^{b^s} >= 1$.

Пусть $T_s :=< x, x^{b^s} >$. Так как $< x > \lhd P$ и $< x > \cap < x^{b^s} >= 1$, то $T_s =< x > \leftthreetimes < x^{b^s} >$. Следовательно, $b^{-s(q-1)} T_s b^{s(q-1)} =< x^{b^{s(q-1)}} > \leftthreetimes < x >$, откуда, в силу нормальности подгруппы $< x >$ в P, получаем, что $b^{-s(q-1)} T_s b^{s(q-1)} = < x^{b^{s(q-1)}} > \times < x >$ и, значит, $T_s =< x > \times < x^{b^s} >$. Таким образом, для любого s подгруппа T_s — абелева, откуда вытекает, что для любых n, m элементы x^{b^n}, x^{b^m} являются перестановочными. В силу (18), $P =< x^c | c \in< b >>$. Значит, получаем, что P — абелева группа — противоречие с выбором контрпримера G.

Итак, $< x > \cap < x^b > \neq 1$, откуда для подгруппы $X :=< x > \cap < x^b > \cap \cdots \cap < x^{b^{q-1}} >$ вытекает, что $X \neq 1$.

Нетрудно видеть, что $\Omega_1(X) \leq \Omega_1(N) \leq Z(P)$ и $\Omega_1(X)$ — b-инвариантная подгруппа. Таким образом, $\Omega_1(X)$ — нормальная подгруппа из G. В силу теоремы Машке и пункта (1), элемент b действует неприводимо на $\Omega_1(Z(P))$, откуда следует, что $\Omega_1(X) = \Omega_1(N) = \Omega_1(Z(P))$. Таким образом, $\Omega_1(N)$ — циклическая группа. Тогда по лемме 1.10 получаем, что N — циклическая группа и (19) доказано.

Далее, рассмотрим $\overline{P}$, $\overline{b}$ — образы, соответственно, P и b в $\overline{G} = G/\Phi(P)$. Из (19) следует, что $\overline{P}$ — элементарная абелева группа порядка p^2. По (17) элемент $\overline{b}$ действует неприводимо на $\overline{P}$. Тогда по лемме 1.18 получаем, что $\overline{G}$ не является перекрученной. Значит, по лемме 1.1 G не является перекрученной. Получаем противоречие с выбором контрпримера G, которое доказывает теорему 1.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В.Беляеву, под руководством которого была выполнена эта работа.

Список литературы

[1] Мыльников А.Л. *Конечные перекрученные группы* / А.Л.Мыльников // Математические системы. Вып. 3 / Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2005. – С. 53-58.

[2] Мыльников А.Л. *Нильпотентность коммутанта конечной перекрученной группы* / А.Л.Мыльников // (в печати).

[3] Судзуки М. *Строение группы и строение структуры ее подгрупп* / М.Судзуки. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.

[4] Gorienstein D. *Finite groups* / D.Gorienstein. – Harper and Row. – New York, 1968.

[5] Холл М. *Теория групп* / М.Холл. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

[6] Мыльников А.Л. *О конечных минимальных неперекрученных группах* / А.Л.Мыльников // (в печати).

ON SOLVABLE DEGREE OF FINITE SUPERTWISTED GROUP

A.L.Mylnikov

A subset S of group G is called twisted, if $1 \in G$ and $xy^{-1}x \in S$ for every $x, y \in S$. If any twisted subset of G is a subgroup of G, the group G is called supertwisted. In this paper we prove that any finite supertwisted group is solvable and its solvable degree is at most two.