УДК 517.55

О СУММИРОВАНИИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗВЕЗДЕ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА КРАТНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА[1]

Е.И. Яковлев*

В настоящей статье получено описание обобщения звезды Миттаг-Леффлера кратного степенного ряда с помощью асимптотических характеристик роста ассоциированной с данным рядом целой функции.

Список обозначений: $R^n_+ := \{x \in R^n : x_j \geqslant 0\}; R^n_0 := \{x \in R^n : x_j > 0\}; zt^x := (z_1 t_1^x, ..., z_n t_n^x);$ $< x, k >:= x_1 k_1 + ... + x_n k_n; \|k\| := k_1 + ... + k_n.$

Если F — целая функция в C^n, тогда обозначим $M_F(r) := \max\{|F(z_1, \ldots, z_n| : |z_j| \leqslant r_j, j = \overline{1, n}\}$ — максимум модуля на полидиске;

$$\rho_F(x_1 \ldots, x_n) := \varlimsup_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \ln^+ \ln^+ M_F(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n})$$

— порядок-функция функции F; если к тому же $0 < \rho_F(x) < \infty$, то

$$\sigma_F(r; x) = \sigma_F(r_1 \ldots, r_n; x_1 \ldots, x_n) := \varlimsup_{a\to r, t\to\infty} t^{-\rho_F(x)} \ln^+ M_F(a_1 t^{x_1}, \ldots, a_n t^{x_n})$$

— x-тип-функция функции F.

Введение

Задача аналитического продолжения степенного ряда восходит к Э.Борелю, предложившему интегральный метод суммирования ряда ([1, с.106]). Исследования Э.Бореля для случая n=1 получили развитие в работах Миттаг-Леффлера, М.М.Джрбашяна [2], Л.С.Маергойза [3]. Многомерный аналог метода Бореля для суммирования кратного степенного ряда впервые предложил В.К. Иванов [4]. Эта тематика развивалась в исследованиях А.А.Меленцова и Э.Л.Мураева [5], Л.А.Айзенберга, В.М.Трутнева [6, 7], Л.С.Маергойза [3].

Пусть

$$f(z) = f(z_1, ..., z_n) = \sum_{\|k\|\geq 0} a_k z^k = \sum_{\|k\|\geq 0} a_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n} \tag{1}$$

— n-кратный степенной ряд, который сходится в некоторой окрестности U начала координат в C^n. Ассоциируем с функцией f, заданной рядом (1), целую функцию $F_{(x,\rho)}(z)$.

Определение 1. Пусть $x \in R^n_0$, $\rho > 0$. Назовем (x, ρ)-преобразованием Бореля функции $f(z)$, заданной рядом (1) функцию $F_{(x,\rho)}(z)$, определяемую степенным рядом:

$$F_{(x,\rho)}(z) = \sum_{\|k\|\geq 0} \frac{a_k z^k}{\Gamma(< x, k > \rho^{-1} + 1)} = \sum_{\|k\|\geq 0} \frac{a_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}}{\Gamma((x_1 k_1 + ... + x_n k_n)\rho^{-1} + 1)}. \tag{2}$$

В данной работе предлагается интегральный метод суммирования ряда (1) в параболической звезде Миттаг-Леффлера. В первом параграфе приводятся необходимые свойства -звездных множеств, определение x-звезды Миттаг-Леффлера функции f и обратное интегральное представление (x, ρ)-преобразованием Бореля через функцию f.

Минимальная область, куда возможно будет аналитически продолжить функцию f, — это область сходимости ряда (1). Второй параграф посвящен описанию области сходимости ряда (1) с помощью -тип функции (x, ρ)-преобразования Бореля (см. ниже теорема 1). При $n = 1$ теорема 1 переходит в известную теорему Бореля о взаимосвязи радиуса сходимости ряда и типа ассоциированной с данным рядом целой функции.

Функция f, заданная рядом (1), сходящимся в некоторой окрестности U начала координат, и ее (x, ρ)-преобразование Бореля связаны интегральной формулой

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \int_0^\infty e^{-t} F_{(x,\rho)}(z_1 t^{\frac{x_1}{\rho}}, \ldots, z_n t^{\frac{x_n}{\rho}}) dt. \tag{3}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 03-01-00460.

Формула (3) справедлива всюду в области сходимости ряда (1), но интеграл в (3) может абсолютно и равномерно сходиться и в большей области, давая тем самым аналитическое продолжение функции f.

Описание области сходимости интеграла (3), при $x_1 = x_2 = \rho = 1$ в работе [4] является ключевым для многомерного случая. Несколько иной подход имеется в [5]. По аналогии с работами Э.Бореля, М.М.Джрбашяна, Л.С.Маергойза, Г.Харди (при $n = 1$) и В.К. Иванова, А.А.Меленцова, Э.Б.Мураева, Л.А.Айзенберга, В.М.Трутнева, Л.С.Маергойза (при $n > 1$) дадим определение аналога многоугольника Бореля.

Определение 2. Пусть $x \in R_0^n$, $\rho > 0$. Открытое ядро множества абсолютной сходимости интеграла в (3) назовем (x, ρ)-многоугольником Бореля ряда (1) и будем обозначать через $B(x, \rho)$.

В третьем параграфе настоящей работы с опорой на свойства и описание (x, ρ) - многоугольника Бореля рассматривается аналитическое продолжение функции f, заданной рядом (1) в максимальную -звездную область (см. ниже определение 4).

1. Интегральное представление (x, ρ)-преобразования Бореля и x-звездные множества

Формула (3) выражает функцию f через ее (x, ρ)-преобразования Бореля. Существует и обратная интегральная формула.

Предложение 1. *Пусть функция f задана кратным степенным рядом* (1), *сходящимся в некоторой окрестности начала координат. Тогда ее (x, ρ)-преобразования Бореля выражается по формуле*

$$F_{(x,\rho)}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial V} \chi_{(x,\rho)}(z_1 w_1, ... z_n w_n) f(\zeta) \delta(w) \wedge d\zeta, \tag{4}$$

где

$$\chi_{(x,\rho)}(u) = \sum_{\|k\| \geq 0} \frac{(||k|| + n - 1)! a_{k_1 \ldots k_n} u_1^{k_1} \ldots u_n^{k_n}}{k_1! \ldots . k_n! \Gamma((x_1 k_1 + \ldots + x_n k_n)\rho^{-1} + 1)} \ , u \in C^n$$

— целая функция; $V := \{\zeta \in C^n : \Phi(\zeta, \overline{\zeta}) < 0\}$ — выпуклая область, содержащая начало координат, компактно лежащая в области голоморфности функции f, со строго выпуклой, регулярной границей $\nabla\Phi|_{\partial V} \neq 0; w_j = \Phi'_{\zeta_j}(< \zeta, \nabla\Phi >)^{-1}$; $\delta(w) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw[k]$; $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$.

Доказательство интегральной формулы (4) вполне аналогично доказательству соответствующей обратной формулы в [7]. Воспользовавшись формулой Стокса, перейдем от интегрирования по ∂V к интегрированию по границе шара $S(0, \delta)$ с центром в начале координат, достаточно малого радиуса δ, компактно лежащего в области сходимости ряда (1). Разлагая подынтегральные функции в ряды, интегрируя их и используя при этом известное соотношение

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial S(0,\delta)} \overline{\zeta}^\beta \zeta^\alpha d\overline{\zeta} \wedge d\zeta = \begin{cases} \frac{||\alpha||! \delta^{2||\alpha|| + 2n}}{(||\alpha|| + n - 1)!}, \alpha_j = \beta_j; \forall j = \overline{1, n} \\ 0, \exists j : \alpha_j \neq \beta_j \end{cases} ,$$

получаем требуемую формулу.

Интегральные формулы (3) и (4) дополняют друг друга. В формуле (3) интегрирование ведется по одномерному множеству, а в формуле (4) – по $(2n - 1)$-мерному, то есть сумма размерностей этих множеств в точности равна размерности пространства. В случае $x_1 = \ldots = x_n = \rho = 1$ наиболее близкий выбор ассоциированной функции (2) и, соответственно, формулы (3) имеется в [6, 7]. Различие объясняется обратной интегральной формулой (4), выражающей функцию (2), через функцию (1). В нашем случае коэффициент $(||k|| + n - 1)!$ стоит в функции ядра $\chi_{(x,\rho)}$, а в [7] этот коэффициент присутствует в знаменателе ассоциированной функции.

Многоугольник Бореля, как будет показано ниже, является параболически звездным множеством, поэтому для дальнейшего изложения нам потребуется класс x-звездных множеств.

Определение 3. Пусть $x \in R_0^n$. Множество G в C^n назовем x-звездным, если вместе с каждой точкой $z_0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ в G содержится множество

$$L_{z_0}^x := \{z \in C^n : z_j = t^{x_j} z_j^0; j = 1, \ldots, n; \forall t \in [0, 1]\} \tag{5}$$

(x-отрезок). Множество G в C^n назовем параболически звездным, если G – x-звездно для некоторого $x \in R_0^n$.

В случае одного переменного все x-звездные множества совпадают с обычными звездными множествами. Если все числа $\{x_j\}_{j=1}^n$ равны между собой, то всякое x-звездное множество является звездным множеством и наоборот. Если же какие-либо x_j различны между собой, то не всякое x-звездное множество звездно. В случае одного переменного звездные множества играют фундаментальную роль в понятии звезды Миттаг-Леффлера данного степенного ряда. По аналогии со звездными множествами дадим определение x-звезды Миттаг-Леффлера n-кратного степенного ряда.

Определение 4. Пусть $x \in R_0^n$. Максимальную x-звездную область, в которую голоморфно продолжается функция f, заданная сходящимся n-кратным степенным рядом (1), назовем x-звездой Миттаг-Леффлера ряда (1) или функции f. Обозначать x-звезду Миттаг-Леффлера функции f будем через G_f^x.

В случае одного переменного всякая x-звезда Миттаг-Леффлера совпадает с обычной звездой Миттаг-Леффлера или главной звездой данного степенного ряда. В случае многих переменных это не так.

Пример 1. Функция $f(z_1, z_2) = (1 - z_2 + z_1^2)^{-1}$ имеет главную звезду, отличную от (1,2)-звезды Миттаг-Леффлера.

Таким образом, можно указать функцию f, у которой, например, (1,2)-звезда несет больше информации о функции, чем ее главная или (1,1)-звезда. Поэтому для получения большей информации о функции f, заданной кратным степенным рядом (1), целесообразно уметь описывать произвольную х-звезду Миттаг-Леффлера функции f. В дальнейшем для этого описания потребуется понятие (x, ρ)-функционала Минковского некоторого x-звездного множества B в C^n.

Определение 5. Пусть $x \in R_0^n$, $\rho > 0$. Функцию

$$P_B(z_1, \ldots, z_n) := \inf\{\mu^\rho > 0 : (z_1\mu^{-x_1}, \ldots, z_n\mu^{-x_n}) \in B\}$$

назовем (x, ρ)-функционалом Минковского x-звездного множества B в C^n.

При $x_1 = \ldots = x_n = \rho = 1$ (x, ρ)-функционал Минковского переходит в обычный функционал Минковского. Для x-звездных множеств в R_+^n понятие (x, ρ)-функционала Минковского впервые было введено Л.С.Маергойзом (см., например, [3, с.205]). Там же указаны и некоторые свойства (x, ρ)-функционала Минковского, которые почти без изменений переносятся на наш случай. Отметим одно из них, которое мы будем применять в дальнейшем (см., также [7, с.660]).

Предложение 2. *Любое x-звездное открытое множество B в C^n однозначно восстанавливается с помощью своего полунепрерывного сверху (x, ρ)-функционала Минковского по формуле*

$$B = \{z \in C^n : P_B(z) < 1\}.$$

2. Многомерный аналог теоремы Бореля

В силу классической теоремы Гартогса произвольная область D сходимости n-кратного степенного ряда полная логарифмически выпуклая областью Рейнхарта. Поэтому ее образ D_+ в R^n (при отображении $z_j \to |z_j|; \forall j = 1, \ldots, n$ однозначно определяется любым (x, ρ)-функционалом Минковского P_{D_+}.

Нижеследующая теорема – многомерный аналог теоремы Э.Бореля. Она устанавливает связь между (x, ρ)-функционалом Минковского области сходимости ряда (1) и x-тип-функцией ряда (2). Для многих переменных одним из аналогов типа служит x-тип-функция. Впервые x-тип-функция была введена и изучалась Л.С.Маергойзом. Свойства x-тип-функции можно найти, например, в [3, с.165-182]. Иной многомерный аналог теоремы Бореля в связи с другим выбором ассоциированной целой функции был установлен Л.И.Ронкиным [8].

Теорема 1. *Пусть $x \in R_0^n$, $\rho > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) ряд (1) *сходится в некоторой окрестности начала координат и S – не пустая гиперповерхность его сопряженных радиусов сходимости;*

2) ряд (2) *задает целую функцию $F_{(x,\rho)}$, у которой порядок-функция ρ_F в точке x принимает значение ρ, причем $S = \{r \in R_+^n : \sigma_F(r; x) = 1\}$, где $\sigma_F(r; x)$ — x-тип-функция функции $F_{(x,\rho)}$.*

Замечание 1. В условии 1) теоремы 1 требование $S \neq \emptyset$ соответственно означает, что область сходимости ряда (1) содержит некоторый полидиск с центром в нуле и функция f, задаваемая рядом (1), не целая. Последнее требование можно ослабить. Дотаточно, чтобы функция, задаваемая рядом (2), имела не более чем нулевой порядок по совокупности переменных.

Доказательство. 1)→ 2). Пусть выполнено условие 1). Ряд (1) сходится в некоторой окрестности начала координат, поэтому существует такое $d > 0$, что полицилиндр $\Delta(0, d) := \{z \in C^n : |z_j| < d; j = \overline{1, n}\}$ компактно лежит в U. Известно (см. [9, с. 296]), что в этом случае

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|a_{k_1 \ldots k_n}|} \leqslant d^{-1}. \tag{6}$$

Используя формулу Стирлинга

$$\Gamma(< k, x > \rho^{-1} + 1) \sim (< k, x > (e\rho)^{-1})^{\frac{<k,x>}{\rho}} \sqrt{2\pi < k, x > \rho^{-1}}$$

и неравенство (6), получаем

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \sqrt[\|k\|]{|a_{k_1\ldots k_n}|(<k,x>\rho^{-1}+1)^{-1}} \leqslant \overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} d^{-\|k\|^{-1}}\left(<k,x>(\rho e)^{-1}\right)^{-\min x_j} = 0,$$

так как $\min\{x_j : j=\overline{1,n}\} > 0$. Следовательно, по формуле Коши-Адамара ряд (2) сходится во всем пространстве и функция $F_{(x,\rho)}$ – целая.

Вычислим значение порядок-функции ρ_F в точке x. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга и формулой, связывающей коэффициенты ряда Тейлора, с ее порядок-функцией (см., например, теорему 1.4 в [3, с.183]):

$$\rho_F(x) = \overline{\lim_{<k,x>\to\infty}} \frac{<k,x>ln<k,x>}{-ln|a_k| + \rho^{-1}<k,x>ln(<k,x>(e\rho)^{-1}) + 0.5\,ln(<k,x>\rho^{-1})}\,.$$

Первое слагаемое в знаменателе растет не значимо по сравнению с числителем, иначе функция f,заданная рядом (1) — целая, с ненулевым порядком. А это противоречит тому, что $S \neq \emptyset$. Поэтому остается указать на очевидное равенство.

$$\rho_F(x) = \overline{\lim_{<k,x>\to\infty}} \frac{<k,x>ln<k,x>}{\rho^{-1}<k,x>ln(<k,x>(e\rho)^{-1}) + 0.5ln(<k,x>\rho^{-1})} = \rho\,.$$

Вычислим x-тип-функцию $\sigma_F(r:x)$ функции $F_{(x,\rho)}$ с помощью формулы (1.8) в [3, с.184], и формулы Стирлинга

$$e\rho\sigma_F(r:x) = \overline{\lim_{<k,x>\to\infty}} <k,x>(|a_k|r^k\Gamma^{-1}(\rho^{-1}<k,x>+1)^{\frac{\rho}{<k,x>}} =$$

$$\overline{\lim_{<k,x>\to\infty}} (|a_k|r^k)^{<k,x>^{-1}\rho} e\rho\,.$$

И сокращая, получаем:

$$\sigma_F(r:x) = \overline{\lim_{<k,x>\to\infty}} (|a_k|r^k)^{<k,x>^{-1}\rho}. \tag{7}$$

Пусть теперь $r_0 = (r_1^0, \ldots, r_n^0) \in S$. Из (7), поскольку

$$inf\{<l,x>; x \in R_0^n : l \in R_+^n; \|l\| = 1\} > 0,$$

имеем

$$\sigma_F(r:x) = \overline{\lim_{<k,x>\to\infty}} \sqrt[\|k\|]{|a_k|r_0^k} = \overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \sqrt[\|k\|]{|a_k|r_0^k} = 1,$$

т.е., $\sigma_F(r:x) = 1$, если $r_0 \in S$. Учитывая, что S ограничивает полную логарифмически выпуклую область в R_+^n , а $\sigma_F(r:x)$ — (x,ρ)-функционал Минковского некоторого логарифмически выпуклого множества в R_+^n, заключаем

$$S = \{r \in R_0^n : \sigma_F(r:x) = 1\}.$$

2)$\rightarrow$ 1). Доказывается рассуждениями в обратном порядке.

Замечание 2. Формула (7) позволяет вычислять x-тип-функцию целой функции $F_{(x,\rho)}$, заданной рядом (1).

Замечание 3 . Используя формулу (7), вопрос построения целой функции с заданной х-тип-функцией при заданном значении порядок-функции в точке х можно свести к вопросу построения кратного степенного ряда с заданной гиперповерхностью сопряженных радиусов сходимости.

Автор анонсировал теорему 1 в [11], другое доказательство, позднее было опубликовано Л.С.Маергойзом в [3, с.214].

3. Аналитическое продолжение функции в ее параболическую звезду Миттаг-Леффлера

Описание (x,ρ)-многоугольника Бореля требует введения более тонкой характеристики роста целой функции $F(x,\rho)$, заданной рядом (2), по сравнению с ее x-тип-функцией, а именно (x,ρ)-радиального, регуляризованного индикатора целой функции.

Определение 6. Если F - целая функция в C^n и ее порядок-функция в точке $x=(x_1,...,x_n)$ из R_0^n равна $0<\rho<\infty$, то функцию

$$h_F(z;x;\rho) = \overline{\lim_{\zeta\ \to z}}\,\overline{\lim_{t\ \to\infty}} t^{-\rho}\ln|F(t^{x_1}\zeta_1,...,t^{x_n}\zeta_n)$$

назовем (x,ρ)-радиальным регуляризованным индикатором, или для краткости радиальным индикатором.

Понятие (x,ρ)-радиального регуляризованного индикатора ввел Л.С.Маергойз. При $x=(1,...,1)$ (x,ρ)-радиальный индикатор переходит в обычный радиальный инидикатор. Свойства радиального индикатора и теорема о его существовании имеются, например, в [8, с.286]. Пользуясь схемой из [8], можно получить аналогичные свойства (x,ρ)-радиального регуляризованного индикатора, см. также [3, с.202]. Поэтому (x,ρ)-радиальный регуляризованный индикатор является плюрисубгармонической, (x,ρ)-положительно однородной функцией, т.е. $h_F(zt^x;x;\rho)=t^\rho h_F(z;x;\rho)$. Функции из этого класса, не тождественно равные $-\infty$, удовлетворяют неравенству

$$U(e^{i\frac{\pi}{\rho}x_1}z_1,...,e^{i\frac{\pi}{\rho}x_n}z_n)+U(z)\geq 0, \forall z\in C^n,$$

верно оно и для (x,ρ)-радиального индикатора.

Множество

$$C_{(x,\rho)} := \{z\in C^n : h_F(z;x;\rho)<1\},$$

где h_F - (x,ρ)-радиальный индикатор целой функции F, x-звездная область в силу полунепрерывности сверху и однородности функции h_F. Эта область вполне определяется (x,ρ)-радиальным индикатором h_F и в свою очередь однозначно определяет неотрицательную срезку (x,ρ)-индикатора $h_F^+ := \max\{h_F,0\}$. Так как функция h_F плюрисубгармоническая, то область $C_{(x,\rho)}$ псевдовыпукла (см. [10, с.123].

Для того чтобы исследовать связь многоугольника Бореля $B_{(x,\rho)}$ функции f с х-звездной областью $C_{(x,\rho)}$, когда функция F совпадает с ассоциированной по Борелю функцией $F_{(x,\rho)}$, нам потребуются множества

$$A_\rho := \{\lambda=(|\lambda|,\arg\lambda)\in Ł : \Re\mathrm{e}\,\lambda^{-\rho}\geq 1; |\arg\lambda|\leq\frac{\pi}{2\rho}\},$$

$$M_{(x,\rho)} := \{z\in C^n : (z_1\lambda^{x_1},...,z_n\lambda^{x_n})\in G; \forall\lambda\in A_\rho\}.$$

Здесь L — риманова поверхность логарифма, G — х-звездная область в C^n, а под λ^{x_j} понимается $\lambda^{x_j}=\exp[x_j(\ln|\lambda|+i\arg\lambda)]$, т.е. берется главная ветвь логарифма.

При $\rho\geq\frac{1}{2}$ множество A_ρ компактно лежит на комплексной плоскости. Причем при $\rho=\frac{1}{2}$ множество A_ρ есть часть комплексной плоскости, ограниченной кардиоидой, а при $\rho=1$, A_ρ - это круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(\frac{1}{2},0)$. Начиная с $\rho<\frac{1}{2}$, множество A_ρ проектируется в комплексную плоскость не взаимнооднозначно. Однако при отображении проектирования

$$\pi : L\to C$$

образ множества содержится в замыкании единичного круга в C, причем $A_\delta\subset A_\gamma$ при $\delta>\gamma$. Таким образом,

$$\bigcap_{\rho>0}A_\rho=(0,1],\{\lambda\in C : |\lambda|\leqslant 1\}\subsetneqq\bigcup_{\rho>0}A_\rho.$$

Из этих свойств множества A_ρ; $\rho>0$ легко получаем следующие свойства множества $M_{(x,\rho)}$

$$D := \bigcap_{\rho>0}M_{(x,\rho)}, G=\bigcup_{\rho>0}M_{(x,\rho)}.$$

Здесь, если x имеет натуральные координаты, то есть $x=m$, где $m\in N^n$, то D — максимальная, m — круговая область, которую можно поместить в G. Понятна и геометрическая структура множества $M_{(x,\rho)}$. Возьмем произвольную точку z из G и соединим ее x-отрезком (5): с началом координат. Если "натянуть"на этот x-отрезок множество A_ρ и полученное множество все еще будет лежать в G, то точка z принадлежит $M_{(x,\rho)}$. Ясно, что и само множество $M_{(x,\rho)}$ является x-звездным.

Пусть теперь всюду ниже $B_{(x,\rho)}$ - x-многоугольник Бореля функции f, заданной рядом (1); $M_{(x,\rho)}$ — множество, при построении которого в качестве G возьмем G_f^x — x-звезду Миттаг-Леффлера функции f и, наконец, $C_{(x,\rho)} := \{z\in C^n : h_F(z;x;\rho)<1\}$ строится с помощью индикатора $h_F(z;x;\rho)$, где роль целой функции F играет ассоциированная по Борелю с f целая функция $F(x;\rho)$. Для связи вышевведенных множеств нам потребуется нижеследующая теорема из [11].

Теорема 2. $M_{(x,\rho)}=B_{(x,\rho)}=C_{(x,\rho)}$.

Продолжение кратного степенного ряда в его x-звезду Миттаг-Леффлера можно осуществить, используя описание (x,ρ)-многоугольника Бореля, приведенное в теореме 2. В каждом (x,ρ)-многоугольнике $B(x,\rho)$ функция f может быть вычислена с помощью формулы (3). Причем описанная выше геометрическая структура множества $M(x,\rho)$ позволяет по (x,ρ) - многоугольникам Бореля восстановить G_f^x x-звезду Миттаг-Леффлера функции f. То есть

$$G_f^x = \bigcup_{\rho>0} B(x,\rho).$$

Следовательно, по аналогии с [2] можно утверждать, что справедлива

Теорема 3. *Пусть f голоморфна в некоторой окрестности начала координат в C^n и задана там кратным степенным рядом* (1)*. Тогда формула*

$$f(z) = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^\infty e^{-t}dt \int_{\Delta^n_{\zeta_0}} f(\zeta) E_{(x,\rho)}(\frac{zt^{\frac{x}{\rho}}}{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta}; \forall z \in D, \tag{8}$$

где

$$E_{(x,\rho)}(z) = \sum_{\|k\|\geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(< x,k > \rho^{-1}+1)} = \sum_{\|k\|\geq 0} \frac{z_1^{k_1}...z_n^{k_n}}{\Gamma((x_1k_1+...+x_nk_n)\rho^{-1}+1)},$$

— один из многомерных аналогов функции Миттаг-Леффлера, дает голоморфное продолжение функции f в любую область D , компактно принадлежащую G_f^x — x-звезде Миттаг-Леффлера функции f. При этом

$$G_f^x = \bigcup_{\rho>0} B(x,\rho),$$

а пересечение (x,ρ)-многоугольников Бореля при $x \in N^n$ дает x-круговую область сходимости ряда f.

Эта формула позволяет восстанавливать значения функции f в x-звезде Миттаг-Леффлера по ее значениям на остове поликруга $\Delta^n_{\zeta_0}$. Если бы можно было переставить местами интегралы и внести предел, а потом перейти к пределу, то мы бы получили обычную формулу Коши для поликруга.

Если провести внутреннее интегрирование, то из формулы (8) вытекает

Следствие 2. *В условиях и обозначениях теоремы 3 справедлива формула*

$$f(z) = \lim_{\rho\to\infty} \int_0^\infty e^{-t} F_{(x,\rho)}(z_1 t^{\frac{x_1}{\rho}}, \dots, z_n t^{\frac{x_n}{\rho}})dt. \tag{9}$$

В [4, 5] даны соответствующие продолжения ряда вида (1) в его (1,...,1)-звезду Миттаг-Леффлера с помощью иных формул. Как уже упоминалось, описание многоугольника Бореля тесно связано с теоремой Пойа. Используя описание (x,ρ)-многоугольника Бореля, можно получить многомерный аналог теоремы Пойа для x-звездных множеств.

Список литературы

[1] Харди Г. *Расходящиеся ряды* / Г.Харди. – М.: ИЛ, 1951.

[2] Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области* / М.М.Джрбашян. – М.: Наука, 1966.

[3] Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике* / Л.С.Маергойз. – Н.: Наука, 1991.

[4] Иванов В.К. *Характеристики роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов* / В.К. Иванов // Матем. сб. – 1959. – Т. 47. – №1. – С. 131-140.

[5] Меленцов А.А. *К теории суммирования двойных рядов методами Бореля* / А.А.Меленцов, Э.Б.Мураев // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130. – №6. – С. 1193-1195.

[6] Айзенберг Л.А. *Об одном методе суммирования Бореля кратных степенных рядов* / Л.А.Айзенберг, В.М.Трутнев // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т. 12. – №6. – С. 1398-1404.

[7] Трутнев В.М. *Радиальный индикатор в теории суммирования и некоторые применения* / В.М.Трутнев // Сиб.матем. журнал. – 1972. – Т. 13.– №3. – С. 659-664.

[8] Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных* / Л.И.Ронкин. – М.: Наука, 1971.

[9] Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ* / Б.В.Шабат. – М.: Наука, 1985.

[10] Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных* / В.С.Владимиров. – М.: Наука, 1964.

[11] Яковлев Е.И. *Аналог метода Бореля суммирования кратного степенного ряда* / Е.И.Яковлев // – Рук. деп.ред.коллег.Сиб. матем. журнал. – 1984. – ВИНИТИ №714-85 ДЕП. – С.17.

ABOUT SUMMATION MULTIPLE POWER SERIES AT PARABOLIC MITTAG-LEFFLER'S STAR

E.I.Yakovlev

In this paper artical a description of generalization of a Mittag-Leffler's star of multiple power series is received through asymptotic characteristics an entire function, associated with given series.