УДК 519.63

ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.Е.Распопов, Ю.В.Мандрык*

В работе численно решаются задачи идентификации неизвестных коэффициентов параболического уравнения. Предполагается, что искомые коэффициенты зависят только от t. Рассмотрены случаи, когда неизвестны два, три и четыре коэффициента. Поставлены условия переопределения. Предложены и численно реализованы алгоритмы решения полученных обратных задач.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a\frac{\partial U}{\partial x} + bU + fg(t,x), 0 < t < 1, 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U(0,x) = U_0(x), 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$U(t,0) = \mu_1(t), \;\; U(t,1) = \mu_2(t), 0 \le t \le 1. \tag{3}$$

Предположим, что наряду с основной искомой функцией неизвестны коэффициенты K и a. Полагаем, что неизвестные коэффициенты зависят только от t. Все остальные коэффициенты уравнения — известные функции от t и x (в таких случаях мы считаем, что $f \cdot g(t,x) = F(t,x)$ — известная функция).

Условия переопределения ставим следующим образом:

$$U(t,\xi) = \varphi(t), 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

$$K(t)\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \beta(t), 0 \le t \le 1, \tag{5}$$

где $0 < \xi < 1$ - фиксированная точка, $\varphi(t)$ и $\beta(t)$ - заданные функции.Считаем, что

$$K(t) > 0, \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} \ne 0 \;\text{ и }\; \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} \ne 0 \;\text{ при }\; 0 \le t \le 1.$$

Итак требуется найти функции $U(t,x), K(t), a(t)$, удовлетворяющие задаче $(1)-(5)$. Задачу решаем численно.

Дифференциальную задачу $(1)-(5)$ аппроксимируем неявной разностной схемой

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = K^n\frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + a^{n+1}\frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} + b(t_n,x_i)y_i^n + F(t_n,x_i), \tag{6}$$

$i = 1,\ldots,(M-1), n = 0,1,\ldots,(N-1)$,

$$y_i^0 = U_0(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,M, \tag{7}$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n), \quad y_M^n = \mu_2(t_n), \quad n = 0,1,\ldots,N, \tag{8}$$

$$y_k^n = \varphi(t_n), \quad n = 0,1,\ldots,N, \tag{9}$$

$$K^n\frac{y_1^{n+1} - y_0^{n+1}}{h} = \beta(t_{n+1}), \quad n = 0,1,\ldots,(N-1), \tag{10}$$

полагаем, что точке ξ соответствует узел с номером k. Разностная схема $(6)-(10)$ имеет первый порядок аппроксимации по обеим переменным.

Разностную задачу решаем итерационным методом. На нулевой итерации произвольно задаем K^n и решаем задачу (6)-(9) последовательно по слоям по времени. На каждом временном слое (на каждой итерации) имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{y_1^{n+1}, \ldots, y_{k-1}^{n+1}, y_{k+1}^{n+1}, \ldots, y_{M-1}^{n+1}, a^{n+1}\}$. Матрица этой системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
* & * & & & & & & & & & * \\
* & * & * & & & & & & & & * \\
 & * & * & * & & & & & & & * \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
 & & * & * & * & & & & & & * \\
 & & & * & * & & & & & & * \\
 & & & & * & * & & & & & * \\
 & & & & & * & * & & & & * \\
 & & & & & * & * & * & & & * \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
 & & & & & & * & * & * & & * \\
 & & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & * & * & *
\end{array}\right) \qquad (11)$$

Здесь и далее звездочками ($*$) обозначены ненулевые элементы матрицы, все остальные элементы матрицы (11) равны нулю. Систему решаем методом исключения, который можно назвать обобщением прогонки. Он заключается в следующем. Последовательно исключаем неизвестные, одновременно двигаясь сверху и исключая элементы нижней диагонали и двигаясь снизу и исключая элементы верхней диагонали. В результате в строке с номером k получаем уравнение $\alpha a^{n+1} = \beta$, где α и β — числа. Отсюда находим a^{n+1}, затем, осуществляя обратный ход вверх и вниз, найдем все неизвестные y_j^{n+1}. Метод требует порядка $O(M)$ операций. Очевидно, что вычисления можно вести на параллельных процессорах. После того как y_j^{n+1} на всех слоях найдены, из уравнения (10) вычисляем K^n на всех слоях для первой итерации, возвращаемся к уравнениям (6)-(9) и т.д.

Итерации ведем до тех пор, пока

$$||y_j^n(s+1) - y_j^n(s)|| \leq \varepsilon, \quad ||K^n(s+1) - K^n(s)|| \leq \varepsilon \text{ и } ||a^n(s+1) - a^n(s)|| \leq \varepsilon,$$

где s — номер итерации. В качестве нормы были взяты разностные аналоги равномерной нормы и нормы пространства L_2.

Предложенный алгоритм численного решения поставленной обратной задачи апробирован на различных тестах. На всех рассмотренных тестах итерационный процесс сошелся за 8-12 итераций. $K^n(0)$ полагалось для всех n равным константе, $\xi = 0,5$. При уменьшении шагов сетки абсолютные и относительные погрешности всех переменных убывают, что позволяет сделать предположение о сходимости численного решения к точному.

Для примера приведем максимальные по всем узлам сетки относительные погрешности численных решений при $\tau = h = 0,001$ для следующих тестов:

1. $U(t,x) = e^t \sin x, \quad K(t) = t^2 + e^{-t} + \cos t, \quad a(t) = \dfrac{e^t}{\sqrt{t} + 0.1}.$
2. $U(t,x) = e^{t+1}(x^2 + x), \quad K(t) = t^2 + e^t, \quad a(t) = e^{t+1}.$
3. $U(t,x) = e^{t+5}(x^2 + x + \cos t), \quad K(t) = e^t + \ln(t+3), \quad a(t) = \sqrt{t+1}.$

Таблица погрешностей

Тест	Максимальная относительная погрешность $Y_j^n, \%$	Максимальная относительная погрешность $K^n, \%$	Максимальная относительная погрешность $a^n, \%$
N1	0.004	0.004	0.09
N2	0.02	0.1	0.14
N3	0.002	0.1	0.35

Аналогичным образом решены обратные задачи, когда неизвестны коэффициенты:

$$a) \ K(t) \text{ и } f(t),$$
$$b) \ K(t) \text{ и } b(t).$$

Рассмотрим теперь случай, когда неизвестны три коэффициента. Например, пусть неизвестны $K(t), a(t)$ и $f(t)$.

Дифференциальная постановка задачи такая же, как и прежде, только теперь вместо (4) заданы два условия переопределения:

$$U(t, \xi_1) = \varphi_1(t), \;\; U(t, \xi_2) = \varphi_2(t), \;\; 0 \le t \le 1, \tag{12}$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ - фиксированные точки из (0,1), $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - заданные функции.

В разностной схеме в уравнении (6) неизвестный коэффициент $f(t)$ берется на (n+1)-м слое, функция $g(t, x)$ в точке (t_n, x_i), остальные слагаемые остаются без изменений. Уравнение (9) заменяется уравнениями

$$y^n_{k_1} = \varphi_1(t_n), \;\; y^n_{k_2} = \varphi_2(t_n), \;\; n = 0, 1, \ldots, N, \tag{13}$$

аппроксимирующими новые условия переопределения (12). Считаем, что точкам $x = \xi_1$ и $x = \xi_2$ соответствуют узлы сетки с номерами k_1 и k_2.

Новую разностную задачу решаем также итерационным методом. Однако теперь на каждом временном слое (на каждой итерации) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{a^{n+1}, y_1^{n+1}, \ldots, y_{k_1-1}^{n+1}, \; y_{k_1+1}^{n+1}, \ldots, y_{k_2-1}^{n+1}, y_{k_2+1}^{n+1}, \; \ldots, y_{M-1}^{n+1}, f^{n+1}\}$ с матрицей вида

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
\ast & \ast & \ast &&&&&&&&&& \ast \\
\ast & \ast & \ast & \ast &&&&&&&&& \ast \\
\ast && \ast & \ast & \ast &&&&&&&& \ast \\
\multicolumn{13}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\ast &&& \ast & \ast &&&&&&&& \ast \\
\ast &&&& \ast & \ast &&&&&&& \ast \\
\ast &&&&& \ast & \ast &&&&&& \ast \\
\ast &&&&& \ast & \ast & \ast &&&&& \ast \\
\multicolumn{13}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\ast &&&&&& \ast & \ast &&&&& \ast \\
\ast &&&&&&& \ast & \ast &&&& \ast \\
\ast &&&&&&&& \ast & \ast &&& \ast \\
\ast &&&&&&&& \ast & \ast & \ast && \ast \\
\multicolumn{13}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\ast &&&&&&&&& \ast & \ast & \ast & \ast \\
\ast &&&&&&&&&& \ast & \ast & \ast
\end{array}\right) \tag{14}$$

Здесь левый крайний столбец состоит из коэффициентов при a^{n+1}, правый крайний столбец — из коэффициентов при f^{n+1}. Символом $(\ast)$, как и раньше, отмечены ненулевые элементы, все остальные элементы матрицы равны нулю.

Систему линейных алгебраических уравнений решаем таким образом. Последовательно исключаем неизвестные, стоящие на нижней диагонали ленты, начиная сверху и пробегая по ленте вниз вплоть до строки с номером k_1. Далее аналогично исключаем неизвестные, начиная со строки с номером $(k_1 + 1)$ и заканчивая строкой с номером k_2. Затем исключаем неизвестные, стоящие на верхней диагонали ленты, двигаясь снизу вверх, начиная со строки с номером $(k_2 - 1)$ и заканчивая строкой с номером k_1 . И, наконец, исключаем неизвестные, стоящие на верхней диагонали ленты, идем снизу вверх, начиная с последней строки вплоть до строки с номером k_2. В результате такого исключения приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \alpha_1 a^{n+1} + \beta_1 f^{n+1} = \gamma_1, \\ \alpha_2 a^{n+1} + \beta_2 f^{n+1} = \gamma_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда находим a^{n+1} и f^{n+1}. Далее находим значения остальных неизвестных на (n+1) слое, проводя обратный ход метода исключения вниз и вверх по матрице.

Решив системы линейных алгебраических уравнений с матрицами вида (14) на всех временных слоях, найдем значения неизвестных a^{n+1}, f^{n+1}, y_j^{n+1} во всех узлах сетки на очередной итерации. Затем из уравнений (10) находим K^n для следующей итерации и т.д.

Предложенный алгоритм решения новой обратной задачи был апробирован на ряде тестов. На всех рассмотренных тестах итерационный процесс сошелся за 8-12 итераций. Абсолютные и относительные погрешности с уменьшением шагов сетки убывают, что позволяет сделать предположение о сходимости разностной задачи.

Приведем некоторые данные расчетов с $\tau = h = 0,001, \xi_1 = 0,4, \xi_2 = 0,6$ для тестов

4. $U(t,x) = e^{-t^2}(x^2+x),\ \ K(t) = t^2+1,\ \ a(t) = t^2+t+5,\ \ f(t) = e^{-t^2};$
5. $U(t,x) = e^{sint} + e^{3x} + sintx,\ \ K(t) = e^{2t}+1,\ \ a(t) = e^t sintcost + 20e^t,$

   $f(t) = e^t - 1 + \dfrac{1}{2-t}.$

Таблица относительных погрешностей

Тест	Максимальная относительная погр. $Y_j^n, \%$	Максимальная относительная погр. $K^n, \%$	Максимальная относительная погр. $a^n, \%$	Максимальная относительная погр. $f^n, \%$
N4	0.01	0.11	0.2	0.2
N5	0.005	0.15	1.3	0.8

Аналогично решены задачи, когда неизвестны:
а) $K(t), a(t), b(t)$; б) $K(t), b(t), f(t)$.

Замечание. При переходе с итерации на итерацию для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей вида (14) применялся также алгоритм, предложенный в [1] для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей, состоящей из трехдиагональной ленты, окаймленной крайними строками и столбцами. Результаты расчетов получились идентичными.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (1) неизвестны все четыре коэффициента: $K(t), a(t), b(t)$ и $f(t)$.

В этом случае условие переопределения (4) принимает вид

$$U(t,\eta_1) = \psi_1(t),\ \ U(t,\eta_2) = \psi_2(t),\ \ U(t,\eta_3) = \psi_3(t), 0 \le t \le 1, \tag{16}$$

где $0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < 1$ - фиксированные точки из (0,1), $\psi_1(t), \psi_2(t)$ и $\psi_3(t)$ - заданные функции.

В разностном уравнении (6) коэффициент K берется на нижнем n-м слое, а коэффициенты a, b и f - на верхнем (n+1)-м слое. Считаем, что точкам $x = \eta_1, x = \eta_2$ и $x = \eta_3$ соответствуют узлы сетки с номерами l_1, l_2 и l_3. Алгоритм решения разностной задачи такой же, как и прежде, только здесь на каждом слое по времени (на каждой итерации) решаем методом исключения систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{y_1^{n+1}, \ldots, y_{l_1-1}^{n+1}, y_{l_1+1}^{n+1}, \ldots, y_{l_2-1}^{n+1}, y_{l_2+1}^{n+1}, \ldots, y_{l_3-1}^{n+1}, y_{l_3+1}^{n+1}, \ldots, y_{M-1}^{n+1}, a^{n+1}, b^{n+1}, f^{n+1}\}$ с матрицей вида

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
* & * & & & & & & & & & & & & & * & * & * \\
* & * & * & & & & & & & & & & & & * & * & * \\
& * & * & * & & & & & & & & & & & * & * & * \\
\multicolumn{17}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& & * & * & & & & & & & & & & & * & * & * \\
& & & * & * & & & & & & & & & & * & * & * \\
& & & & * & * & & & & & & & & & * & * & * \\
& & & & * & * & * & & & & & & & & * & * & * \\
\multicolumn{17}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& & & & & * & * & & & & & & & & * & * & * \\
& & & & & & * & * & & & & & & & * & * & * \\
& & & & & & & * & * & & & & & & * & * & * \\
& & & & & & & * & * & * & & & & & * & * & * \\
\multicolumn{17}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& & & & & & & & * & * & & & & & * & * & * \\
& & & & & & & & & * & * & & & & * & * & * \\
& & & & & & & & & & * & * & & & * & * & * \\
& & & & & & & & & & * & * & * & & * & * & * \\
\multicolumn{17}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& & & & & & & & & & & * & * & * & * & * & * \\
& & & & & & & & & & & & * & * & * & * & *
\end{array}\right) \tag{17}$$

Алгоритм исключения неизвестных таков. Последовательно исключаем неизвестные, стоящие на нижней диагонали ленты, начиная сверху, пробегая по ленте вниз вплоть до строки с номером l_1. Далее исключаем неизвестные, начиная со строки с номером (l_1+1) и заканчивая строкой с номером l_2. Теперь, шагая вверх по ленте, последовательно исключаем неизвестные, стоящие на верхней диагонали ленты, начиная со строки с номером (l_2-1) и заканчивая строкой с номером l_1. Далее, шагая вниз по ленте, исключаем неизвестные, стоящие на нижней диагонали ленты, начиная со строки с номером (l_2+1) и заканчивая строкой с номером l_3. Затем идем вверх по ленте, последовательно исключаем неизвестные, стоящие на верхней диагонали ленты, начиная со строки с номером (l_3-1) и заканчивая строкой с номером l_2. И, наконец, исключаем неизвестные, стоящие на верхней диагонали ленты, шагая вверх по ленте с последней строки матрицы вплоть до строки с номером l_3. В результате исключений мы приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\gamma_{11}a^{n+1}+\gamma_{12}b^{n+1}+\gamma_{13}f^{n+1}=\gamma_{14},$$
$$\gamma_{21}a^{n+1}+\gamma_{22}b^{n+1}+\gamma_{23}f^{n+1}=\gamma_{24},$$
$$\gamma_{31}a^{n+1}+\gamma_{32}b^{n+1}+\gamma_{33}f^{n+1}=\gamma_{34}.$$

Решая эту систему, находим a^{n+1}, b^{n+1} и f^{n+1}. Далее, осуществляя обратный ход метода исключения, найдем все y_j^{n+1}. Из уравнений (10) находим K^n для следующей итерации и т.д.

Предложенный алгоритм решения поставленной обратной задачи был апробирован на тестах. На всех рассмотренных тестах итерационный процесс сошелся за 8-12 итераций. При уменьшении шагов сетки абсолютные и относительные погрешности убывают, что позволяет сделать предположение о сходимости разностной задачи.

Например, для тестов

6. $U(t,x)=e^{-t^2}(x^2+x+cost),\ \ K(t)=t^2+1,\ \ b(t)=cost,\ \ a(t)=sint+1,$
   $f(t)=e^{-t^2};$
7. $U(t,x)=e^{t+5}(x^2+x+cost)+e^t+e^x,\ \ K(t)=e^t+ln(t+3),$
   $b(t)=sint+cost+3,\ \ a(t)=t^2+3,\ \ f(t)=\sqrt{t+1}+5;$
8. $U(t,x)=sin(e^{cost})+sin2\pi x+3+e^t+e^x,\ \ K(t)=e^{2t}+1,\ \ b(t)=sint+$
   $+5+\dfrac{e^2t}{cost},\ \ a(t)=\sqrt{sin(sintcoste^t)}+20e^t,\ \ f(t)=e^t+1+\dfrac{1}{2-t}+3e^{2t},$

максимальные относительные погрешности при шагах сетки $\tau=h=0,001$, при $\eta_1=0,2, \eta_2=0,5, \eta_3=0,8$ не превосходили $0,02\,\%$ для y_j^n и $0,7\,\%$ для K^n, a^n, b^n и f^n.

Замечание. Нетрудно видеть, что в случае как трех, так и четырех неизвестных коэффициентов вычисления могут быть распараллелены.

Случаи, когда функция $K(t,x)$ известна, а неизвестны коэффициенты $a(t), b(t)$ и $f(t)$ в различных сочетаниях, рассмотрены в [2].

Список литературы

[1] Самарский А.А. *Методы решения сеточных уравнений* / А.А.Самарский, Е.С.Николаев. – М.: Наука, 1978.

[2] Белов Ю.Я. *О задаче идентификации коэффициентов параболического уравнения* / Ю.Я.Белов, В.Е.Распопов, Т.Н.Шипина // Вычислительные технологии. – 2002. – Т.7. – С. 350-357.

NUMERICAL IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS OF THE ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

V.E.Raspopov, Ju.V.Mandric

In this work problems of the identification of unknown coefficients of one-dimensional parabolic equation are solved numerically. Cases when two or three or four coefficients are unknown are considered. It is supposed, that unknown coefficients depend only on t. Inverse problems are solved numerically by the iterative method.