УДК 517.98, 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА В ШАРОВОМ СЛОЕ[1]

И.В. Шестаков, А.А. Шлапунов*

Пусть D - шаровой слой в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а f — какая-нибудь дифференциальная форма бистепени $(0,1)$ с коэффициентами из класса Лебега $L^2(D)$. В работе описаны необходимые и достаточные условия $L^2(D)-$разрешимости уравнения $\overline{\partial} u = f$ в D, где $\overline{\partial}$ – многомерная система Коши-Римана. Более точно, мы доказываем, что если f является $\overline{\partial}$-замкнутой в смысле распределений в D, то $\overline{\partial}$-уравнение разрешимо в $L^2(D)$ в том и только в том случае, когда f ортогональна гармоническому пространству $\mathcal{H}^1(D)$, ассоциированному с комплексом Дольбо. Как и для шара, $\overline{\partial}$-уравнение в шаровом слое разрешимо на самом деле в пространстве Соболева $H^{1/2}(D)$, если только оно разрешимо в $L^2(D)$. Кроме того, при $n = 2$ доказывается, что пространство $\mathcal{H}^1(D)$ бесконечномерно, и строится его $L^2(D)$-ортогональный базис.

Введение

Когомологии комплекса Дольбо, возникшего как комплекс совместности для многомерной системы Коши-Римана, хорошо изучены на многообразиях, обладающих некоторыми специальными свойствами выпуклости (например, в псевдовыпуклых областях и областях с предписанными свойствами формы Леви, ассоциированной с границей данной области). Несмотря на субэллиптичность комплекса Дольбо, во всех этих случаях наложенные ограничения гарантируют конечномерность когомологий, а также некоторую регулярность решений вплоть до границы области при правильном выборе пространств, обычно пространств Гельдера или Соболева (см., например, [1], [2], [3]). Ситуация, когда область D получена удалением из строго псевдовыпуклой области конечного числа строго псевдовыпуклых подобластей, также, по-видимому, хорошо изучена в пространствах Гельдера (см., например, [4]).

В настоящей работе мы изучаем разрешимость многомерной системы Коши-Римана (или, другими словами, когомологии комплекса Дольбо в степени 1) в пространстве $L^2(D)$ в шаровом слое D в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, с помощью разложения в ряды Лорана по гармоническим функциям и методов теории гильбертовых пространств.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}^n$- n-мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}^n$- n-мерное комплексное пространство, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z = (z_1, ..., z_n)$, где $z_j = x_j + \sqrt{-1}x_{j+n}$, $j = 1, ..., n$, $\sqrt{-1}$ - мнимая единица, $x = (x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть D - ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, т.е. открытое связное множество. Обозначим через $L^2(D)$ пространство Лебега, т.е. множество комплекснозначных измеримых в D функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу по области D. Как известно, $L^2(D)$- гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_{L^2(D)} = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Как обычно, $L^2_{loc}(D)$- множество комплекснозначных измеримых в D функций, принадлежащих $L^2(G)$ для любой относительно компактной подобласти G из D.

Пусть $H^k(D)$ обозначает пространство Соболева, т.е. множество функций из $L^2(D)$, имеющих все обобщенные производные до порядка $k \in \mathbb{N}$ включительно, лежащие в $L^2(D)$. Напомним, что $H^k(D)$-гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g)_{H^k(D)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_D (D^\alpha f)(x)(D^\alpha \overline{g})(x)dx$. Как и выше, $H^k_{loc}(D)$- множество функций из $L^2_{loc}(D)$, имеющих все обобщенные производные до порядка $k \in \mathbb{N}$ включительно, лежащие в $L^2_{loc}(D)$. Если теперь $[X]^m$ - декартово произведение m экземпляров евклидова пространства X со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_X$, то $[X]^m$ тоже евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{[X]^m} = \sum_{j=1}^m (\cdot,\cdot)_X$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта научных школ НШ-1212.2003.1.

Обозначим через $\overline{\partial}$ оператор Коши-Римана в $\mathbb{C}^n$. Будем трактовать его как вектор-столбец $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \\ ... \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n} \end{pmatrix}$, где $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_{j+n}}$. Как известно, оператор Коши-Римана индуцирует дифференциальный комплекс совместности

$$0 \longrightarrow \Lambda^{(0,0)} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{(0,1)} \xrightarrow{\overline{\partial}_1} \Lambda^{(0,2)} \xrightarrow{\overline{\partial}_2} ... \xrightarrow{\overline{\partial}_{n-1}} \Lambda^{(0,n)} \longrightarrow 0,$$

который называется комплексом Дольбо (см., например, [1], [5] и др.). Здесь $\Lambda^{(p,q)}$- множество дифференциальных форм бистепени (p,q), а $\overline{\partial}_j$ - операторы комплексного дифференцирования дифференциальных форм.

Пусть теперь задана векторная функция $f \in [L^2(D)]^n$. Требуется найти в области D решение уравнения

$$\overline{\partial} u = f \tag{1}$$

в классе обобщенных функций. Как хорошо известно, такое решение u уравнения (1), когда существует, принадлежит $H^1_{loc}(D)$. Однако для приложений важно знать не только локальные свойства решений, но и их регулярность вплоть до границы. Поэтому возникает естественное желание искать решение u в пространствах Соболева.

Для $n = 1$ уравнение (1) всегда разрешимо в пространстве Соболева $H^1(D)$; при этом "хорошее"решение задается (несобственным) интегралом Коши-Грина:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_D \frac{f(\zeta) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

Однако, как стало ясно еще в 60-х годах прошлого столетия, $\overline{\partial}$-задача в многомерном случае субэллиптична. В частности, не для всех $f \in [L^2(D)]^n$, $n > 1$, удовлетворяющих условиям совместности, найдется решение уравнения (1) в классе Соболева $H^1(D)$, даже если D - шар (см. [6]). Уже классическим стал результат Хермандера [1] о том, что в псевдовыпуклых областях для всех $f \in [L^2(D)]^n$, удовлетворяющих условиям совместности, найдется решение уравнения (1) в классе Лебега $L^2(D)$. Целью нашей работы служит изучение условий $L^2(D)$-разрешимости $\overline{\partial}$-задачи в областях, не являющихся псевдовыпуклыми, и, в частности, в шаровом слое.

С этой целью введем на пространстве $H^1(D)$ эрмитову форму

$$(u, v) = (u, v)_{L^2(D)} + (\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{[L^2(D)]^n}. \tag{2}$$

Ясно, что (2) задает скалярное произведение в $H^1(D)$. Обозначим через $D(\overline{\partial})$ пополнение $H^1(D)$ относительно метрики $\rho_{\overline{\partial}}(\cdot,\cdot)$, индуцированной скалярным произведением (2). Очевидно, что оператор Коши-Римана порождает непрерывный линейный оператор

$$\overline{\partial} : D(\overline{\partial}) \longrightarrow [L^2(D)]^n. \tag{3}$$

Задача 1. *Пусть $f \in [L^2(D)]^n$. Найти решение уравнения (1) в классе $D(\overline{\partial})$.*

По определению, $u \in D(\overline{\partial})$ тогда и только тогда, когда 1) $u \in L^2(D) \cap H^1_{loc}(D)$; 2) $\overline{\partial} u \in [L^2(D)]^n$; 3) существует последовательность $\{u_N\}_{N=1}^{\infty} \subset H^1(D)$ такая, что $\{u_N\}$ сходится к u в $L^2(D)$ и $\{\overline{\partial} u_N\}$ сходится к $\overline{\partial} u$ в $[L^2(D)]^n$.

Как известно, необходимым условием разрешимости задачи 1 является равенство $\overline{\partial}_1 f = 0$ в смысле распределений, которое следует из свойства комплекса $\overline{\partial}_1 \circ \overline{\partial} = 0$. Таким образом, пространство $[L^2(D)]^n$, в котором лежит образ $\operatorname{Im}\overline{\partial}$ отображения (3), слишком велико для данных нашей задачи. Обозначим

$$Z(D) = \left\{ f \in [L^2(D)]^n : \overline{\partial}_1 f = 0 \text{ в смысле распределений в } D \right\}.$$

Ясно, что $Z(D)$ есть замкнутое подпространство в $[L^2(D)]^n$ и $\operatorname{Im}\overline{\partial} \subset Z(D)$. По теореме о прямой сумме, $Z(D) = \overline{\operatorname{Im}\overline{\partial}} \oplus (\overline{\operatorname{Im}\overline{\partial}})^{\perp}$, где $(\overline{\operatorname{Im}\overline{\partial}})^{\perp}$ – ортогональное дополнение $(\overline{\operatorname{Im}\overline{\partial}})$ в $Z(D)$. Так как $(\overline{\operatorname{Im}\overline{\partial}})^{\perp} = (\operatorname{Im}\overline{\partial})^{\perp}$, то последнее равенство принимает вид $Z(D) = \overline{\operatorname{Im}\overline{\partial}} \oplus (\operatorname{Im}\overline{\partial})^{\perp}$. Нашей ближайшей целью будет характеризация $(\operatorname{Im}\overline{\partial})^{\perp}$. Пусть $\overline{\partial}^*$ - формально сопряженный оператор для $\overline{\partial}$.

Определение 1. *Пусть $g \in [L^2(D)]^n$ и $\overline{\partial}^* g \in L^2(D)$. Говорят, что нормальная часть $n(g)$ функции g равна нулю на ∂D, если*

$$(\overline{\partial}^* g, w)_{L^2(D)} - (g, \overline{\partial} w)_{[L^2(D)]^n} = 0 \textit{ для всех } w \in C^{\infty}(\overline{D}).$$

Пусть теперь D – ограниченная область с гладкой границей ∂D, а $\rho \in C^1$ – какая-нибудь определяющая функция области D, т.е. $|\nabla\rho| \neq 0$ в некоторой окрестности ∂D и $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ множества $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < -\varepsilon\}$ являются относительно компактными подобластями в D с гладкими границами.

Лемма 1. *Пусть граница области D гладкая, а компоненты векторов g, $\overline{\partial}_1 g$ и $\overline{\partial}^* g$ принадлежат $L^2(D)$. Тогда $n(g) = 0$ на ∂D в том и только в том случае, когда $\sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho}{\partial z_j} g_j = 0$ в смысле слабых предельных значений на ∂D, т.е.*

$$\lim_{\varepsilon\to -0} \int_{\partial D_\varepsilon} \phi(z) \sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho}{\partial z_j} g_j(z) ds_\varepsilon(z) = 0 \text{ для всех } \phi \in C^\infty(\overline{D}).$$

Доказательство. Проверим выполнение определения 1. С этой целью воспользуемся непрерывностью интеграла Лебега относительно множества интегрирования:

$$(\overline{\partial}^* g, w)_{L^2(D)} - (g, \overline{\partial} w)_{[L^2(D)]^n} = -\lim_{\varepsilon\to -0} \int_{D_\varepsilon} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} (g_j \overline{w}) \frac{d\overline{z} \wedge dz}{(2\sqrt{-1})^n}$$

для всех $w \in C^\infty(\overline{D})$. Из условия леммы вытекает, что $g \in H^1_{loc}(D)$. Поэтому g имеет след на ∂D_ε и мы можем применить формулу Стокса

$$\int_{D_\varepsilon} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} (g_j(z)\overline{w}(z))\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\partial D_\varepsilon} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j-1} g_j(z)\overline{w}(z) dz[j] \wedge d\overline{z}.$$

Вспоминая, что $dz[j] \wedge d\overline{z} = (2\sqrt{-1})^n (-1)^{n+j-1} \frac{\frac{\partial\rho}{\partial z_j}}{|\nabla\rho|} ds_\varepsilon(z)$ (см., например, [5, лемма 3.5]), получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to -0} \int_{\partial D_\varepsilon} \phi(z) \sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho}{\partial z_j} g_j(z) ds_\varepsilon(z) = 0 \text{ для всех } \phi \in C^\infty(\overline{D})$$

тогда и только тогда, когда $n(g) = 0$ на ∂D, т.е. требуемый результат. □

Пусть $\mathcal{H}^1(D)$ состоит из тех векторов $g \in [L^2(D)]^n$, для которых $\overline{\partial}_1 g = 0$ в D, $\overline{\partial}^* g = 0$ в D (в смысле распределений) и $n(g) = 0$ на ∂D. Традиционно $\mathcal{H}^1(D)$ называется гармоническим пространством комплекса Дольбо в степени 1 (см., например, [1]).

Лемма 2. $(Im\,\overline{\partial})^\perp = \mathcal{H}^1(D)$.

Доказательство. Зафиксируем $g \in (\mathrm{Im}\,\overline{\partial})^\perp$. По определению, $\overline{\partial}_1 g = 0$ в смысле распределений в D. Так как $C_0^\infty(D) \subset D(\overline{\partial})$, то для всех $w \in C_0^\infty(D)$ мы имеем $(\overline{\partial} w, g)_{[L^2(D)]^n} = 0$, т.е. $\overline{\partial}^* g = 0$ в смысле распределений в D. В силу эллиптичности комплекса Дольбо, мы можем заключить, что компоненты вектора g являются вещественно аналитическими функциями(см, например, [7]). Поэтому равенства $\overline{\partial}_1 g = 0$ и $\overline{\partial}^* g = 0$ справедливы в области D поточечно.

С другой стороны, поскольку $C^\infty(\overline{D}) \subset D(\overline{\partial})$, то для всех $w \in C^\infty(\overline{D})$

$$(\overline{\partial}^* g, w)_{L^2(D)} - (g, \overline{\partial} w)_{[L^2(D)]^n} = -(\overline{\partial} w, g)_{[L^2(D)]^n} = 0,$$

а значит, $n(g) = 0$ для $g \in (\mathrm{Im}\overline{\partial})^\perp$. Итак, мы доказали, что $(\mathrm{Im}\,\overline{\partial})^\perp \subset \mathcal{H}^1(D)$.

Обратно, пусть теперь $g \in \mathcal{H}^1(D)$, $u \in D(\overline{\partial})$ произвольны. Так как пространство $C^\infty(\overline{D})$ плотно в $H^1(D)$, то существует последовательность $\{u_N\}_{N=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{D})$ такая, что $\{u_N\}$ сходится к u в $L^2(D)$ и $\{\overline{\partial} u_N\}$ сходится к $\overline{\partial} u$ в $[L^2(D)]^n$.

Поэтому, так как $n(g) = 0$ на ∂D и $\overline{\partial}^* g = 0$ в D,

$$(g, \overline{\partial} u)_{[L^2(D)]^n} = \lim_{N\to\infty} (g, \overline{\partial} u_N)_{[L^2(D)]^n} = -\lim_{N\to\infty} (\overline{\partial}^* g, u_N)_{L^2(D)} = 0.$$

Лемма доказана. □

Далее, для $f \in [C(\overline{D})]^n$ обозначим через T следующий интеграл

$$Tf = \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_D \sum_{j=1}^n f_j(\zeta) \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta. \tag{4}$$

Как известно (см., например, [5]), интеграл (4) определяет непрерывный линейный оператор

$$T : \left[L^2(D)\right]^n \longrightarrow H^1(D).$$

Лемма 3. *Пусть $f \in \left[L^2(D)\right]^n$. Тогда $\overline{\partial}^*\overline{\partial}Tf = \overline{\partial}^* f$ в смысле распределений в D.*

Доказательство. Следуя [5], представим Tf в следующем виде:

$$Tf(z) = -4\int_D \sum_{j=1}^n f_j(\zeta)\frac{\partial g}{\partial z_j}(\zeta - z)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{(2\sqrt{-1})^n}, \tag{5}$$

где $g(\zeta - z) = \frac{|\zeta - z|^{-2n}}{(2-2n)\sigma_{2n}}$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 1$ (здесь σ_{2n} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{2n}$).

Для произвольной функции f из $[C_0^\infty(D)]^n$ представление (5) приводит к выражению

$$Tf(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\int_D f_j(\zeta)g(\zeta - z)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{(2\sqrt{-1})^n}.$$

Теперь, учитывая, что $\Delta u = -4\overline{\partial}^*\overline{\partial}$, и интегрируя по частям, для всех $w \in C_0^\infty(D)$ мы имеем

$$(Tf, \overline{\partial}^*\overline{\partial}w)_{L^2(D)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\int_D f_j(\zeta)g(\zeta - z)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{(2\sqrt{-1})^n}, \Delta w\right)_{L^2(D)} =$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_D f_j(\zeta)g(\zeta - z)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{(2\sqrt{-1})^n}, \Delta\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}w\right)_{L^2(D)}.$$

Так как $g(\zeta - z)$- фундаментальное решение оператора Лапласа, то

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_D f_j(\zeta)g(\zeta - z)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{(2\sqrt{-1})^n}, \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}_j}\right)\right)_{L^2(D)} = \sum_{j=1}^n \left(f_j, \frac{\partial w}{\partial \overline{z}_j}\right)_{L^2(D)} = (f, \overline{\partial}w)_{[L^2(D)]^n}.$$

Итак,

$$(\overline{\partial}Tf - f, \overline{\partial}w)_{[L^2(D)]^n} = (\overline{\partial}Tf, \overline{\partial}w)_{[L^2(D)]^n} - (f, \overline{\partial}w)_{[L^2(D)]^n} =$$

$$(Tf, \overline{\partial}^*\overline{\partial}w)_{L^2(D)} - (f, \overline{\partial}w)_{[L^2(D)]^n} = 0,$$

т.е. $\overline{\partial}^*\overline{\partial}Tf = \overline{\partial}^* f$ в смысле распределений в D для всех $f \in [C_0^\infty(D)]^n$.

Наконец, поскольку $C_0^\infty(D)$ плотно в $L^2(D)$, а оператор $T : [L^2(D)]^n \to H^1(D)$ непрерывен, то $\overline{\partial}^*\overline{\partial}Tf = \overline{\partial}^* f$ для всех f из $[L^2(D)]^n$. □

Обозначим через $\mathfrak{Z}(D)$ пространство n-векторных обобщенных функций, удовлетворяющих уравнениям $\overline{\partial}_1 f = 0$ и $\overline{\partial}^* f = 0$ в области D, а через $h(D)$ пространство всех гармонических в области D функций. Как мы уже отмечали, в силу эллиптичности комплекса Дольбо, элементы $\mathfrak{Z}(D)$ на самом деле вещественно аналитичны в D (см., например, [7]). Поскольку $f = (f - \overline{\partial}Tf) + \overline{\partial}Tf$, а $Tf \in H^1(D) \subset D(\overline{\partial})$, то леммы 2 и 3 позволяют рассмотреть вместо задачи 1 следующую (эквивалентную ей) задачу.

Задача 2. *Пусть $f \in [L^2(D)]^n \cap \mathfrak{Z}(D)$ ортогональна $\mathcal{H}^1(D)$. Найти решение уравнения (1) в классе $D(\overline{\partial}) \cap h(D)$.*

2. $\overline{\partial}$-задача в шаровом слое

Обозначим через B_R шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле радиуса $R > 0$ и рассмотрим ситуацию, когда $D = B_R \setminus \overline{B}_r$ – шаровой слой в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 1. *Пусть D – шаровой слой в $\mathbb{C}^n$. Задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: 1) $\overline{\partial}_1 f = 0$; 2) $f \perp \mathcal{H}^1(D)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача 1 разрешима и u - ее решение. Тогда $\overline{\partial}_1 f = \overline{\partial}_1 \circ \overline{\partial}u = 0$ и, по лемме 2, $\overline{\partial}u = f$ ортогонален $\mathcal{H}^1(D)$, т.е. условия 1), 2) выполнены.

Достаточность. Как мы видели выше, задачи 1 и 2 эквивалентны. Исследуем разрешимость задачи 2. С этой целью зафиксируем вектор $f \in \mathfrak{Z}(D) \cap [L^2(D)]^n$, ортогональный $\mathcal{H}^1(D)$, и найдем для него решение задачи 2.

Поскольку всякая гармоническая функция в шаровом слое в $\mathbb{R}^n$ разлагается в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям (см., например, [8]), то мы будем искать решение $u \in D(\overline{\partial}) \cap h(D)$ задачи в виде ряда

$$u(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} c_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} k_\nu^{(i)} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}},$$

где $\{h_\nu^{(i)}\}$ – система однородных гармонических многочленов, образующих ортонормированный базис в $L^2(\partial B_1)$ (здесь ν – степень однородности, а $J(\nu) = \frac{(2n+2\nu-2)(2n+\nu-3)!}{\nu!(2n-2)!}$ – количество линейно независимых многочленов степени ν в этом базисе), а $c_\nu^{(i)}$, $k_\nu^{(i)}$ – неизвестные коэффициенты.

В качестве функции ρ возьмем

$$\rho(z) = \begin{cases} |z|^2 - R^2 & \text{в окрестности } \partial B_R, \\ r^2 - |z|^2 & \text{в окрестности } \partial B_r. \end{cases}$$

Тогда $\frac{\partial \rho}{\partial z_j} = \overline{z}_j$ на ∂B_R и $\frac{\partial \rho}{\partial z_j} = -\overline{z}_j$ на ∂B_r.

Лемма 4. *Функция $\sum_{j=1}^n \overline{z}_j p_j$ гармонична в D, если $p \in \mathfrak{Z}(D)$.*

Доказательство. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_i \partial z_i}\left(\sum_{j=1}^n \overline{z}_j p_j\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}\left(\sum_{j=1}^n \overline{z}_j \frac{\partial p_j}{\partial z_i}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \overline{z}_j \left(\frac{\partial^2 p_j}{\partial \overline{z}_i \partial z_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial z_i}\right) =$$

$$-\overline{\partial}^* p + \sum_{j=1}^n \overline{z}_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_j}{\partial \overline{z}_i \partial z_i} = -\overline{\partial}^* p + \sum_{j=1}^n \overline{z}_j \Delta p_j = 0.$$

□

Разложим гармоническую в D функцию $\tilde{n}(f) = \sum_{j=1}^n \overline{z}_j f_j$ в ряд Лорана в D по однородным гармоническим многочленам:

$$\tilde{n}(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} a_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} b_\nu^{(i)} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}, \tag{6}$$

где ряды сходятся абсолютно вместе со всеми частными производными равномерно на компактах в D, а коэффициенты $a_\nu^{(i)}$, $b_\nu^{(i)}$ определены однозначно (см. [8]). Как хорошо известно (см. [5]), в качестве системы однородных многочленов можно всегда взять функции вида

$$h_{s_i,t_i}^{(i)}(z) = \sum_{|\alpha|=s_i}\sum_{|\beta|=t_i} d_{\alpha\beta}^{(i)} z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}\overline{z}_1^{\beta_1}...\overline{z}_n^{\beta_n} \tag{7}$$

с некоторыми кэффициентами $d_{\alpha\beta}^{(i)}$. Тогда $\nu = s_i + t_i$ и

$$\sum_{j=1}^n \overline{z}_j \frac{\partial h_{s_i,t_i}^{(i)}}{\partial \overline{z}_j} = \sum_{j=1}^n \beta_j h_{s_i,t_i}^{(i)}(z) = t_i h_{s_i,t_i}^{(i)}(z), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^n \overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\left(\frac{\overline{h_{s_i,t_i}^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \overline{h_\nu^{(i)}(z)} - \overline{h_{s_i,t_i}^{(i)}(z)}(n+\nu-1)}{|z|^{2n+2\nu-2}} = \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}(s_i - n(n+\nu-1)). \tag{9}$$

Если u - решение уравнения $\overline{\partial} u = f$ в D, то $f - \overline{\partial} u = 0$ в D, а значит,

$$\tilde{n}(f - \overline{\partial} u) = \sum_{j=1}^n \overline{z}_j \left(f_j(z) - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}(z)\right) = 0 \text{ в } D.$$

Учитывая равенства (6), (8), (9), получаем, что функция

$$\tilde{n}(f - \overline{\partial} u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} (a_\nu^{(i)} - t_i c_\nu^{(i)}) h_\nu^{(i)} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} \left(b_\nu^{(i)} - k_\nu^{(i)}(s_i - n(n+\nu-1))\right) \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}$$

равна нулю в D.

Поскольку коэффициенты разложения в ряд Лорана определяются однозначно (см. [8]), то

$$a_\nu^{(i)} = c_\nu^{(i)} t_i, \qquad b_\nu^{(i)} = k_\nu^{(i)}(s_i - n(n+\nu-1)).$$

При $n \geq 2$, очевидно, $0 \leq s_i \leq \nu < n(n-1) + n\nu$. Значит, $s_i - n(n+\nu-1) < 0$ и

$$c_\nu^{(i)} = \frac{a_\nu^{(i)}}{t_i}, t_i \neq 0, \qquad k_\nu^{(i)} = \frac{b_\nu^{(i)}}{s_i - n(n+\nu-1)}.$$

Многочлены $h_\nu^{(i)}(z)$, для которых $t_i = 0$, являются голоморфными, так как не содержат $\overline{z}$. Понятно, что решение u уравнения (1) находится с точностью до голоморфного слагаемого. Поэтому мы не будем учитывать слагаемые $c_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z)$, для которых $t_i = 0$, и докажем, что ряд

$$u(z) = \sum_{t_i \neq 0} \frac{a_\nu^{(i)}}{t_i} h_\nu^{(i)}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{b_\nu^{(i)}}{(s_i - n(n+\nu-1))} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}} \tag{10}$$

сходится в $D(\overline{\partial})$ и служит решением уравнения $\overline{\partial} u = f$ в D.

Лемма 5. *Если $g \in L^2(D) \cap h(D)$, то правильная и главная части разложения Лорана функции g сходятся в $L^2(D)$.*

Доказательство. Обозначим через

$$G_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \tilde{a}_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z), \quad G_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \tilde{b}_\nu^{(i)} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}},$$

соответственно, правильную и главную части ряда Лорана для g. Как известно, ряд G_1 сходится в $H^1_{loc}(B_R)$, а ряд G_2 - в $H^1_{loc}(\mathbb{C}^n \setminus \overline{B}_r)$ (см., например, [8]).

Так как $g \in L^2(D)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$G_2 = (g - G_1) \in L^2(B_{R-\varepsilon} \setminus \overline{B_r}), \quad G_1 = (g - G_2) \in L^2(B_R \setminus \overline{B_{r+\varepsilon}}).$$

Отсюда, в частности, следует, что G_2 принадлежит $L^2(B_R \setminus \overline{B_{r+\varepsilon}})$, а G_1 - $L^2(B_{R-\varepsilon} \setminus \overline{B_r})$.

Теперь мы можем заключить, что $G_1 \in L^2(B_R)$, $G_2 \in L^2(B_R \setminus \overline{B_r})$.

Поскольку система однородных многочленов $\left\{h_\nu^{(i)}(z)\right\}$ является ортогональной в $L^2(B_{R-\varepsilon}) \cap h(D)$ для всех $\varepsilon > 0$, а ряд G_1 сходится в $L^2_{loc}(B_R)$, то $\tilde{a}_\nu^i$ суть коэффициенты Фурье функции G_1 по ортогональной системе $\left\{h_\nu^{(i)}(z)\right\}$ в $L^2(B_{R-\varepsilon}) \cap h(D)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Согласно неравенству Бесселя

$$\sum_{\nu=0}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} |\tilde{a}_\nu^{(i)}|^2 \|h_\nu^{(i)}\|^2_{L^2(B_{R-\varepsilon})} \leq \|G_1\|^2_{L^2(B_{R-\varepsilon})}$$

для всех $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Перейдя в данном неравенстве к пределу относительно $\varepsilon \to +0$, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} |\tilde{a}_\nu^{(i)}|^2 \|h_\nu^{(i)}\|^2_{L^2(B_R)} \leq \|G_1\|^2_{L^2(B_R)}$$

для всех $N \in \mathbb{N}$. Наконец, применяя теорему Рисса-Фишера, заключаем, что ряд G_1 сходится в $L^2(D)$.

Для ряда G_2 доказательство проводится аналогично. □

Продолжим доказательство теоремы. Пусть теперь F_1 и F_2 - правильная и главная части разложения Лорана функции $\tilde{n}(f)$.

Так как каждая из систем $\left\{h_\nu^{(i)}(z)\right\}$ и $\left\{\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right\}$ортогональна в $L^2(D)$, то по неравенству Бесселя мы имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \left\|h_\nu^{(i)}\right\|^2_{L^2(D)} |a_\nu^{(i)}|^2 \leq \|F_1\|^2_{L^2(D)} < \infty, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} |b_\nu^{(i)}|^2 \left\| \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right\|^2_{L^2(D)} \leq \|F_2\|^2_{L^2(D)} < \infty.$$

Поскольку $t_i \geq 1$ и $s_i - n(n+\nu-1) \leq -(\nu+n)(n-1) \leq -(\nu+2) \leq -2$, то по признаку Вейерштрасса сходятся следующие числовые ряды:

$$\sum_{t_i \neq 0} \frac{\left\|h_\nu^{(i)}\right\|^2_{L^2(D)} |a_\nu^{(i)}|^2}{|t_i|^2}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{|b_\nu^{(i)}|^2}{|s_i - n(n+\nu-1)|^2} \left\| \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right\|^2_{L^2(D)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса-Фишера ряды

$$\sum_{t_i \neq 0} \frac{a_\nu^{(i)}}{t_i} h_\nu^{(i)}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{b_\nu^{(i)}}{(s_i - n(n+\nu-1))} \frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}$$

сходятся в $L^2(D)$.

Таким образом, формальный ряд $u(z)$, определенный равенством (10), сходится в $L^2(D)$ как сумма двух сходящихся рядов.

Покажем теперь, что

$$f(z) = \sum_{t_i \neq 0} \frac{a_\nu^{(i)}}{t_i} \overline{\partial} h_\nu^{(i)}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{b_\nu^{(i)}}{s_i - n(n+\nu-1)} \overline{\partial} \left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right). \tag{11}$$

С этой целью разложим f в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям в D:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_\nu(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}$$

(здесь H_ν, $\tilde{H}_\nu$ – n-векторы, соответственно состоящие из гармонических многочленов $H_{\nu,j}$ и $\tilde{H}_{\nu,j}$ степени ν). По лемме 5, ее правильная и главная части разложения Лорана сходятся в $[L^2(D)]^n$.

Поскольку $f \in \mathfrak{Z}(D)$, то

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\partial}_1 H_\nu(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\partial}_1 \left(\frac{\tilde{H}_\nu(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right) = 0 \text{ в } D, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\partial}^* H_\nu(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\partial}^* \left(\frac{\tilde{H}_\nu(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right) = 0 \text{ в } D. \tag{12}$$

Ясно, что $\overline{\partial}_1 H_\nu$, $\overline{\partial}^* H_\nu$, $\overline{\partial}_1 \left(\frac{\tilde{H}_\nu(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right)$, $\overline{\partial}^* \left(\frac{\tilde{H}_\nu(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}} \right)$ - однородные гармонические функции в D. Поэтому разложения (12) суть разложения Лорана для нулевой функции, а значит вектора H_ν и $\frac{\tilde{H}_\nu(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}$ принадлежат $\mathfrak{Z}(D)$. В частности, это означает, что правильная и главная части $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ разложения Лорана для f принадлежат $\mathfrak{Z}(D)$. Кроме того, лемма 4 гарантирует нам, что функции $\sum_{j=1}^n \overline{z}_j H_{\nu,j}$, $\sum_{j=1}^n \overline{z}_j \frac{\tilde{H}_{\nu,j}}{|z|^{2n+2\nu-2}}$ - гармонические и однородные.

Так как в главной части $\tilde{F}_2$ ряда Лорана для f слагаемые являются однородными степени $2-2n-\nu \leq -2$, то $\tilde{n}(\tilde{F}_2) = F_2$, а значит $\tilde{n}(\tilde{F}_1) = F_1$. Поскольку система многочленов $\left\{ \frac{h_\nu^{(i)}}{\left\|h_\nu^{(i)}\right\|_{L^2(B_R)}} \right\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(B_R) \cap h(B_R)$, то $a_\nu^{(i)} \left\|h_\nu^{(i)}\right\|_{L^2(B_R)}$ суть коэффициенты Фурье функции F_1 по этому базису.

Теперь ясно, что

$$\left(F_1, h_\nu^{(i)}\right)_{L^2(B_R)} = \left(\tilde{n}(\tilde{F}_1), h_\nu^{(i)}\right)_{L^2(B_R)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^R d\gamma \int_{|z|=\gamma} \overline{z}_j (\tilde{F}_1)_j \overline{h_\nu^{(i)}} dS_\gamma,$$

где $(\tilde{F}_1)_j$ суть j-я компонента вектора $\tilde{F}_1$. Так как $\overline{\partial}^* \tilde{F}_1 = 0$, то, применяя формулу Стокса и [5, лемма 3.5], получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{|z|=\gamma} \overline{z}_j (\tilde{F}_1)_j \overline{h_\nu^{(i)}} dS_\gamma = \sum_{j=1}^{n} \int_{|z|=\gamma} (2\sqrt{-1})^{-n} (-1)^{n+j-1} (\tilde{F}_1)_j \overline{h_\nu^{(i)}} dz[j] \wedge d\overline{z} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{B_\gamma} \frac{\partial}{\partial z_j} \left((\tilde{F}_1)_j \overline{h_\nu^{(i)}} \right) \frac{d\overline{z} \wedge dz}{(2\sqrt{-1})^n} = (\tilde{F}_1, \overline{\partial} h_\nu^{(i)})_{[L^2(B_\gamma)]^n} - (\overline{\partial}^* \tilde{F}_1, h_\nu^{(i)})_{L^2(B_\gamma)} = 0,$$

если $h_\nu^{(i)}$ голоморфный многочлен. Отсюда следует, что $\left(F_1, h_\nu^{(i)}\right)_{L^2(B_R)} = 0$ (т.е. и коэффициенты $a_\nu^{(i)}$ в разложении (6) равны нулю), если $t_i = 0$. В частности, $a_0 = 0$.

Теперь из (6) следует, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j H_{\nu,j}(z) - \sum_{t_i\neq 0} a_{\nu+1}^{(i)} h_{\nu+1}^{(i)}(z)\right) + \tilde{n}\left(\frac{\tilde{H}_0}{|z|^{2n-2}}\right) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j\frac{\tilde{H}_{\nu+1,j}(z)}{|z|^{2n+2\nu}} - \sum_{i=1}^{J(\nu)} b_\nu^{(i)}\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right) = 0 \text{ в } D.$$

Последнее есть не что иное, как разложение нуля в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям. Поэтому в D справедливы равенства: $\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j\frac{\tilde{H}_0}{|z|^{2n-2}} = 0$ и

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j H_{\nu,j}(z) - \sum_{t_i\neq 0} a_{\nu+1}^{(i)} h_{\nu+1}^{(i)}(z) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j\frac{\tilde{H}_{\nu+1,j}(z)}{|z|^{2n+2\nu}} - \sum_{i=1}^{J(\nu)} b_\nu^{(i)}\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}} = 0 \text{ для всех } \nu\in\mathbb{Z}_+.$$

Линейная независимость системы мономов $\{\overline{z}_j\}$ дает нам основание заключить, что $\tilde{H}_0 = 0$. Более того, вспоминая соотношения (8), (9), получаем для всех $\nu\in\mathbb{Z}_+$

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j\left(H_{\nu,j}(z) - \sum_{t_i\neq 0}\frac{a_{\nu+1}^{(i)}}{t_i}\frac{\partial h_{\nu+1}^{(i)}(z)}{\partial\overline{z}_j}\right) = 0 \text{ в } D,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_j\left(\frac{\tilde{H}_{\nu+1,j}(z)}{|z|^{2n+2\nu}} - \sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{b_\nu^{(i)}}{s_i - n(n+\nu-1)}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right)\right) = 0 \text{ в } D$$

и даже в $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ поскольку все эти функции гармоничны в $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$. В частности, мы доказали, что $n\left(H_\nu - \sum_{t_i\neq 0}\frac{a_{\nu+1}^{(i)}}{t_i}\overline{\partial} h_{\nu+1}^{(i)}(z)\right) = 0$ на ∂D, а также $n\left(\frac{\tilde{H}_{\nu+1}(z)}{|z|^{2n+2\nu}} - \sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{b_\nu^{(i)}}{s_i - n(n+\nu-1)}\overline{\partial}\left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right)\right) = 0$ на ∂D. Так как H_ν, $\tilde{H}_{\nu+1}$ принадлежат $\mathfrak{Z}(D)$, а многочлены $h_\nu^{(i)}$ гармонические, то выражения, стоящие в скобках, также принадлежат $\mathfrak{Z}(D)$ для всех $\nu\in\mathbb{Z}_+$. Значит,

$$\gamma_\nu = H_\nu(z) - \sum_{t_i\neq 0}\frac{a_{\nu+1}^{(i)}}{t_i}\overline{\partial} h_{\nu+1}^{(i)}(z), \quad \delta_\nu = \frac{\tilde{H}_{\nu+1}(z)}{|z|^{2n+2\nu}} - \sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{b_\nu^{(i)}}{s_i - n(n+\nu-1)}\overline{\partial}\left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right)$$

есть однородные гармонические функции, принадлежащие гармоническому пространству $\mathcal{H}^1(D)$. Подставляя H_ν и $\tilde{H}_\nu$ в разложение для f, имеем

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{t_i\neq 0}\frac{a_\nu^{(i)}}{t_i}\overline{\partial} h_\nu^{(i)}(z) + \gamma_\nu\right) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{b_\nu^{(i)}}{s_i - n(n+\nu-1)}\overline{\partial}\left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}(z)}}{|z|^{2n+2\nu-2}}\right) + \delta_\nu\right). \tag{13}$$

По лемме 2 функции $\overline{\partial} h_\nu^{(i)}$и $\overline{\partial}\left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}}{|z|^{2\nu+2n-2}}\right)$ ортогональны $\mathcal{H}^1(D)$. Кроме того, как хорошо известно, каждая из систем $\{\overline{\partial} h_\nu^{(i)}\}$ и $\{\overline{\partial}\left(\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}}{|z|^{2\nu+2n-2}}\right)\}$ ортогональна в $[L^2(D)]^n$. Поэтому, лемма 5, неравенство Бесселя и теорема Рисса-Фишера позволяют заключить, что ряды $\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu$ сходятся в $[L^2(D)]^n$ и принадлежат $\mathcal{H}^1(D)$.

Наконец, домножая равенство (13) скалярно в $[L^2(D)]^n$ на $\hat{f} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\gamma_\nu + \delta_\nu)$, получаем $(f, \hat{f})_{[L^2(D)]^n} = (\hat{f}, \hat{f})_{[L^2(D)]^n} = 0$, т.е. $\hat{f} = 0$ в D. Таким образом, мы можем заключить, что (11) верно. Сравнивая разложения (11) и (10), делаем вывод, что $\overline{\partial} u = f$ в D. Кроме того, по доказанному выше, частичные суммы ряда (10) принадлежат $C^\infty(\overline{D})$ и сходятся в $D(\overline{\partial})$ к u.

□

Замечание 1. *На самом деле, легко убедиться, что для всякой формы $f\in\mathfrak{Z}(D)$, ортогональной $\mathcal{H}^1(D)$, решение u задачи 2, построенное в теореме 1, лежит в классе Харди $Har^2(D)$ гармонических функций. Обозначим для $u\in D(\overline{\partial})\cap h(D)$ через u_1 и u_2 ее правильную и главную части разложения Лорана. Согласно доказательству теоремы 1 и лемме 5, $u_1, u_2\in L^2(D)$, $\overline{\partial} u_1, \overline{\partial} u_2\in[L^2(D)]^n$. Интегрируя по частям с использованием разложения (10), получим:*

$$\infty > \|\overline{\partial} u_1\|^2_{[L^2(D)]^n} = \lim_{\varepsilon\to+0}\|\overline{\partial} u_1\|^2_{[L^2(D_\varepsilon)]^n} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\sum_{t_i\neq 0}\frac{a_\nu^{(i)}}{t_i}\overline{\partial} h_\nu^{(i)}(z)\right\|^2_{[L^2(D_\varepsilon)]^n} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{t_i\neq 0}\left|\frac{a_\nu^{(i)}}{t_i}\right|^2\|\overline{\partial}h_\nu^{(i)}(z)\|^2_{[L^2(D_\varepsilon)]^n}=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{t_i\neq 0}\left|\frac{a_\nu^{(i)}}{t_i}\right|^2 t_i\|h_\nu^{(i)}(z)\|^2_{L^2(\partial D_\varepsilon)}\geq$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{t_i\neq 0}\left|\frac{a_\nu^{(i)}}{t_i}\right|^2\|h_\nu^{(i)}(z)\|^2_{L^2(\partial D_\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_1\|^2_{L^2(\partial D_\varepsilon)}=\|u_1\|^2_{Har^2(D)}.$$

Аналогично доказывается, что $u_2\in Har^2(D)$. Наконец, это означает, что $u\in h(D)$ имеет конечный порядок роста вблизи ∂D, а слабые предельные значения u на ∂D принадлежат $L^2(D)$. В частности, u лежит в пространстве Соболева $H^{1/2}(D)$ (см., например, [9]).

Итак, согласно теореме 1 для получения полной информации о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения в шаровом слое необходимо исследовать гармоническое пространство $\mathcal{H}^1(D)$.

Теорема 2. *Пусть $D=B_R\setminus\overline{B}_r$- шаровой слой в $\mathbb{C}^2$. Тогда гармоническое пространство $\mathcal{H}^1(D)$ бесконечномерно и дифференциальные формы вида*

$$\frac{-\overline{z}_2d\overline{z}_1+\overline{z}_1d\overline{z}_2}{|z|^2}\frac{\overline{z}^\beta}{|z|^{2|\beta|+2}},\ \beta\in\mathbb{Z}^2_+ \tag{14}$$

образуют в нем ортогональный базис.

Доказательство. Легко проверить, что дифференциальные формы вида (14) являются элементами $\mathcal{H}^1(D)$ и попарно ортогональны в $[L^2(D)]^n$, если их трактовать как вектор-столбцы.

Обратно, зафиксируем какой-нибудь элемент $g\in\mathcal{H}^1(D)$ и рассмотрим функции $\phi(z)=\overline{z}_1g_1+\overline{z}_2g_2$ и $\psi(z)=z_1g_2-z_2g_1$. Как мы видели выше (см. лемму 4), ϕ гармонична в D. Аналогичным образом проверяется, что гармонична и функция ψ.

Так как $g\in\mathcal{H}^1(D)$, то $n(g)=0$ на ∂D, поэтому слабые предельные значения функции $\phi(z)$ равны нулю на ∂D, а значит, $\phi(z)\equiv 0$ в D (см., например, [5]). Поэтому, трактуя g как дифференциальную форму, мы получим:

$$g(z)=-\frac{(z_1d\overline{z}_1+z_2d\overline{z}_2)\phi(z)}{|z|^2}+g_1d\overline{z}_1+g_2d\overline{z}_2=-\frac{(z_1d\overline{z}_1+z_2d\overline{z}_2)(\overline{z}_1g_1+\overline{z}_2g_2)}{|z|^2}+\frac{z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2}{|z|^2}\left(g_1d\overline{z}_1+g_2dz_2\right).$$

Отсюда следует, что мы можем записать $g(z)$ в следующем виде:

$$g(z)=\frac{-z_1\overline{z}_2g_2d\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2g_1d\overline{z}_1+z_1\overline{z}_1g_2d\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2g_1d\overline{z}_2}{|z|^2}=\frac{-\overline{z}_2d\overline{z}_1+\overline{z}_1d\overline{z}_2}{|z|^2}\psi(z). \tag{15}$$

Отметим, что при такой записи $n(g)=0$ на ∂D автоматически.

Ясно, что в области D справедливы равенства

$$\overline{\partial}g(z)=-\frac{1}{|z|^2}\left(\overline{z}_1\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}_1}+\overline{z}_2\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}_2}+\psi(z)\right),\quad \overline{\partial}^*g(z)=\frac{1}{|z|^2}\left(\overline{z}_2\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_2}\right).$$

Вспоминая, что $g\in\mathfrak{Z}(D)$, мы имеем:

$$\overline{z}_1\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}_1}+\overline{z}_2\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}_2}+\psi(z)=0 \text{ в } D,\quad \overline{z}_2\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_2}=0 \text{ в } D. \tag{16}$$

Разложим функцию $\psi(z)$ в области D в ряд Лорана

$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}c_\nu^{(i)}h_\nu^{(i)}(z)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{\tilde{c}_\nu^{(i)}h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{(2\nu+2)}}$$

по однородным гармоническим многочленам $\{h_\nu^{(i)}\}$ вида (7). Поскольку этот ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах в D, то, подставляя данное разложение $\psi(z)$ в первое из равенств (16), получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}c_\nu^{(i)}(1+t_i)h_\nu^{(i)}(z)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{\tilde{c}_\nu^{(i)}(t_i-\nu)h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2\nu+2}}=0 \text{ в } D.$$

Известно, что ряд Лорана равен нулю тогда и только тогда, когда его правильная и главная части равны нулю (см. [8]), т.е.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} c_\nu^{(i)}(1+t_i)h_\nu^{(i)}(z)=0 \text{ в } D, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{\tilde{c}_\nu^{(i)}(t_i-\nu)h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2\nu+2}}=0 \text{ в } D.$$

Теперь из ортогональности системы многочленов $\{h_\nu^{(i)}\}$ при интегрировании по любой сфере следует, что $c_\nu^{(i)}(1+t_i)=0$, а значит, $c_\nu^{(i)}=0$ для $\nu\in\mathbb{Z}_+$, $1\le i\le J(\nu)$.

Кроме того из ортогональности системы однородных функций $\{\frac{h_\nu^{(i)}}{|z|^{2\nu+2}}\}$ при интегрировании по любой сфере следует равенство $\tilde{c}_\nu^{(i)}(t_i-\nu)=0$. Поэтому либо $\tilde{c}_\nu^{(i)}=0$, либо $t_i=\nu$, т.е. $s_i=0$.

Поскольку при $t_i=\nu$ в качестве $h_\nu^{(i)}$ всегда можно выбирать функции вида $\overline{z}_1^{\beta_1}\overline{z}_2^{\beta 2}$, $|\beta|=\nu$, то, учитывая полученные ограничения на коэффициенты разложения $\psi(z)$, заключаем, что

$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{|\beta|=\nu}\frac{k_\nu\overline{z}_1^{\beta_1}\overline{z}_2^{\beta 2}}{|z|^{2\nu+2}} \text{ в } D.$$

Наконец, равенство (15), позволяет нам сказать, что теорема доказана. □

Отметим, что подобным образом доказывается тривиальность $\mathcal{H}^1(D)$ для $n\ge 3$.

Список литературы

[1] Hörmander L. *L^2-estimates and existense theorems for the $\overline{\partial}$ operator* / L.Hörmander // Acta Math. – 1965. – V.113. – N 1-2. – P.89-152.

[2] Kohn J.J. *Subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neuman problem on psevdoconvex domains: sufficient conditions* / J.J.Kohn // Acta Math. – 1979. – V.142. – N 1-2. – P.79-122.

[3] Хенкин Г.М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики(фундаментальные направления)/ Г.М.Хенкин. – М.:ВИНИТИ, 1985. – Т. 7. – С. 23-124.

[4] Range R.M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables* / R.M.Range // Graduate Texts in Mathematics, 108. – Springer-Verlag, New York, 1986.

[5] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения* / А.М.Кытманов. – Новосибирск: Наука, 1992. – 240 с.

[6] Kerzman N. *Hölder and L^p-estimates for solutions of $\overline{\partial}u=f$* / N.Kerzman //Comm. Pure and Appl. Math. – 1971. – V.24. – N 3. – P.301-379.

[7] Тарханов Н.Н. *Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов* / Н.Н.Тарханов. – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.

[8] Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем* / Н.Н.Тарханов. – Новосибирск: Наука, 1991.– 318 с.

[9] Егоров Ю.В. *Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории* / Ю.В.Егоров, М.А.Шубин // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления). – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 30. – 264 с.

ON SOLVABILITY CONDITIONS FOR THE CAUCHY-RIEMANN SYSTEM IN A SPHERICAL SHELL

I.V.Shestakov, A.A.Shlapunov

Let D is a spherical shell in $\mathbb{C}^n$, f is a differential form of type $(0,1)$ with coefficients from the Lebesque class $L^2(D)$. In the article we described necessary and sufficient conditions of $L^2(D)$–solvability of equation $\overline{\partial}u=f$, where $\overline{\partial}$ is multidimentional Cauchy-Riemann system. More exactly we proved that if f is a $\overline{\partial}$–closed form in a sence of distributions in D then $\overline{\partial}$–equation is solvable if and only if f is orthogonal to harmonical space $\mathcal{H}^1(D)$ of Dolbeault complex. Like in a ball if the $\overline{\partial}$–equation is solvable in $L^2(D)$ in the spherical shell D then it is solvable in the Sobolev space $H^{\frac{1}{2}}(D)$. Besides for n=2 we prove that the space $\mathcal{H}^1(D)$ has infinite dimention and we construct an $L^2(D)$-orthogonal basis in it.