

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УДК 519.248 [33+301+159.9]

МЕТОД ДВУДОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ СОБЫТИЙ В ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.В.Баранова*

В работе предлагается метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе социально-экономических систем и рассматривается его применение к решению одной из задач эвентологического системного анализа — задаче нахождения экстремального элемента системы.

Во многих областях современной научной и практической деятельности при проведении различных исследований возникает необходимость решения задач анализа случайных событий в статистических системах. Основная трудность при проведении анализа реальных статистических систем состоит в том, что из-за большого числа событий в них число всех возможных состояний, в которых может оказаться система, очень велико. Особенно остро стоит эта проблема в тех прикладных областях, которые связаны с анализом социальных, экономических и природных систем. К числу таких областей науки относятся медицина, экология, биология, математическая экономика, финансы, страхование, социология, психология, политология, этнология, филология, лингвистика, педагогика, история и др. Вторая трудность анализа социально – экономических систем заключается в том, что некоторые события, характеризующие состояние системы, порождаются множествами.

Часто в качестве математической модели, описывающей состояние статистических социально-экономических систем, предлагается использовать многомерные случайные вектора или случайные точки в многомерном евклидовом пространстве. Целый ряд работ классической теории вероятностей посвящен многомерному статистическому анализу. Многие прикладные задачи хорошо описываются данной моделью, поскольку статистические данные, отображающие поведение систем из их предметной области, могут быть представлены с помощью многомерного вектора случайных величин. Но в некоторых предметных областях статистические системы представимы в виде множеств, не являющихся векторными пространствами. Первоначально в качестве теоретических вероятностных моделей событий, происходящих в таких областях, О.Ю.Воробьевым было предложено использовать случайные конечные абстрактные множества.

Теория случайных конечных абстрактных множеств — это раздел общей теории случайных множеств. Первые монографии, посвященные случайным конечным абстрактным множествам и математическому аппарату данной теории, были опубликованы О.Ю.Воробьевым в 1978, 1984 и 1993 годах [1, 2]. Впоследствии теория случайных конечных абстрактных множеств стала теоретической основой более общей теории случайных событий или *эвентологии*. Основоположителем эвентологии считается О.Ю.Воробьев. Эвентология представляет собой часть теории вероятностей, которая изучает распределения случайных событий и случайных множеств событий, зависимости и взаимодействия случайных событий. Понятие случайного множества событий — центральное в эвентологии — позволяет выявить общие статистические закономерности распределения случайных событий в различных системах. Одной из положительных сторон эвентологической теории служит возможность учета полной структуры зависимостей и взаимодействий систем случайных событий. Наиболее полное представление о современном состоянии эвентологии можно получить из монографий [3–5]. На сегодняшний день в качестве общей модели для многих приложений (в том числе и для статистик, в которых данные представимы в виде множеств) предлагается использовать понятие случайного множества событий. Для исследования систем событий О.Ю.Воробьевым был предложен общий метод эвентологического системного анализа [3], в основе которого лежит рассмотрение объектов и субъектов как систем событий в целостности выявленных в них многообразных типов взаимосвязей событий.

Чаще всего на практике встречается ситуация, когда часть событий, описывающих состояние элементов социально-экономической системы, связана с числовыми данными, а другая часть — с множественными. В работе построена общая эвентологическая модель таких статистик, каждый элемент которой представляется двудольным множеством событий: множеством событий, которое определяется случайными величинами, и множеством событий, которое определяется случайными множествами событий.

На основе математического аппарата эвентологии предлагается метод двудольных множеств событий в эвентологическом системном анализе социально – экономических систем и рассматривается его применение к решению одной из задач эвентологического системного анализа — задаче нахождения экстремального элемента системы.

* © И.В.Баранова, Красноярский государственный университет, 2006. E-mail: irinabar@yandex.ru

1. Двудольное множество случайных элементов

В ситуации, когда состояние каждого элемента социально-экономической системы характеризуется данными, одна часть которых является числовой, а другая — множественной, объект, порождающий данную статистику, может быть представлен как объединение двух долей: случайных величин и случайных множеств событий.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, где $\mathcal{F}$ — алгебра событий, случайные события $x, y, \dots \in \mathcal{F}$ — элементы алгебры $\mathcal{F}$, на которой определена вероятность $\mathbf{P}$. Множество избранных случайных событий $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$.

Случайная величина определяется как измеримое отображение

$$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}),$$

где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathfrak{B}$ — борелевская алгебра подмножеств $\mathbb{R}$.

Случайное множество событий под $\mathfrak{X}$ определяется как измеримое отображение

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}),$$

где $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств множества $\mathfrak{X}$.

Следуя Колмогорову [6], любую случайную величину и любое случайное конечное множество событий можно рассматривать как реализацию случайного элемента, поэтому представим данный объект как двудольное множество случайных элементов.

Первая доля — это случайные величины ξ , вторая — случайные множества событий $\mathbf{K}$. Пусть A — множество индексов случайных величин, B — множество индексов случайных множеств событий. Тогда множество случайных величин $\xi = \{\xi_a, a \in A\}$, а множество случайных множеств событий $\mathbf{K} = \{K_\beta, \beta \in B\}$.

Определение 1. Множество случайных элементов $\{\xi, \mathbf{K}\}$, представимое в виде объединения двух этих долей, будем называть двудольным множеством случайных элементов:

$$\{\xi, \mathbf{K}\} = \xi \cup \mathbf{K} = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}. \quad (1)$$

В [7] приведены практические примеры статистик двудольных множеств. Вот один из примеров подобных статистик — статистика показателей здоровья населения.

Пусть $\{\xi, \mathbf{K}\}$ — множество показателей здоровья населения для каждого района Красноярского края. Здесь $A = \{a, b, c, \dots\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$. Показатели здоровья из первой доли — числовые, они являются случайными величинами. Два последних показателя — множественные, представимы с помощью случайных множеств событий. Область значения каждого показателя ξ_a — числовая прямая $\mathbb{R}$. К числу таких показателей районов относятся климатические (жесткость климата, среднемесячная температура воздуха, скорость ветра и т.д.), экономические (среднемесячные доходы на душу населения, уровень безработицы, прожиточный минимум и т.д.), антропогенные (загрязнения). Показатель K_α — химический состав загрязнения почв района. Значение этого показателя — это событие, означающее, что почва данного района загрязнена определенным множеством химических элементов, являющимся подмножеством всех известных химических элементов $X_\alpha \subseteq \mathfrak{X}_\alpha$. Показатель K_β — множество заболеваний населения. Значение данного показателя — это событие, означающее, что множество заболеваний населения принимает значение определенного подмножества из множества всех известных заболеваний, $X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta$.

Полной характеристикой двудольного множества случайных элементов служит его эвентологическое распределение. Получим выражения отдельно для совместного распределения случайных величин и отдельно — для случайных множеств, а затем вернемся к нахождению эвентологического распределения двудольного множества случайных элементов.

2. Эвентологическое распределение двудольного множества случайных элементов

Рассмотрим и найдем выражения для различных форм эвентологического распределения двудольного множества $\{\xi, \mathbf{K}\}$ для следующих ситуаций:

1. Случайные величины ξ , определяющие первую часть двудольного множества, являются бернуллиевскими случайными величинами — индикаторными функциями, определенными на множестве случайных событий $\mathfrak{X}'$ (введем обозначение $\mathfrak{X}'$ для множества случайных событий, связанных с

первой долей, поскольку множество случайных событий $\mathfrak{X}$ связано со второй частью двудольного множества $\mathbf{K}$ [3]: $\xi = \{\xi_x, x \in \mathfrak{X}'\} = \{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$, где 1_x — индикатор события и равен

$$1_x(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in x, \\ 0 & , \quad \omega \notin x. \end{cases}$$

2. Общий случай, когда доля ξ состоит из произвольных случайных величин.

2.1. Совместное распределение случайных множеств

Для обоих вышеуказанных ситуаций эвентологических распределений двудольных множеств совместное распределение для второй доли определяется одинаково. Найдем эти эвентологические распределения.

Пусть двудольное множество состоит из одной доли $\{\xi, \mathbf{K}\} = \mathbf{K}$. Каждому случайному множеству событий $\{K_\beta, \beta \in B\}$ ставим в соответствие множество случайных событий $\{\mathfrak{X}_\beta, \beta \in B\}$ [3]. Поскольку $\{\mathfrak{X}_\beta, \beta \in B\}$ не пересекаются между собой, то множество всех возможных случайных событий $\mathfrak{X} = \sum_{\beta \in B} \mathfrak{X}_\beta$.

Введем обозначение $\mathbf{X} = \sum_{\beta \in B} X_\beta \subseteq \mathfrak{X}$. Здесь $X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, \beta \in B$. Вероятность совместного распределения случайных множеств будет выглядеть так:

$$p(\mathbf{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{\beta \in B} \text{ter}(X_\beta) \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c \right).$$

Подвероятность совместного распределения случайных множеств

$$p^{\mathbf{X}} = \mathbf{P} \left(\bigcap_{\beta \in B} \text{ter}^{X_\beta} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{\beta \in B} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta^c} x_\beta^c \right) \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c \right).$$

Надвероятность совместного распределения случайных множеств

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbf{P} \left(\bigcap_{\beta \in B} \text{ter}_{X_\beta} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{\beta \in B} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta} x_\beta \right) \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \right).$$

2.2. Связь эвентологических распределений событий и вероятностных распределений множества индикаторов событий

Выше было дано определение индикатора события. Очевидно, что $\mathbf{P}(1_x = 1) = p(x)$, $\mathbf{P}(1_x = 0) = 1 - p(x)$. Функция распределения индикатора по определению равна

$$F(r_x) = \mathbf{P}(\{\omega : 1_x(\omega) \leq r_x\}).$$

Множеству событий $\mathfrak{X}'$ можно поставить в соответствие множество индикаторов событий $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$. Введем обозначение $\mathbf{r} = \{r_x, x \in \mathfrak{X}'\}$. Совместная функция распределения множества индикаторов задается следующим образом:

$$F(\mathbf{r}) = F(r_x, x \in \mathfrak{X}') = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}'} \{\omega : 1_x(\omega) \leq r_x\} \right).$$

Обозначим совместную функцию распределения множества индикаторов $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$ $F(\mathbf{r}) = F(r_x, x \in \mathfrak{X}') = p^{\mathbf{r}}$ по аналогии с подвероятностями пересечений p^X . Распределение $\{p^{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}\}$ будем называть распределением подвероятностей множества индикаторов $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$.

Вероятность событий, индикаторы которых строго равны соответствующим значениям $r_x, x \in \mathfrak{X}'$, обозначим $\mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}'} \{\omega : 1_x(\omega) = r_x\} \right) = p(\mathbf{r})$ по аналогии с вероятностями пересечений $p(X)$. Распределение $\{p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}\}$ будем называть распределением вероятностей множества индикаторов $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$.

Вероятность событий, индикаторы которых больше или равны $r_x, x \in \mathfrak{X}'$, обозначим $\mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}'} \{\omega : 1_x(\omega) \geq r_x\} \right) = p_{\mathbf{r}}$ по аналогии с надвероятностями пересечений p_X . Распределение $\{p_{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}\}$ будем называть распределением надвероятностей множества индикаторов $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$. Справедливы следующие теоремы, показывающие связь между функциями эвентологического распределения множества событий $\mathfrak{X}'$ и соответствующими распределениями множества его индикаторов.

Теорема 1. Функция распределения множества индикаторов событий $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$ и эвентологическое распределение подвероятностей пересечений множества событий $\mathfrak{X}' \{p^X, X \subseteq \mathfrak{X}'\}$ связаны следующими соотношениями:

$$p^{\mathbf{r}} = F(\mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{ll} p^{\{x: r_x \geq 1\}} & , \quad r_x \geq 0, x \in \mathfrak{X}', \\ 0 & , \quad r_x < 0, x \in \mathfrak{X}' \end{array} \right\}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}, \quad (2)$$

$$p^X = F(r^X) = F(1_X(x), x \in \mathfrak{X}'), X \subseteq \mathfrak{X}'. \quad (3)$$

Теорема 2. Распределение вероятностей множества индикаторов $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\} \{p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}\}$ и эвентологическое распределение вероятностей пересечений множества событий $\mathfrak{X}' \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}'\}$ связаны следующими соотношениями:

$$p(\mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{ll} p(\{x: r_x = 1\}) & , \quad r_x = 0, r_x = 1, x \in \mathfrak{X}', \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{array} \right\}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}, \quad (4)$$

$$p(X) = p(r^X) = p(1_X(x), x \in \mathfrak{X}'), X \subseteq \mathfrak{X}'. \quad (5)$$

Теорема 3. Распределение надвероятностей множества индикаторов $\{1_x, x \in \mathfrak{X}'\} \{p\mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}\}$ и эвентологическое распределение надвероятностей пересечений множества событий $\mathfrak{X}' \{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}'\}$ связаны следующими соотношениями:

$$p\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , \quad r_x > 1, x \in \mathfrak{X}', \\ p_{\{x: r_x \geq 0\}} & , \quad r_x \leq 1, x \in \mathfrak{X}'. \end{array} \right\}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}'|}, \quad (6)$$

$$p_X = p_{\{r^X\}} = p_{\{1_X(x), x \in \mathfrak{X}'\}}, X \subseteq \mathfrak{X}'. \quad (7)$$

2.3. Эвентологическое распределение для ситуации с бернуллиевскими случайными величинами

Двудольное множество случайных элементов в этой ситуации представимо в следующем виде: $\{\xi, \mathbf{K}\} = (1_x, x \in \mathfrak{X}', K_\beta, \beta \in B)$, здесь $\xi = \{1_x, x \in \mathfrak{X}'\}$ — множество индикаторов функций, которое ставится в соответствие множеству случайных событий $\mathfrak{X}'$, $\mathbf{K}$ — случайные множества событий, значениями которых являются $X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, \beta \in B$.

Выражения для совместного распределения случайных величин и для случайных множеств известны из предыдущих разделов, и теперь можно найти эвентологические распределения двудольного множества случайных элементов для этой ситуации.

Эвентологическое распределение подвероятностей пересечений двудольного множества случайных элементов $\{\xi, \mathbf{K}\}$ имеет вид:

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \{x: r_x \geq 1\}} x^c \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, x \in \mathfrak{X}', x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B \right).$$

Эвентологическое распределение надвероятностей пересечений:

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \{x: r_x \geq 0\}} x \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta, x \in \mathfrak{X}', x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B \right).$$

Эвентологическое распределение вероятностей пересечений:

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \{x: r_x = 1\}} x \bigcap_{x \in \{x: r_x = 0\}} x^c \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, x \in \mathfrak{X}', x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B \right).$$

2.4. Эвентологическое распределение двудольного множества в общем случае

Функцией распределения случайной величины ξ называется вещественная функция F , которая определяется в точках $r \in \mathbb{R}$ как вероятность события $\{\xi \leq r\}$: $F(r) = \mathbf{P}(\{\xi \leq r\})$. Мы можем выразить эту вероятность как вероятность события-терраски по пересечению, аналогично тому, как это было предложено для случайного множества. Событие $\{\xi \leq r\}$ можно представить как множество таких событий из Ω :

$$\{\xi \leq r\} = \{\omega : \xi(\omega) \leq r\} \subseteq \Omega.$$

Данное событие можно представить как событие-терраску для случайной величины:

$$\{\xi \leq r\} = \text{ter}^{\{\xi \leq r\}} = \bigcap_{y > r} \{\xi = y\}^c.$$

Пусть $\mathbf{r} = \{r_a, a \in A\}$. Выразим распределение подвероятностей совместного распределения случайных величин через события-терраски

$$p^{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \{\xi_a \leq r_a\} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \text{ter}^{\{\xi_a \leq r_a\}} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y > r_a} \{\xi_a = y\}^c \right\} \right).$$

Кроме того, мы можем выразить через события-терраски и следующие события:

$$\{\xi > r\} = \{\omega : \xi(\omega) > r\} \subseteq \Omega, \quad \{\xi = r\} = \{\omega : \xi(\omega) = r\} \subseteq \Omega.$$

Данные события равны

$$\{\xi > r\} = \text{ter}^{\{\xi > r\}} = \bigcap_{y \leq r} \{\xi = y\}^c, \quad \{\xi = r\} = \text{ter}^{\{\xi = r\}} = \bigcap_{y \neq r} \{\xi = y\}^c.$$

Тогда распределение надвероятностей по пересечению совместного распределения случайных величин равно

$$p_{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \{\xi_a > r_a\} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y \leq r_a} \{\xi_a = y\}^c \right\} \right).$$

Распределение вероятностей совместного распределения случайных величин:

$$p(\mathbf{r}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \{\xi_a = r_a\} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y \neq r} \{\xi = y\}^c \right\} \right).$$

Выражения для совместного распределения случайных величин и для случайных множеств найдены. Теперь можем найти эвентологические распределения двудольного множества случайных элементов.

Эвентологическое распределение подвероятностей пересечений двудольного множества случайных элементов $\{\xi, \mathbf{K}\}$:

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \text{ter}^{\{\xi_a \leq r_a\}} \bigcap_{\beta \in B} \text{ter}^{X_\beta} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y > r_a} \{\xi_a = y\}^c \right\} \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B \right).$$

Эвентологическое распределение надвероятностей пересечений:

$$p_{(\mathbf{r}, \mathbf{X})} = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \text{ter}^{\{\xi_a > r_a\}} \bigcap_{\beta \in B} \text{ter}^{X_\beta} \right) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y \leq r_a} \{\xi_a = y\}^c \right\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta, a \in A, \beta \in B \right).$$

Эвентологическое распределение вероятностей пересечений:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \text{ter}^{\{\xi_a = r_a\}} \bigcap_{\beta \in B} \text{ter}(X_\beta) \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y \neq r} \{\xi = y\}^c \right\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B \right). \end{aligned}$$

3. Двудольное множество случайных событий

Состояние каждого объекта статистической социально-экономической системы характеризуется двумя множествами: множеством событий, которое определяется случайными величинами и множеством событий, которое определяется случайными множествами событий. Рассмотрим двудольное множество случайных событий, описывающее состояние объекта системы, и покажем его связь с введенным выше двудольным множеством случайных элементов.

В работе будем изучать только ситуацию, когда $\{\xi_a, a \in A\}$ являются случайными величинами с конечным множеством возможных значений. Тогда для каждой случайной величины определено множество $\mathcal{R}_a = \{r_{a_1}, \dots, r_{a_{N_a}}\} \subset \mathbb{R}$, $a \in A$. Каждой случайной величине ξ_a , $a \in A$ можно поставить в соответствие множество событий $\mathcal{Y}_a$ следующим образом: $\xi_a \Rightarrow \mathcal{Y}_a = \{\mathcal{Y}_a(r_a), r_a \in \mathcal{R}_a\}$.

Событие $\mathcal{Y}_a(r_a) = \{\xi_a \leq r_a\} = \{\omega : \xi_a(\omega) \leq r_a\}$ — это событие из определения функции распределения случайной величины ξ_a : $F(r_a) = \mathbf{P}(\{\xi_a \leq r_a\})$. Каждое множество событий $\mathcal{Y}_a$, $a \in A$ обладает вложенной структурой зависимостей, поскольку $\mathcal{Y}_a(r_{a_1}) \subseteq \mathcal{Y}_a(r_{a_2}) \subseteq \mathcal{Y}_a(r_{a_3})$, если $r_{a_1} \leq r_{a_2} \leq r_{a_3}$. Поэтому при задании множества $\mathcal{Y}_a$ необходимо учитывать порядок на множестве $\mathbb{R}$. На рис.1 приведена диаграмма

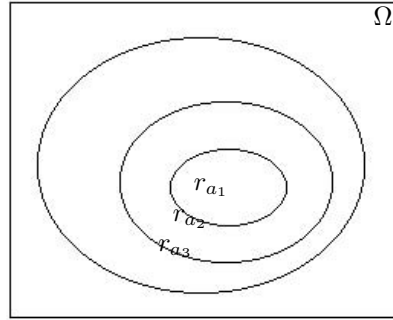


Рис. 1. Диаграмма Венна множества со вложенной структурой $\mathcal{Y}_a$

Венна, на которой представлено множество со вложенной структурой $\mathcal{Y}_a$. Значит, всей первой доле — случайным величинам, можно поставить в соответствие множество событий $\mathcal{Y}$, то есть

$$\xi \Rightarrow \mathcal{Y} = \sum_{a \in A} \mathcal{Y}_a.$$

Каждому случайному множеству событий K_β , $\beta \in B$ можно поставить в соответствие множество случайных событий $\mathfrak{X}_\beta[3]: K_\beta \iff \mathfrak{X}_\beta$. Значит, второй доле — случайным множествам, можно поставить в соответствие множество всех возможных случайных событий $\mathfrak{X}$ следующим образом:

$$\mathbf{K} \iff \mathfrak{X} = \sum_{\beta \in B} \mathfrak{X}_\beta, \beta \in B.$$

Аналогично тому, как случайному множеству событий K ставится в соответствие множество случайных событий $\mathfrak{X}$, предлагается двудольному множеству случайных элементов $\{\xi, \mathbf{K}\}$ поставить в соответствие *двудольное множество случайных событий*:

$$\{\xi, \mathbf{K}\} \Rightarrow \{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\}.$$

Определение 2. Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств — множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества событий, которое определяется случайными множествами событий:

$$\{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \quad (8)$$

Поскольку соответствие однозначно, полученные ранее выражения для эвентологических распределений множества случайных элементов справедливы и для двудольного множества случайных событий.

4. Эвентологическая модель статистических социально-экономических систем

Под системой будем понимать множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом и образующих целостность. Мы рассматриваем ситуацию, когда одна часть событий, описывающих состояние элементов статистических социально-экономических систем, связана с числовыми данными, а другая

— с множественными. Поэтому предлагается представить случайные события, характеризующие поведение каждого элемента системы, в виде двудольного множества случайных событий: множества событий, которое определяется случайными величинами, и множествами событий, которое определяется случайными множествами событий. Таким образом, состояние каждого элемента системы описывается двудольным множеством случайных событий $\{\mathcal{Y}, \mathcal{X}\}$: первая доля $\mathcal{Y}$ определяется случайными величинами ξ , а вторая доля $\mathcal{X}$ — случайными множествами событий $\mathbf{K}$.

Поскольку состояние системы можно определить через состояния каждого его элемента, то тогда *эвентологической моделью статистической социально-экономической системы* будем называть такую систему, каждое состояние которой представляет собой множество, состоящее из двудольных множеств случайных событий, соответствующих элементам системы.

Интерпретация множеств событий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ в различных прикладных областях может быть самой разной. Далее в статье будет рассматриваться эвентологическая модель состояния здоровья населения районов края, где под множеством $\mathcal{Y}$ будет пониматься множество событий, которое определяется числовыми показателями здоровья населения, а под множеством $\mathcal{X}$ будет — множество событий, которое определяется множественными показателями здоровья населения.

5. Применение метода двудольных множеств случайных событий в эвентологическом системном анализе

Поскольку проведение исследований в социально-экономических системах сопряжено с трудностями, связанными с большим числом событий в них и тем, что некоторые из этих событий порождаются множественными объектами, то, чтобы избежать этих трудностей и перейти к множественному анализу, предлагается применять к решению задач системного анализа метод двудольных множеств случайных событий. На практике одной из наиболее востребованных задач системного анализа является задача нахождения экстремального (наилучшего или наихудшего) элемента системы. Поэтому работу метода будем иллюстрировать на данной задаче.

Пусть система состоит из n элементов. Каждый элемент характеризуется показателями, одни из которых числовые, а другие — множественные.

Пусть $\mathcal{Y}^+, \mathcal{X}^+$ — двудольное множество событий, характеризующих состояние идеального «наилучшего» элемента системы (т.е. элемента, показатели которого имеют наилучшие значения), $\{\mathcal{Y}^1, \mathcal{X}^1\}, \{\mathcal{Y}^2, \mathcal{X}^2\}, \dots, \{\mathcal{Y}^n, \mathcal{X}^n\}$ — двудольные множества событий, характеризующих состояние каждого элемента системы.

$$|\mathcal{Y}^+| = |\mathcal{Y}^1| = \dots = |\mathcal{Y}^n|, \quad |\mathcal{X}^+| = |\mathcal{X}^1| = \dots = |\mathcal{X}^n|.$$

Здесь

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{a \in A} \mathcal{Y}_a, \quad \mathcal{X} = \sum_{\beta \in B} \mathcal{X}_\beta.$$

Идеальный «наилучший» и элементы системы представимы в более подробном виде:

$$\begin{aligned} s^+ &= \{\mathcal{Y}_a^+, \mathcal{X}_\beta^+, a \in A, \beta \in B\}, \\ s^1 &= \{\mathcal{Y}_a^1, \mathcal{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B\}, \\ &\dots \\ s^n &= \{\mathcal{Y}_a^n, \mathcal{X}_\beta^n, a \in A, \beta \in B\}. \end{aligned}$$

5.1. Сет-операции по Минковскому над двудольными множествами случайных событий

В параграфе, посвященном двудольным множествам случайных событий, были получены формулы для Э-распределений двудольных множеств случайных событий. На практике найти данные распределения и работать с ними достаточно сложно, поэтому предлагается в качестве оценки вероятностей Э-распределений использовать вероятности всех событий, из которых состоит двудольное множество. Например, индивидуальная вероятность $\mathbf{P}$ двудольного множества s^i определяется через вероятности всех событий из каждой доли

$$\mathbf{P}(s^i) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^i(r_a)) + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathcal{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \in \mathcal{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^i).$$

Пусть имеются два двудольных множества $s^1 = \{\mathcal{Y}_a^1, \mathcal{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B\}$ и $s^2 = \{\mathcal{Y}_a^2, \mathcal{X}_\beta^2, a \in A, \beta \in B\}$.

Определение 3. Произвольной операцией по Минковскому над двумя двудольными множествами событий s^1 и s^2 называется теоретико-множественная операция (сет-операция), которая представляется как множество событий, полученных с помощью операций по Минковскому над соответствующими событиями из каждой доли [3]:

$$\begin{aligned} s1(\circ)s2 &= \{\mathcal{Y}_a^1(\circ)\mathcal{Y}_a^2, \mathfrak{X}_\beta^1(\circ)\mathfrak{X}_\beta^2, a \in A, \beta \in B\} = \\ &= \{\mathcal{Y}_a^1(r_a)\circ\mathcal{Y}_a^2(r_a), X_\beta^1\circ X_\beta^2, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, r_a \in \mathcal{R}_a, a \in A, \beta \in B\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\mathcal{Y}_a^1, \mathcal{Y}_a^2 \subseteq \mathcal{Y}_a$, $\mathfrak{X}_\beta^1, \mathfrak{X}_\beta^2 \subseteq \mathfrak{X}_\beta$. Вероятность произвольной операции определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s^1(\circ)s^2) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^1(r_a)\circ\mathcal{Y}_a^2(r_a)) + \\ &+ \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^1\circ X_\beta^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Так сет-операция симметрической разности по Минковскому двух двудольных множеств событий s^1 и s^2 определяется как

$$s1(\Delta)s2 = \{\mathcal{Y}_a^1(r_a)\Delta\mathcal{Y}_a^2(r_a), X_\beta^1\Delta X_\beta^2, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, r_a \in \mathcal{R}_a, a \in A, \beta \in B\}. \quad (11)$$

Вероятность симметрической разности равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s^1(\Delta)s^2) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^1(r_a)\Delta\mathcal{Y}_a^2(r_a)) + \\ &+ \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^1\Delta X_\beta^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку вероятность сет-операции симметрической разности по Минковскому двух двудольных множеств событий является псевдометрикой между ними, то предлагается применять ее для измерения расстояния между двудольными множествами событий.

5.2. Задачи определения экстремального элемента системы

Задача определения наилучшего элемента системы

Наилучшим элементом системы будет элемент i , у которого $\mathcal{E}$ -распределение двудольного множества событий s^i наиболее близко к $\mathcal{E}$ -распределению двудольного множества событий идеального «наилучшего» элемента s^+ :

$$\mathbf{P}(s^+(\Delta)s^{i*}) = \min_{i=1, \dots, n} \mathbf{P}(s^+(\Delta)s^i), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s^+(\Delta)s^i) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^+(r_a)\Delta\mathcal{Y}_a^i(r_a)) + \\ &+ \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^+\Delta X_\beta^i). \end{aligned}$$

Пусть $s^- = \{\mathcal{Y}_a^-, \mathfrak{X}_\beta^-, a \in A, \beta \in B\}$ — двудольное множество событий, характеризующих идеальный «наихудший» элемент системы.

Задача определения наихудшего элемента системы

Наихудшим элементом системы будет элемент i , у которого $\mathcal{E}$ -распределение двудольного множества событий s^i наиболее близко к $\mathcal{E}$ -распределению двудольного множества событий идеального «наихудшего» элемента s^- :

$$\mathbf{P}(s^-(\Delta)s^{i*}) = \min_{i=1, \dots, n} \mathbf{P}(s^-(\Delta)s^i), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s^-(\Delta)s^i) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^-(r_a)\Delta\mathcal{Y}_a^i(r_a)) + \\ &+ \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^-\Delta X_\beta^i). \end{aligned}$$

Проиллюстрируем работу метода на практическом примере задачи нахождения экстремального элемента системы — задачи определения неблагополучных районов по состоянию здоровья их населения.

5.3. Задача определения неблагополучных районов по состоянию здоровья населения

Задача заключается в выявлении одного или нескольких неблагополучных районов по состоянию здоровья их населения. Решение задачи основано на статистике здоровья населения 50 районов Красноярского края, предоставленной Институтом комплексных проблем гигиены и профзаболеваний Сибирского отделения Российской академии медицинских наук. Очевидно, что данная задача является практическим примером задачи нахождения наихудшего элемента системы. Состояние здоровья населения каждого района края оценивается по статистическим данным, описывающим показатели здоровья его населения. Определяются идеальный «наилучший» и «наихудший» районы (т.е. наилучшие и наихудшие значения для каждого показателя здоровья). Рассматриваются 26 числовых показателей (доли экономически активного населения и пенсионеров; плотность населения; обеспеченность жилплощадью и телефонами; рождаемость; смертность; средняя продолжительность жизни; заболеваемость взрослых и детей; жесткость погоды и др.) и 2 нечисловых — химический состав загрязнения почв и множество заболеваний населения.



Рис. 2. Карта классификации районов края по состоянию здоровья населения

Были найдены псевдорасстояния от идеального «наилучшего» и «наихудшего» районов для каждого района (сумма этих двух расстояний равна 1). Идеальный «наилучший» и «наихудший» районы выступают в роли некоторых полюсов, между которыми располагаются все реальные районы. Полученная таблица расстояний для всех районов Красноярского края позволяет определить, на каком месте по состоянию здоровья находится каждый район. В результате решения задачи было установлено, что самым неблагополучным районом Красноярского края по состоянию здоровья его населения оказался г.Норильск, а самым благополучным — Идринский район. На рис. 2 приведены результаты классификации районов по состоянию здоровья населения на основе таблицы расстояний. Серым цветом отмечены благополучные районы, темным — неблагополучные. Данная классификация была предложена экспертам в области оценки состояния здоровья населения. Адекватность предложенной модели и метода решения задачи нахождения экстремального элемента системы с помощью двудольных множеств случайных событий была подтверждена сходством полученных результатов с данными экспертов.

Список литературы

- [1] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Среднемерное моделирование* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ. – М.: Наука, 1984. – 133с.
- [2] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Сет-суммирование* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ. – Новосибирск: Наука, 1993. – 137с.
- [3] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Введение в эвентологию* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ. – Красноярск: КрасГУ, ИВМ СО РАН, 2005. – 512с.
- [4] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Теория случайных событий и ее применение* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ, Е.Е.ГОЛДЕНОК, Т.В.КУПРИЯНОВА, Д.В.СЕМЕНОВА. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. – 502с.
- [5] ВОРОБЬЕВ О.Ю. *Структурный сет-анализ зависимостей случайных событий* / О.Ю.ВОРОБЬЕВ, Е.Е.ГОЛДЕНОК. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2004. – 106с.
- [6] КОЛМОГОРОВ А.Н. *Основные понятия теории вероятностей* / А.Н.КОЛМОГОРОВ. – М.: Наука, 1974. – 120с.
- [7] БАРАНОВА И.В. *Об эвентологических распределениях двудольных множеств случайных элементов* / И.В.БАРАНОВА // Экономика. Психология. Бизнес. / Краснояр. гос. торг.-экон. ин-т. – Красноярск, 2005. – №4. – С.229–239.

THE BIPARTITE SET OF RANDOM EVENTS METHOD IN EVENTOLOGICAL ANALYSIS OF SOCIO – ECONOMIC SYSTEMS

I. Baranova

It is offered the bipartite set of random events method in eventological analysis of socio – economic systems. It is considered an application of suggested method for the solution of eventological system analysis problem – problem of determining the system's optimum element.