ГИДРОДИНАМИКА

УДК 532.517

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ С МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА[1]

В.К. Андреев, М.В. Ефимова*

Для уравнений конвекции двух бинарных смесей с общей межфазной поверхностью раздела выведены уравнения малых возмущений в линейном приближении. Найдено равновесное состояние смесей в плоских слоях с переменными коэффициентами термодиффузии. Исследована устойчивость этого состояния и для монотонных возмущений найдены критические числа Марангони или Соре.

1. Основные уравнения модели

Предположим, что имеется бинарная смесь, причем ее плотность линейно зависит от температуры и концентрации:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_1\theta - \beta_2 c). \tag{1.1}$$

В (1.1) ρ_0 — плотность смеси при средних значениях температуры θ и концентрации c; β_1 — коэффициент теплового расширения смеси, а β_2 — концентрационный коэффициент плотности, $\beta_2 > 0$, поскольку c — концентрация легкой компоненты. Уравнения конвективного движения смеси в приближении Обербека–Буссинеска принимают вид

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\,\nabla\bar{p} + \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_1\theta + \beta_2 c); \tag{1.2}$$

$$\theta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \chi\Delta\theta + \frac{2\nu}{c_p}\,D : D + q; \tag{1.3}$$

$$c_t + \mathbf{u}\cdot\nabla c = d\Delta c + \alpha d\Delta\theta; \tag{1.4}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0, \tag{1.5}$$

где ν, χ — кинематическая вязкость и температуропроводность смеси; d — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии (Соре). Все коэффициенты переноса предполагаются постоянными, соответствующими средним значениям θ и c; в случае нормальной термодиффузии $\alpha < 0$, а при аномальном эффекте — $\alpha > 0$. В первом случае поток легкой компоненты направлен в сторону нагретой границы, что приводит к увеличению подъемной силы. Во втором — легкая компонента диффундирует в сторону холодной границы, что уменьшает подъемную силу; при определенных значениях параметра α возможно механическое равновесие. Кроме того, в (1.2) $\mathbf{g}$ — плотность внешних сил; будем считать, что $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t)$ или $\mathbf{g} = \mathrm{const}$. При этом $\bar{p} = p - \rho_0\mathbf{g}(t)\cdot\mathbf{x}$ — модифицированное давление. В уравнении энергии (1.3) D — тензор скоростей деформаций, $c_p = \mathrm{const}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении, а q — плотность внутренних источников тепла.

Наряду с моделью (1.2)–(1.5) будем рассматривать модель, где вместо (1.4) концентрация смеси удовлетворяет уравнению [1]

$$c_t + \mathbf{u}\cdot\nabla c = d\ \mathrm{div}\ \left(\nabla c + \frac{k_\theta}{\theta}\,\nabla\theta\right), \tag{1.6}$$

т.е. здесь коэффициент Соре зависит от температуры, k_θ — постоянный коэффициент термодиффузии.

2. Движение с поверхностью раздела

Рассмотрим движение двух несмешивающихся бинарных смесей с общей границей раздела. Обозначим через Ω_j $(j = 1, 2)$ области, занятые жидкостями, через ρ_j, ν_j, χ_j, c_{p_j}, k_θ^j — соответственно плотности, кинематические вязкости, коэффициенты температуропроводности, удельной теплоемкости, термодиффузии смесей; $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости, $\bar{p}_j$ — отклонение давления от гидростатического, θ_j — температура, c_j — концентрация, D_j — тензор скоростей деформаций, соответствующий векторному полю $\mathbf{u}_j$, $q_j(\mathbf{x}, t)$ — заданные внутренние источники тепла.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 05-01-00836, проекта 2.15 СО РАН.

Обозначим через Γ поверхность раздела жидкостей. Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела зависит от температуры и концентрации: $\sigma = \sigma(\theta, c)$. Сформулируем, следуя [2, 3] (в [2] рассмотрен лишь случай стационарного течения и $c = 0$), условия на поверхности Γ:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2; \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_n; \tag{2.2}$$

$$\theta_1 = \theta_2, \quad c_1 = \mu c_2; \tag{2.3}$$

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \bigtriangledown_{11}\sigma; \tag{2.4}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \delta\theta \bigtriangledown_{11} \cdot \mathbf{u} + \omega(\theta_t + \mathbf{u} \cdot \bigtriangledown_{11}\theta); \tag{2.5}$$

$$\rho_2 d_2 \left(\frac{\partial c_2}{\partial n} + \frac{k_\theta^2}{\theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = \rho_1 d_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} + \frac{k_\theta^1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right). \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Γ, направленный из Ω_1 в Ω_2, V_n — скорость перемещения поверхности раздела Γ в направлении $\mathbf{n}$, μ — постоянная равновесия Генри, $P_j = (-\bar{p}_j - \rho_j \mathbf{g} \cdot \mathbf{x})E + 2\rho_j \nu_j D_j$ — тензоры напряжений, E — единичный тензор, H — средняя кривизна поверхности Γ ($H > 0$, если Γ выпукла наружу области Ω_1), $\bigtriangledown_{11} = \bigtriangledown - (\mathbf{n} \cdot \bigtriangledown)\mathbf{n}$ обозначает поверхностный градиент, $\lambda_j = \chi_j \rho_j c_{p_j}$ — коэффициенты теплопроводности. Через $\mathbf{u}$ и θ обозначены значения вектора скорости и температур обеих жидкостей на Γ, попарно совпадающие в силу (2.1), (2.3), так что $\bigtriangledown_{11} \cdot \mathbf{u}$ есть поверхностная дивергенция вектора $\mathbf{u}$. Функции $\delta(\theta)$ и $\omega(\theta)$, участвующие в (2.5), определены равенствами

$$\delta = -\frac{d\sigma}{d\theta}, \quad \omega = \frac{d}{d\theta}(\sigma + \text{æ}\theta). \tag{2.7}$$

Часто используется линейная зависимость, например для расплавов металлов

$$\sigma(\theta, c) = \sigma^0 - \gamma(c - c^0) - \sigma_T(\theta - \theta^0), \quad \sigma_T = \text{const} > 0, \quad \gamma = \text{const} > 0, \tag{2.8}$$

c — среднее значение концентрации, $c = c_1 = \mu c_2$ на Γ. В этом случае $\delta = \sigma_T$ и согласно (2.7) $\omega = 0$. **Замечание 1.** Если на поверхности раздела имеется растворимое поверхностно-активное вещество (ПАВ), то условия $c_1 = \mu c_2$ и (2.6) на Γ "снимаются". Обозначим через s поверхностную концентрацию. Она удовлетворяет уравнению

$$s_t + \bigtriangledown_{11} \cdot (\mathbf{u}s) - d_\Gamma \Delta_\Gamma s = j_{n1} + j_{n2},$$

где d_Γ — коэффициент диффузии ПАВ вдоль Γ, Δ_Γ — оператор Лапласа–Бельтрами, $j_{n1,2}$ — потоки вещества с Γ в области $\Omega_{1,2}$, причем

$$j_{n1,2} = -\rho_{1,2} d_{1,2} \left(\frac{\partial c_{1,2}}{\partial n} + \frac{k_\theta^{1,2}}{\theta_{1,2}} \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial n} \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Однако за счет процессов адсорбции-десорбции

$$j_{n1,2} = k_A^{1,2} c_{1,2} - k_D^{1,2} s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где $k_A^{1,2}$ и $k_D^{1,2}$ — коэффициенты адсорбции и десорбции соответственно. При этом, конечно, $\sigma = \sigma(\theta, s)$.

Области Ω_1 и Ω_2 могут контактировать не только друг с другом, но и с твердыми телами и с газовой фазой. Предположим, что процессами переноса в газе можно пренебречь, и будем считать давление газа p_{gas} постоянным, а его температуру θ_{gas} на границе с жидкостью — заданной функцией $\mathbf{x}$ и t. Обозначим, для определенности, через Γ_1 границу раздела жидкости Ω_1 с газом. На поверхности Γ_1 должны быть выполнены:
кинематическое условие

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = V_n, \tag{2.9}$$

динамическое условие

$$(\bar{p}_1 + \rho_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} - 2\rho_1 \nu_1 D_1(\mathbf{u})\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_{11}\sigma \tag{2.10}$$

и условие теплового контакта

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} + b(\theta_1 - \theta_{gas}) = 0. \tag{2.11}$$

В (2.11) $b \geq 0$ — коэффициент межфазного теплообмена; для простоты будем считать $b =$ const. В условии (2.10) опущен член $\rho_{gas}\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$, связанный с потенциальной энергией газа в поле силы тяжести. Это оправданно, поскольку обычно отношение ρ_{gas}/ρ_1 имеет порядок 10^{-3}.

Перенос ПАВ вдоль границы Γ_1 описывается уравнением

$$s_t + \bigtriangledown_{11} \cdot (\mathbf{u}_1 s) - d_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} s = j_n, \tag{2.12}$$

где s — поверхностная концентрация, d_Γ — коэффициент поверхностной диффузии ПАВ, j_n — поток вещества с поверхности в объемную фазу. Величина потока j_n определяется процессами переноса ПАВ вглубь жидкости и с учетом термодиффузии имеет вид

$$j_n = -\rho_1 d_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} + \frac{k_\theta^1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \tag{2.13}$$

Здесь c_1 — концентрация растворенного ПАВ в жидкости. С другой стороны, обмен веществом между поверхностью и жидкостью происходит за счет процесса адсорбции-десорбции, и величина потока равна

$$j_n = k_A c_1 - k_D s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \tag{2.14}$$

где k_A и k_D — коэффициенты адсорбции и десорбции соответственно.

Замечание 2. Конечно, при этом в (2.8) нужно $c - c^0$ заменить на $s - s^0$.

Поверхность Γ_1, на которой выполняются условия (2.9)–(2.14), называется *свободной границей.*

На поверхности твердых тел ставятся условия прилипания

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_i, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t)$ — скорость движения стенки Σ_i. Кроме того, будем считать, что температура в точках Σ_i удовлетворяет одному из условий

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial n} = h_i(\mathbf{x}, t), \quad \theta_i = b_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_i, \tag{2.16}$$

с заданными функциями $h_i(\mathbf{x}, t)$, $b_i(\mathbf{x}, t)$.

Если через твердые поверхности Σ_i нет потока вещества, то

$$\frac{\partial c_i}{\partial n} + \frac{k_\theta^i}{\theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_i. \tag{2.17}$$

Соотношения (2.1)–(2.6) следует дополнить начальными условиями

$$\Omega_i = \Omega_i^0; \tag{2.18}$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0; \tag{2.19}$$

$$\theta_i(\mathbf{x}, 0) = \theta_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0; \tag{2.20}$$

$$c_i(\mathbf{x}, 0) = c_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0. \tag{2.21}$$

Если поверхность Σ_i не имеет общих точек с Γ (или Γ_1), то постановка нестационарной задачи о термокапиллярном движении закончена. Сформулируем эту задачу. Требуется найти области Ω_i $(i = 1, 2)$ и функции $\mathbf{u}_i$, p_i, θ_i, c_i, определенные в областях Ω_i так, чтобы выполнялись уравнения (1.2)–(1.6), граничные условия (2.1)–(2.6), (2.15), (2.16), (2.17) и начальные условия (2.18)–(2.21). При наличии движущейся линии контакта L поверхностей Γ и Σ_i или Γ_1 и Σ_i возникают дополнительные трудности (так называемая проблема динамического краевого угла). Природа и способы преодоления этих трудностей обсуждаются в [4, 5, 6].

3. Линеаризованная задача о малых возмущениях

Пусть известно решение $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$, $\bar{p}_j(\mathbf{x}, t)$, $\theta_j(\mathbf{x}, t)$, $c_j(\mathbf{x}, t)$ задачи (1.2)–(1.6), (2.1)–(2.21) в области Ω_j. Положим $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X}_j(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{X}_j$ — вектор смещений частиц жидкости, или вектор возмущений, $\mathbf{X}_j|_{t=0} = 0$. Обозначим через $\widetilde{\Omega}_j$ область, получаемую сдвигом Ω_j на вектор $\mathbf{X}_j$. Рассмотрим другое решение $\tilde{\mathbf{u}}_j, \tilde{p}_j, \tilde{\theta}_j, \tilde{c}_j$ в области $\widetilde{\Omega}_j$ с начальным полем скоростей

$$\tilde{\mathbf{u}}_{j0} = \mathbf{u}_{jo}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}_{jo}(\mathbf{x}), \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_{j0} = 0.$$

Представим функции $\tilde{\mathbf{u}}_j$, $\tilde{p}_j$, $\tilde{\theta}_j$, $\tilde{c}_j$ в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}_j(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{u}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + \mathbf{U}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{p}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \bar{p}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + P_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \tag{3.1}$$

$$\tilde{\theta}_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) = \theta_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) + T_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}), \quad \tilde{c}_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) = c_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) + C_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}),$$

где $\mathbf{U}_j$, P_j, T_j, C_j — возмущения основного решения $\mathbf{u}_j$, p_j, θ_j, c_j. Предполагая малость начального возмущения скорости $\mathbf{U}_{jo}$, можно надеяться на то, что возмущения будут малыми хотя бы на небольшом интервале времени. Тогда уравнения на возмущения можно упростить, отбросив в них все члены, нелинейные относительно возмущений. Вектор возмущений также предполагается малым вместе со своими производными, так что область $\tilde{\Omega}_j$ мало отличается от Ω_j. Поэтому можно представить равенства (3.1) в линейном приближении в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) &= \mathbf{u}_j(\mathbf{x},t) + \mathbf{X}_j \bigtriangledown \mathbf{u}_j + \mathbf{U}_j(\mathbf{x},t),\\ \tilde{\bar{p}}_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) &= \bar{p}_j(\mathbf{x},t) + \mathbf{X}_j \cdot \bigtriangledown p_j + P_j(\mathbf{x},t),\\ \tilde{\theta}_j(\tilde{\mathbf{x}}_j,\tilde{t}) &= \theta_j(\mathbf{x},t) + \mathbf{X}_j \cdot \bigtriangledown \theta_j + T_j(\mathbf{x},t),\\ \tilde{c}_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) &= c_j(\mathbf{x},t) + \mathbf{X}_j \cdot \bigtriangledown c_j + C_j(\mathbf{x},t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

В линейном приближении справедливы формулы преобразования производных, см. [7]:

$$\bigtriangledown_{\tilde{\mathbf{x}}} = \bigtriangledown_x - N_j^* \bigtriangledown_x, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{X}_{jt} \cdot \bigtriangledown_x, \quad N_j = \frac{\partial(\mathbf{X}_j)}{\partial(\mathbf{x})}, \tag{3.3}$$

N_j^* — транспонированная к N_j матрица.

Действуя так же, как и в монографии [7], получим в линейном приближении в Ω_j:

$$\mathbf{U}_{jt} + \mathbf{u}_j \bigtriangledown \mathbf{U}_j + \mathbf{U}_j \bigtriangledown \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_j} \bigtriangledown P_j = \nu_j \Delta \mathbf{U}_j - \mathbf{g}_j(\beta_1^j T_j + \beta_2^j C_j); \tag{3.4}$$

$$\text{div } \mathbf{U}_j = 0; \tag{3.5}$$

$$T_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \bigtriangledown T_j + \mathbf{U}_j \cdot \bigtriangledown \theta_j = \chi_j \Delta T_j + \frac{4\nu_j}{c_{p_j}} D_j(\mathbf{u}_j) : D(\mathbf{U}_j); \tag{3.6}$$

$$\mathbf{X}_{jt} + \mathbf{u}_j \bigtriangledown \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j \bigtriangledown \mathbf{u}_j + \mathbf{U}_j; \tag{3.7}$$

$$C_{jt} + \mathbf{u} \cdot \bigtriangledown C_j + \mathbf{U} \cdot \bigtriangledown c_j = d_j \Delta \left[C_j + k_\theta^j \left(\frac{T_j}{\theta_j} \right) \right]. \tag{3.8}$$

Ясно, что (3.7) эквивалентно в каждой из областей Ω_j уравнению div $\mathbf{X}_j = 0$. Это следует из (3.5), div $\mathbf{u}_j = 0$ и легко проверяемого тождества

$$\text{div } [\mathbf{u} \bigtriangledown \mathbf{X} - \mathbf{X} \bigtriangledown \mathbf{u}] = \mathbf{u} \cdot (\text{div } \mathbf{X}) - \mathbf{X} \cdot \bigtriangledown(\text{div } \mathbf{u}).$$

Перейдем к линеаризации граничных условий (2.1)–(2.6). Представим вектор $\mathbf{X}_j$ на границе раздела в виде

$$\mathbf{X}_j = R\mathbf{n} + \mathbf{X}_\tau,$$

где $\mathbf{X}_\tau$ лежит в касательной к Γ плоскости, а $\tilde{f} = f(\tilde{\mathbf{x}},t) + F(\tilde{\mathbf{x}},t) = 0$ — уравнение возмущенной поверхности $\tilde{\Gamma}$. Тогда (2.2) для основного и возмущенного движений запишутся так (заметим, что $V_n = -f_t/|\nabla f|$, где $f(\mathbf{x},t) = 0$ — уравнение Γ):

$$f_t + \mathbf{u} \cdot \bigtriangledown f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma; \quad \tilde{f}_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \bigtriangledown_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f} = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Gamma}.$$

Используя (3.3) и тождества $\bigtriangledown(\mathbf{X} \cdot \mathbf{g}) = \bigtriangledown \mathbf{g} \mathbf{X} + N^* \bigtriangledown \mathbf{g}$, получим

$$F_t + \mathbf{u} \cdot F + \mathbf{U} \cdot \bigtriangledown f = 0. \tag{3.9}$$

Заменяя в (3.9) $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ на Γ из (3.7), с учетом того, что $\mathbf{n} = \bigtriangledown f / |\bigtriangledown f|$, найдем

$$\frac{d}{dt}(F + |\bigtriangledown f| R) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{3.10}$$

где

$$R = \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} \tag{3.11}$$

является нормальной составляющей вектора возмущений на поверхности раздела.

Условия (2.1), (2.3) в линейном приближении будут такими:

$$\mathbf{U}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial n} R = \mathbf{U}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial n} R, \tag{3.12}$$

$$T_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial n} R = T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial n} R, \quad C_1 + \frac{\partial c_1}{\partial n} R = \mu \left(C_2 + \frac{\partial C_2}{\partial n} R \right), \tag{3.13}$$

где $\partial \mathbf{u}/\partial n = (\partial u/\partial n, \partial v/\partial n, \partial w/\partial n)$, (u, v, w) — компоненты вектора $\mathbf{u}$, $\partial/\partial n = \mathbf{n} \cdot \bigtriangledown$.

Соотношение (2.4) имеет векторную форму. Далее, предположим, что невозмущенная поверхность раздела Γ является гладкой. Это означает, что $(\alpha_1, \alpha_2) \to \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, t)$ суть параметрическое задание Γ гладкими функциями, а тройка векторов $\mathbf{n}, \mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}$, образуют локальный базис, вообще говоря, неортогональный, причем векторы $\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}$ лежат в касательной к Γ плоскости. Поэтому (2.4) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 + (\rho_1 - \rho_2)\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + 2[\rho_2 \nu_2 D(\mathbf{u}_2) - \rho_1 \nu_1 D(\mathbf{u}_1)]\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 2\sigma H; \tag{3.14}$$

$$2[\rho_2 \nu_2 D(\mathbf{u}_2) - \rho_1 \nu_1 D(\mathbf{u}_1)]\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha_{1,2}} = \bigtriangledown_{11} \sigma \cdot \mathbf{x}_{\alpha_{1,2}}. \tag{3.15}$$

Имеем

$$\tilde{\mathbf{n}} \approx \mathbf{n} + \mathbf{n}_1 \tag{3.16}$$

в линейном приближении, причем $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$. Легкий подсчет по формулам дифференциальной геометрии дает

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{EG - F^2} [(R_{\alpha_2} F - R_{\alpha_1} G)\mathbf{x}_{\alpha_1} + (R_{\alpha_1} F - R_{\alpha_2} E)\mathbf{x}_{\alpha_2}], \tag{3.17}$$

где $E = |\mathbf{x}_{\alpha_1}|^2$, $G = |\mathbf{x}_{\alpha_2}|^2$, $F = \mathbf{x}_{\alpha_1} \cdot \mathbf{x}_{\alpha_2}$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Γ.

Соотношение (3.14) в линейном приближении таково:

$$\begin{gathered} -[P]_\Gamma + 2\{[\rho\nu D(\mathbf{U})]_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2[\rho\nu D(\mathbf{u})]_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1\} = \\ = \left\{ \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]_\Gamma + [\rho]_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_2^2} + 2\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial n} H + 2\frac{\partial \sigma}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial n} H - \right. \\ \left. -2\left[\rho\nu \frac{\partial D(\mathbf{u})}{\partial n}\right]_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right\} R + \sigma \Delta_\Gamma R + 2\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} HT + 2\frac{\partial \sigma}{\partial c} HC. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Производная по нормали $\partial D/\partial n$ есть матрица с элементами $\partial D_{ij}/\partial n$, $i, j = 1, 2, 3$, D_1, D_2 — главные радиусы кривизны невозмущенной поверхности Γ, Δ_Γ — ее оператор Лапласа–Бельтрами [8]. Граничное условие (3.15) в том же приближении будет иметь вид

$$\begin{gathered} 2\left\{ [\rho\nu D(\mathbf{U})]_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha_{1,2}} + \left[\rho\nu \frac{\partial D(\mathbf{u})}{\partial n}\right]_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha_{1,2}} R + \right. \\ \left. + [\rho\nu D(\mathbf{u})]_\Gamma \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}R)_{\alpha_{1,2}} + [\rho\nu D(\mathbf{u})]_\Gamma \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} \right\} = \\ = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_{1,2}} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R \right)_{\alpha_{1,2}} \right] + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R + T \right) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_{1,2}} + \\ + \frac{\partial \sigma}{\partial c} \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha_{1,2}} + \left(\frac{\partial c}{\partial n} R \right)_{\alpha_{1,2}} \right) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial n} R + C \right) \frac{\partial c}{\partial \alpha_{1,2}} + \\ + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta \partial c} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial n} R + C \right) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_{1,2}} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R + T \right) \frac{\partial c}{\partial \alpha_{1,2}} \right]. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Линеаризация (2.5) приводит к соотношению на Γ:

$$\begin{gathered} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right]_\Gamma + \left[\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2}\right]_\Gamma R + [\lambda \bigtriangledown \theta]_\Gamma \mathbf{n}_1 = \\ = \delta_1 \left[\bigtriangledown_{11} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} R \right) + \bigtriangledown_{11} \cdot \mathbf{U} \right] + \frac{d\delta_1}{d\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R + T \right) \bigtriangledown_{11} \cdot \mathbf{u} + \\ + \omega \left[T_t + \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R \right)_t + \mathbf{u} \cdot \bigtriangledown_{11} T + \mathbf{U} \cdot \bigtriangledown_{11} \theta + \frac{\partial}{\partial n} (\mathbf{u} \cdot \bigtriangledown_{11} \theta) R \right] + \\ + (\theta_t + \mathbf{u} \cdot \bigtriangledown_{11} \theta) \frac{d\omega}{d\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R + T \right), \end{gathered} \tag{3.20}$$

где $\delta_1 = \theta\delta$. Аналогично, в линейном приближении равенство (2.6) будет таким:

$$\left[\rho d\left(\frac{\partial C}{\partial n}+\frac{\partial^2 c}{\partial n^2}R+\nabla c\cdot\mathbf{u}+\frac{k_\theta}{\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}R+\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\right)\right]_\Gamma=0. \tag{3.21}$$

Замечание 4. В равенствах (3.18)–(3.20) встречается выражение $T+(\partial\theta/\partial n)R$. Оно, в силу (3.13), совпадает с $T_{1,2}+(\partial\theta_{1,2}/\partial n)R$; то же справедливо и для $C+(\partial c/\partial n)R$.

Для полного определения возмущенного движения необходимо задать начальные условия при $t=0$:

$$\mathbf{U}_j=\mathbf{U}_{j0},\quad \operatorname{div}\mathbf{U}_{j0}=0,\quad F=F_0,\quad \mathbf{X}_j=0,\quad T_j=0,\quad C_j=C_{j0}. \tag{3.22}$$

Если имеется контакт жидкости с твердой стенкой, то на линии смачивания L выполняется условие

$$\mathbf{U}_j=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial R}{\partial l}+qR=0, \tag{3.23}$$

где q — известная функция. Оно означает сохранение угла смачивания (см. [9], там же приведены и обозначения). На твердых стенках Σ_j

$$\mathbf{U}_j=0,\quad \mathbf{X}_j=0,\quad T_j=0\quad\left(\text{либо}\ \frac{\partial T_j}{\partial n}=0\right); \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial n}+\frac{k_\theta^j}{\theta_j}\frac{\partial T_j}{\partial n}=0\ \left(\text{либо}\ \frac{\partial C_j}{\partial n}-\frac{k_\theta^j}{\theta_j^2}T_j\frac{\partial\theta_j}{\partial n}=0\right). \tag{3.25}$$

Замечание 5. Если на поверхности раздела Γ имеется ПАВ, то полагая на Γ $\tilde{s}=s+S$, получим

$$S_t+\bigtriangledown_{11}\cdot\left(\mathbf{u}S+s\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial u}R\right)-d_\Gamma\Delta_\Gamma S=$$

$$=-\left[\rho d\left(\frac{\partial C}{\partial n}+\frac{\partial^2 c}{\partial n^2}R+\nabla c\cdot\mathbf{n}_1+\frac{k_\theta}{\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}R+\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\right)\right]_\Gamma, \tag{3.26}$$

$$-\rho_j d_j\left[\frac{\partial C_j}{\partial n}+\frac{\partial^2 c_j}{\partial n^2}R+\nabla c_j\cdot\mathbf{n}_1+\frac{k_\theta^j}{\theta_j}\left(\frac{\partial^2\theta_j}{\partial n^2}R+\frac{\partial T_j}{\partial n}-\frac{T_j}{\theta_j}\frac{\partial\theta_j}{\partial n}\right)\right]=$$

$$=k_A^j\left(\frac{\partial c_j}{\partial n}R+C_j\right)-k_D^jS,\quad j=1,2. \tag{3.27}$$

Эти условия заменяют в данном случае условия (3.13), (3.21) для возмущений концентраций.

Если имеется свободная граница, то на ней выполнено (3.26), где надо “снять” индекс Γ в правой части и в (3.27) положить $j=1$. Кроме того, (3.20) заменяется граничным условием

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial n^2}R\right)+\alpha\left(T_1+\frac{\partial\theta_1}{\partial n}R\right)=0. \tag{3.28}$$

4. Устойчивость равновесия с плоской поверхностью раздела при больших числах Вебера

Рассматривается движение двух несмешивающихся несжимаемых слоев теплопроводных вязких жидкостей с общей поверхностью раздела $y=0$. Плоскости $y=\pm l$ — суть непроницаемые твердые стенки. Считается, что данная конфигурация находится в состоянии покоя: $\mathbf{u}_j=0$. Предположим, что $\mathbf{g}=0$, $q=0$, зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации имеет вид (2.8), так что правая часть в (2.5) равна нулю. Будем искать стационарное решение (в указанных выше предположениях) в виде $\theta_j=\theta_j(y)$, $c_j=c_j(y)$. Ясно, что из (2.3) $\theta_j=a_jy+b_j$, a_j,b_j — постоянные, а из (2.4), (2.20) получаем уравнение

$$\frac{\partial c_j}{\partial y}+\frac{k_\theta^j}{\theta_j}\frac{\partial\theta_j}{\partial y}=0,\quad j=1,2$$

при всех $y\in[-l,l]$. Следовательно,

$$c_{1,2}=-k_\theta^{1,2}\ln\theta_{1,2}+f_{1,2},\quad f_{1,2}=\text{const}, \tag{4.1}$$

то есть здесь, в отличие от классического случая, концентрации нелинейны по z.

Пусть $\theta_1 = \theta_{10}$ при $y = l$, $\theta_2 = \theta_{20}$ при $y = -l$, то есть на твердых стенках задана температура. Тогда, если учесть условия (2.3), (2.5) на поверхности раздела (условие (2.6) выполнено автоматически), легко подсчитывается, что (постоянная Генри μ, без ограничения общности, положена равной единице)

$$a_1 = \frac{\theta_{10} - \theta_{20}}{(\lambda+1)l}\,, \quad a_2 = \frac{\lambda}{(\lambda+1)l}\,(\theta_{10} - \theta_{20}), \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,,$$

$$b \equiv b_1 = b_2 = \theta_{20} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\,(\theta_{10} - \theta_{20}) > 0, \quad f_2 = f_1 + (k_\theta^2 - k_\theta^1)\ln b.$$

Таким образом,

$$\theta_1 = \theta_{20} + \frac{\theta_{10} - \theta_{20}}{\lambda+1}\,\left(\lambda + \frac{y}{l}\right), \quad \theta_2 = \theta_{20} + \frac{\lambda}{\lambda+1}(\theta_{10} - \theta_{20})\left(1 + \frac{y}{l}\right), \tag{4.2}$$

а концентрации определяются из (4.1). Легко понять, что равновесное состояние для данной системы не изменяется, если к обеим концентрациям добавить одну постоянную. Поэтому можно в (4.1) считать $f_1 = 0$.

Итак, невозмущенное движение описывается формулами (4.1)–(4.2), причем $\mathbf{u}_j = 0$, $\bar{p}_j = \mathrm{const}$. Ниже рассматриваются только стационарные возмущения, поэтому в уравнениях на возмущения исчезают все производные по времени.

Выберем в качестве масштаба длины, скорости, давления, температуры и концентрации соответственно величины l, ν_j/l, $\rho_j\nu_j^2/l^2$, $(\theta_{10} - \theta_{20})\nu_j/\chi_j$, k_θ^j, $j = 1, 2$. Уравнения малых возмущений (3.4)–(3.6), (3.8) в слоях $\Omega_1 = \{1 > \eta > 0,\ -\infty < \xi < \infty\}$, $\Omega_2 = \{-1 < \eta < 0,\ -\infty < \xi < \infty\}$ $(\xi = x/l,\ \eta = y/l)$ будут иметь вид

$$\begin{gathered} \nabla P_j = \Delta \mathbf{U}_j, \quad \operatorname{div}\mathbf{U}_j = 0, \\ \Delta T_j = \varepsilon_j V_j, \quad \Delta\left(C_j + \frac{T_j}{\theta_j}\right) = S_j V_j \frac{\partial c_j}{\partial \eta}\,, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\lambda+1}\,, \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,, \quad S_j = \frac{\nu_j}{d_j}\,; \tag{4.4}$$

S_j — число Шмидта в j-м слое.

Граничные условия (3.12)–(3.14), (3.19)–(3.21) преобразуются на поверхности раздела $\eta = 0$:

$$U_2 = \nu U_1, \quad V_2 = V_1 = 0, \quad C_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \eta}\,R = k_\theta\left(C_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \eta}\,R\right), \tag{4.5}$$

$$\rho\nu^2 P_1 - P_2 + 2V_{2\eta} - 2\rho\nu^2 V_{1\eta} = \mathrm{We} R_{\xi\xi}, \tag{4.6}$$

$$U_{2\eta} + V_{2\xi} - \rho\nu^2(U_{1\eta} + V_{1\xi}) = -\mathrm{M}\left(T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}\,R\right)_\xi - \mathrm{Sr}\left(C_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \eta}\,R\right)_\xi, \tag{4.7}$$

$$T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}\,R = \frac{\nu}{\chi}\left(T_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}\,R\right), \quad \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \frac{\lambda\nu}{\chi}\,\frac{\partial T_1}{\partial \eta}\,, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_2}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2}\,R + \frac{1}{\theta_2(0)}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}\right) = \\ &= \rho d k_\theta\left[\frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2}\,R + \frac{1}{\theta_1(0)}\left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{T_1}{\theta_1(0)}\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.9}$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} \nu = \nu_1/\nu_2, \quad k_\theta = k_\theta^1/k_\theta^2, \quad \rho = \rho_1/\rho_2, \quad \chi = \chi_1/\chi_2, d = d_1/d_2, \\ \mathrm{We} = \frac{\sigma_0 l}{\rho_2\nu_2^2} - \text{ число Вебера}, \quad \mathrm{M} = \frac{\delta(\theta_{10} - \theta_{20})l}{\rho_2\nu_2\chi_2} - \text{ число Марангони}, \\ \mathrm{Sr} = \frac{\gamma k_\theta^2 l}{\rho_2\nu_2^2} - \text{ число Соре}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Граничные условия на твердых стенках:

$$T_1 = 0, \quad \mathbf{U}_1 = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\theta_1}\,\frac{\partial T_1}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1; \tag{4.11}$$

$$T_2 = 0, \quad \mathbf{U}_2 = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \eta} + \frac{1}{\theta_2}\frac{\partial T_2}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = -1. \tag{4.12}$$

Задача (4.3)–(4.12) является спектральной задачей относительно числа Марангони M.

Будем искать решение поставленной задачи на собственные значения, пропорциональные $\exp(i\alpha\xi)$, α — безразмерное волновое число. В этом случае в слоях $\Omega_{1,2}$ система (4.3) имеет точное решение. Приведем его полностью $(j = 1, 2)$:

$$P_j = A_j \mathrm{sh}\alpha\eta + B_j \mathrm{ch}\alpha\eta; \tag{4.13}$$

$$U_j = \left(H_j + \frac{i}{2}B_j\eta\right)\mathrm{sh}\alpha\eta + \left(\tilde{\nu}F + \frac{i}{2}A_j\eta\right)\mathrm{ch}\alpha\eta; \tag{4.14}$$

$$V_j = \left(D_j + \frac{1}{2}A_j\eta\right)\mathrm{sh}\alpha\eta + \frac{1}{2}B_j\eta\mathrm{ch}\alpha\eta; \tag{4.15}$$

$$T_j = \left(Q_j - \frac{1}{8\alpha^2}\varepsilon_j A_j\eta + \frac{1}{8\alpha}\varepsilon_j B_j\eta^2\right)\mathrm{sh}\alpha\eta +$$

$$+\left[N_j + \left(\frac{1}{2\alpha}\varepsilon_j D_j - \frac{1}{8\alpha^2}\varepsilon_j B_j\right)\eta + \frac{1}{8\alpha}\varepsilon_j A_j\eta^2\right]\mathrm{ch}\alpha\eta; \tag{4.16}$$

$$C_j = \Phi_j \mathrm{sh}\alpha\eta + M_j \mathrm{ch}\alpha\eta - \frac{T_j}{\theta_j} + \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\eta f_1(\tau)\mathrm{sh}[\alpha(\eta-\tau)]d\tau, \\ \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_\eta^0 f_2(\tau)\mathrm{sh}[\alpha(\eta-\tau)]d\tau. \end{cases} \tag{4.17}$$

Здесь $A_j, B_j, H_j, F, D_j, Q_j, N_j, \Phi_j, M_j$ — постоянные, часть из которых должна определяться из граничных (4.5)–(4.12). Заметим, что на самом деле они зависят от волнового числа α. Величина $\tilde{\nu} = 1$ при $j = 1$ и $\tilde{\nu} = \nu$ при $j = 2$. Функции f_j таковы:

$$f_j = S_j V_j(\eta)\frac{\partial c_j}{\partial \eta}\,. \tag{4.18}$$

Выражения для скоростей U_1, U_2, V_1, V_2 согласованы с (4.5).

Предположим, что число Вебера $\mathrm{We} \gg 1$. В условиях орбитального полета космических станций число $\mathrm{We} \simeq 10^4 \div 10^6$. В этом случае поверхность раздела можно считать недеформируемой, то есть $R = 0$, и граничное условие (4.6) не учитывается в дальнейшем анализе.

Число Марангони M найдем из граничного условия (4.7) при $\eta = 0$ (после “отделения” переменной ξ; учтены также равенства $V_1 = V_2 = 0$ при $\eta = 0$): $\mathrm{M} = \dfrac{i(U_{2\eta} - \rho\nu^2 U_{1\eta}) - \alpha S_r C_2}{\alpha T_2}$.

Последняя формула может быть записана через постоянные H_1, A_1, H_2, A_2, N_2, M_2. Действительно, из (4.16) $T_2 = N_2$ при $y = 0$. Аналогично,

$$C_2 = M_2 - \frac{1}{\theta_2(0)}N_2, \quad U_{1\eta} = \alpha H_1 + \frac{i}{2}A_1, \quad U_{2\eta} = \alpha H_2 + \frac{i}{2}A_2.$$

Поэтому

$$\mathrm{M} = \frac{i\left[\alpha H_2 + \dfrac{i}{2}A_2 - \rho\nu^2(\alpha H_1 + \dfrac{i}{2}A_1)\right] - \alpha S_r\left(M_2 - \dfrac{1}{\theta_2(0)}N_2\right)}{\alpha N_2}\,. \tag{4.19}$$

Таким образом, необходимо связать величины H_1, H_2, A_1, A_2, M_2 с величиной N_2 и выразить их через A_1. После довольно длинных вычислений, которые здесь опустим, найдем выражение для числа Марангони

$$\mathrm{M} = \frac{8\chi(\lambda+1)^2}{\lambda\nu(1-\chi)\alpha F(\alpha)\ \mathrm{th}\ \alpha}\left\{\nu + \rho\nu^2 - \alpha\mathrm{Sr}\ \left[\frac{\lambda(\chi-1)(\rho dk_\theta + 1)F(\alpha)\ \mathrm{th}\ \alpha}{8(\lambda+1)^2(1+\rho d)\theta_1(0)} + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{2(1+\rho d)\alpha\ \mathrm{sh}\ \alpha}\int_0^1\left(\frac{\tau\ \mathrm{ch}\ \alpha\tau}{\alpha g(\alpha)} + (\tau - a(\alpha)\ \mathrm{sh}\ \alpha\tau\right)\times$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\rho dk_\theta S_1}{(\lambda+1)/(\mu-1)+\lambda+\tau} + \frac{\nu S_2}{(\lambda+1)/(\mu-1)+\lambda+\tau}\right)\mathrm{ch}\ \alpha(1-\tau)d\tau\right]\right\}. \tag{4.20}$$

Здесь

$$F(\alpha) = b(\alpha) - \frac{2a(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^4 g(\alpha)}, \quad b(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)}\left(\frac{\text{cth}\ \alpha}{\alpha} - 1\right) + \frac{2a(\alpha)\ \text{cth}\ \alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \text{cth}\ \alpha\right),$$

$$g(\alpha) = \text{cth}^2\alpha - \frac{\text{cth}\ \alpha}{\alpha} - 1 = \frac{1}{\text{sh}^2\alpha} - \frac{\text{cth}\ \alpha}{\alpha}, \quad a(\alpha) = 1 + \frac{\text{cth}\ \alpha}{\alpha g(\alpha)}, \quad f = \left(\frac{1}{\alpha} - \text{cth}\ \alpha\right)^{-1},$$

$\text{Pr} = \nu_1/\chi_1$ — число Прандтля, $\mu = \theta_{10}/\theta_{20} \neq 1$.

Формула (4.20) получена при условии $\chi = \chi_1/\chi_2 \neq 1$. Если же $\chi = 1$, то есть коэффициенты температуропроводностей жидкостей совпадают, возмущение температуры на поверхности раздела равно нулю. Поэтому термокапиллярный эффект отсутствует и можно найти критическое число Соре из граничного условия (4.7):

$$\text{Sr} = 2(1+\rho d)(\nu + \rho\nu^2)\ \text{sh}\ \alpha \left[\int_0^1 \left(\frac{\tau\ \text{ch}\ \alpha\tau}{\alpha g(\alpha)}\right) + (\tau - a(\alpha)\ \text{sh}\ \alpha\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\rho d k_\theta S_1}{(\lambda+1)/(\mu-1)+\lambda+\tau} + \frac{\nu S_2}{(\lambda+1)/(\mu-1)+\lambda+\lambda\tau}\right) \text{ch}\ \alpha(1-\tau) d\tau\right]^{-1}. \tag{4.21}$$

Список литературы

[1] Ландау Л.Д. *Гидродинамика* / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

[2] Napolitano L.G. *Plane Marangoni-Poiseulle flow two immiscible fluids* / L.G. Napolitano // Acta Astronautica. – 1980. – V. 7. – № 4,5. – P. 461-478.

[3] Пухначев В.В. *Движение вязкой жидкости со свободными границами:* Учеб. пособие / В.В.Пухначев. – Новосибирск: НГУ, 1989.

[4] Cox R.G. *The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface* / R.G. Cox // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 168. – P. 169-220.

[5] Dussan V.E.B. *On the spreading of liquids on solid surfaces: Static and dynamics contact lines* / V.E.B. Dussan // Annual Rev. Fluid Mech. – 1979. – V. 11. – P. 371-400.

[6] Пухначев В.В. *К вопросу о динамическом краевом угле* / В.В. Пухначев, В.А. Солонников // ПММ. – 1982. – Т. 46. – № 6. – С. 961-971.

[7] Андреев В.К. *Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей* / В.К.Андреев. – Новосибирск: Наука, 1992. – 136 с.

[8] Бляшке В. *Дифференциальная геометрия и основы теории относительности Эйнштейна* / В. Бляшке. – М., Л.: ОНТИ, 1936. – 250 с.

[9] Бабский В.Г. *Гидромеханика невесомости* / В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис и др. – М.: Наука, 1976. – 504 с.

THE LINEARIZED PROBLEM OF BINARY MIXTURE CONVECTION MOTION WITH INTERFACE

V.K. Andreev, M.V. Efimova

For convection equations of two binary mixtures with general interface the perturbation equations in linear approximation are derived. The equilibrium state of mixtures in flat layers with variable thermodiffusion coefficients are found. The stability of this equilibrium is investigated and critical Marangoni or Soret numbers are obtained.