

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.55

О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ МОНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

К.В. Кузвесов*

Описываются критические точки мономов на алгебраических гиперповерхностях.

Во многих вопросах полезно знать поведение мономиальной функции

$$z^q = z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}, \quad q \in \mathbb{Z}^n$$

на алгебраическом множестве $V \in \mathbb{C}^n$. Например, при исследовании экспоненциальных решений [1]

$$\Phi(x) = \int_{\gamma \in V} z^x \omega(z), \quad x \in \mathbb{Z}^n$$

линейных разностных уравнений $Q(\delta)f(x) = 0$ указанный интеграл является осциллирующим с фазой $\langle x, \ln z \rangle$. Асимптотика решения $\Phi(x)$ на диагонали $x = l \cdot q$, $l \rightarrow \infty$ определяется вкладом критических точек функции $\langle q, \ln |z| \rangle$, которые совпадают с критическими точками функции $|z^q|$.

Итак, рассмотрим алгебраическое многообразие V , заданное в комплексном торе $\mathbb{T}^n = \{\mathbb{C} \setminus 0\}^n$ нулями многочлена Лорана $Q(z)$:

$$V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}.$$

Напомним, что критические точки дифференцируемой функции на множестве регулярных точек V определяются нулями ее градиента.

Определение 1. Критическая точка z^0 функции $f \in C^\infty(\text{reg } V)$ называется морсовской, если в ней гессиан f отличен от нуля:

$$\text{hess } f|_V(z^0) \neq 0.$$

Определение 2. Мы будем говорить, что некоторое свойство выполняется для почти всех направлений $q \in \mathbb{Q}\mathbb{P}_{n-1}$, если оно выполняется для всех направлений q , за исключением некоторого алгебраического подмножества в $\mathbb{Q}\mathbb{P}_{n-1}$.

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. На многообразии $V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$ функции $|z^q| = |z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}|$ имеют лишь морсовские критические точки для почти всех направлений $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Для размерности $n = 2$ эта теорема была доказана в работе [2].

1. Связь критических точек с логарифмическим отображением Гаусса

Определение 3. Логарифмическим отображением Гаусса заданного алгебраического многообразия $V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$ называется отображение [3], [4]

$$\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1 Q'_{z_1} : \dots : z_n Q'_{z_n}),$$

где $Q'_{z_j} = \partial Q / \partial z_j$.

Свойство 1. Точка $z^0 \in \text{reg } V$ — критическая для функции $z^q|_V$ тогда и только тогда, когда логарифмическое отображение Гаусса принимает в ней значение q :

$$\gamma(z^0) = q.$$

* © К.В. Кузвесов, Красноярский государственный университет, 2006.

Доказательство. В силу гладкости V в точке z^0 градиент ∇Q в этой точке отличен от нуля. Предположим, что $Q'_{z_n} \neq 0$. В таком случае мы можем задать V в окрестности z^0 в виде графика $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$, считая $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ локальными координатами на V . Тогда условие критичности сужения на V голоморфной функции $f(z)$, заданной в объемлющем пространстве, есть система

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_i} = 0, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

Дифференцируя равенство $Q(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n(z')) = 0$ по z_i , получим $\frac{\partial z_n}{\partial z_i} = -\frac{Q'_{z_i}}{Q'_{z_n}}$. Поэтому

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_n} \frac{Q'_{z_i}}{Q'_{z_n}} = 0, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

Таким образом, условие критичности f в части множества V , где $Q'_{z_n} \neq 0$, эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{\partial(Q, f)}{\partial(z_i, z_n)} = 0, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

А по соображениям симметрии это равносильно переопределенной системе

$$\begin{cases} \frac{\partial(Q, f)}{\partial(z_i, z_j)} = 0, & i, j = 1..n. \end{cases}$$

Применяя эти условия к $f = z^q$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q, z^q)}{\partial(z_i, z_j)} &= \begin{vmatrix} Q'_{z_i} & Q'_{z_j} \\ q_i z^{q-e_i} & q_j z^{q-e_j} \end{vmatrix} = z^{q-e_i-e_j} \begin{vmatrix} Q'_{z_i} & Q'_{z_j} \\ q_i z_j & q_j z_i \end{vmatrix} = \\ &= z^{q-e_i-e_j} (q_j z_i Q'_{z_i} - q_i z_j Q'_{z_j}) = 0, \end{aligned}$$

что и означает $\gamma(z^0) = q$:

$$z_i Q'_{z_i} : z_j Q'_{z_j} = q_i : q_j \Rightarrow (q_1 : \dots : q_n) = (z_1 Q'_{z_1} : \dots : z_n Q'_{z_n})$$

□

2. Вспомогательные утверждения

Следующие две леммы показывают, что морсовские критические точки модуля монома $|z^q|$ и самого монома z^q на V совпадают. Третья лемма связывает нули гессиана от произведения функций с нулями гессиана одного из сомножителей. Для упрощения вычислений, связанных с критическими точками модуля голоморфной функции в \mathbb{C}^m переменных ζ_1, \dots, ζ_m , он рассматривается как функция переменных $\zeta_k, \bar{\zeta}_k$.

Лемма 1. Для функции $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ множество критических точек квадрата модуля $|f|^2$ есть объединение множества комплексных критических точек самой f и множества $\{f = 0\}$.

Доказательство. В самом деле, вычисляя производные, получим:

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial \zeta_k} = f'_{\zeta_k} \bar{f} = 0, \quad \frac{\partial |f|^2}{\partial \bar{\zeta}_k} = f \overline{f'_{\zeta_k}} = 0,$$

и эти равенства выполняются тогда и только тогда, когда $f'_{\zeta_k} = 0$ для $\forall k = 1..m$ либо $f = 0$. □

Лемма 2. В критических точках функции $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ выполняется равенство

$$\text{hess } |f|^2 = |f|^{2m} \text{hess } f|^2.$$

Доказательство. Выпишем гессиан $\text{hess } |f|^2 = \text{hess } f \bar{f}$ и рассмотрим его в точке, в которой $\nabla f = 0$:

$$\begin{aligned} \text{hess } |f|^2 &= \begin{vmatrix} f''_{11}\bar{f} & f'_1\bar{f}'_1 & \cdots & f''_{1m}\bar{f} & f'_1\bar{f}'_m \\ f'_1\bar{f}'_1 & f f''_{11} & \cdots & f'_1\bar{f}'_m & f f''_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{m1}\bar{f} & f'_m\bar{f}'_1 & \cdots & f''_{mm}\bar{f} & f'_m\bar{f}'_m \\ f'_m\bar{f}'_1 & f f''_{m1} & \cdots & f'_m\bar{f}'_m & f f''_{mm} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} f''_{11}\bar{f} & 0 & \cdots & f''_{1m}\bar{f} & 0 \\ 0 & f f''_{11} & \cdots & 0 & f f''_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{m1}\bar{f} & 0 & \cdots & f''_{mm}\bar{f} & 0 \\ 0 & f f''_{m1} & \cdots & 0 & f f''_{mm} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $f'_i = \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}$, $f''_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}$.

Заметим, что из нечетных строк выносятся \bar{f} , из четных – f , а оставшиеся элементы определителя расположены так, что в каждой строке и каждом столбце находятся либо прямые, либо сопряженные производные. Группируя производные с помощью перестановки строк и столбцов определителя (число перестановок четное, т.к. мы одинаковым способом переставляем столбцы и строки, следовательно, знак определителя сохраняется) получаем искомый результат:

$$\begin{aligned} \text{hess } |f|^2 &= f^m \bar{f}^m \begin{vmatrix} f''_{11} & 0 & \cdots & f''_{1m} & 0 \\ 0 & f''_{11} & \cdots & 0 & f''_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{m1} & 0 & \cdots & f''_{mm} & 0 \\ 0 & f''_{m1} & \cdots & 0 & f''_{mm} \end{vmatrix} = \\ &= |f|^{2m} \begin{vmatrix} f''_{11} & \cdots & f''_{1m} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ f''_{m1} & \cdots & f''_{mm} & & \\ & & & f''_{11} & \cdots & f''_{1m} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & f''_{m1} & \cdots & f''_{mm} \end{vmatrix} = |f|^{2m} |\text{hess } f|^2 \end{aligned}$$

□

Лемма 3. Якобиан системы m функций $f_k = \varphi_k \psi_k$ от переменных ζ_1, \dots, ζ_m , рассмотренный в точке ζ^0 , такой что $\varphi_k(\zeta^0) \neq 0$, $\psi_k(\zeta^0) = 0$, обращается в ноль одновременно с якобианом функций ψ_k :

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_m)} = 0 \iff \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_m)}{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_m)} = 0.$$

Доказательство. Производные f_k следующие:

$$(f_k)'_{\zeta_j} = (\varphi_k)'_{\zeta_j} \psi_k + \varphi_k (\psi_k)'_{\zeta_j}.$$

Рассматривая их в точке ζ^0 , обратим внимание, что в строках определителя выносятся $\varphi_k(\zeta^0) \neq 0$:

$$(f_k)'_{\zeta_j}(\zeta^0) = \varphi_k(\zeta^0) (\psi_k)'_{\zeta_j}(\zeta^0),$$

что и требовалось. □

3. Доказательство основной теоремы

С учетом Лемм 1 и 2 морсовские критические точки модуля $|z^q|$ и монома z^q совпадают.

Пусть z^0 – критическая точка для $z^q|_V$. Будем предполагать, как и в доказательстве Предложения 1, что в точке z^0 производная $Q'_{z_n} \neq 0$, тем самым V задается в окрестности z^0 графиком $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$. Согласно Предложению 1, для логарифмического отображения Гаусса

$$\gamma : \text{reg } V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$$

имеем $\gamma(z^0) = q$, т.е. для $z \in \text{reg } V$

$$\begin{cases} \frac{z_i Q'_{z_i}}{z_n Q'_{z_n}} = \frac{q_i}{q_n}, & i = 1..n-1. \end{cases} \quad (*)$$

По известной теореме Шевалле [5, Гл. 5, §2] множество критических значений отображения γ лежит в некоторой комплексной гиперповерхности $\Gamma \in \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$. Пересечение $\Gamma \cap \mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}$ лежит в вещественной аналитической гиперповерхности из $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}$, которая нигде не плотна. Поэтому почти при любых значениях q_1, \dots, q_n система (*) имеет лишь простые корни.

Так как $\frac{Q'_{z_k}}{Q'_{z_n}} = -(z_n)'_{z_k}$, система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{z_i}{z_n} (z_n)'_{z_k} = -\frac{q_i}{q_n}, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

Условием кратности решения системы является равенство нулю ее якобиана. Покажем, что это условие эквивалентно $\text{hess } z^q = 0$.

Рассматривая гессиан $\text{hess } z^q$ как якобиан градиента, вычислим ∇z^q :

$$(z^q)'_{z_k} = q_k \frac{z^q}{z_k} + q_n \frac{z^q}{z_n} (z_n)'_{z_k} = z^q \frac{z_k}{q_n} \left(\frac{q_k}{z_n} + \frac{z_k}{z_n} (z_n)'_{z_k} \right).$$

Применяя к полученному выражению Лемму 3, получим, что $\text{hess } z^q = 0$ лишь в точках, где система (*) имеет кратный корень.

Согласно теории Морса, структура многообразия V определяется индексами невырожденных критических точек рассматриваемой на нем дифференцируемой функции – в нашем случае $|z^q|$.

Индексом критической точки называется число отрицательных знаков в нормальной форме квадратичной части рассматриваемой функции. Следующее предложение показывает, что индекс $|z^q|$ в любой критической точке равен $(n-1)$.

Свойство 2. В некоторой системе координат квадратичная часть $|z^q|$ в морсовских критических точках содержит $n-1$ членов со знаком плюс и $n-1$ членов со знаком минус.

Доказательство. Предположим $Q'_{z_n} \neq 0$ и рассмотрим

$$|z^q| = e^{\ln |z^q|} = e^{\text{Re } \ln z^q}$$

в локальных координатах $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$. Пусть Q – квадратичная часть ряда Тейлора для $\ln z^q$ в критической точке z^0 . Покажем, что $Q \neq 0$.

В морсовской точке z^0

$$z^q = C + Q_1 + \dots,$$

где $C = (z^0)^q$ – значение монома, а Q_1 – его квадратичная часть, являющаяся функцией переменных z_1, \dots, z_{n-1} . Следовательно,

$$\ln(C + Q_1 + \dots) = \ln C + \frac{1}{C} Q_1 + \dots \Rightarrow Q = \frac{1}{C} Q_1 \neq 0.$$

Обозначим $Q' = \text{Re } Q$ – действительная часть Q . Известно, что существует ортогональное преобразование T , приводящее матрицу Q' к диагональному виду: $T^t Q' T$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующий результат.

Лемма 4 ([6, гл. I, §7]). Пусть Q – квадратичная форма комплексных переменных ζ_1, \dots, ζ_m , $Q' = \text{Re } Q$ – ее действительная часть:

$$\begin{aligned} Q(\zeta_1, \dots, \zeta_m) &= \sum a_{kl} \zeta_k \zeta_l, \\ Q'(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) &= \text{Re} \sum a_{kl} (x_k + iy_k)(x_l + iy_l). \end{aligned}$$

Тогда, если λ – собственное значение формы Q' кратности μ , то $-\lambda$ – собственное значение формы Q' той же кратности.

По Лемме 4 матрица Q' имеет одинаковое число положительных и отрицательных собственных чисел. Диагональная матрица $T^t Q' T$ имеет те же собственные числа, т.е. на ее диагонали находятся $n - 1$ положительных и $n - 1$ отрицательных чисел, а следовательно, квадратичная часть для $\ln |z^q|$ в некоторой системе координат содержит $n - 1$ членов со знаком плюс и $n - 1$ членов со знаком минус.

Из разложения экспоненты

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots$$

очевидно, что квадратичная часть $|z^q|$ совпадает с рассмотренной квадратичной частью $\ln |z^q|$. □

Список литературы

- [1] ЛЕЙНАРТАС Е.К. *Асимптотика многомерных разностных уравнений*/ Е.К.ЛЕЙНАРТАС, М.ПАС-САРЕ, А.К.ЦИХ // Успехи мат. наук. – 2005. – Т. 6. – с.155-156.
- [2] ЛЕЙНАРТАС Д.Е. *Асимптотика коэффициентов Тейлора рациональных функций многих переменных*/ Д.Е.ЛЕЙНАРТАС// Дисс. к.ф.-м.н. КГУ, 2002. – 65 с.
- [3] KAPRANOV M.M. *A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map*/ M.M.KAPRANOV // Math. Ann. 1991. – V. 290. – P. 277-285.
- [4] PASSARE M. *Amoebas: their spines and their contours*/ M.PASSARE, A.TSIKH // Contemporary Math. 2005. – V. 377. – 370 pp.
- [5] ФЕДОРЮК М.В. *Метод перевала*/ М.В.ФЕДОРЮК. – М.: Наука, 1977.
- [6] МИЛНОР ДЖ. *Теория Морса* / ДЖ.МИЛНОР. – М.: Мир, 1965. – 182 с.

ON SINGULAR POINTS OF MONOMIALS ON ALGEBRAIC HYPERSURFACES

K.V.Kuzvesov

It is discribed the singular points of monomials on algebraic hypersurfaces.