

# КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.55

## О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ МОНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

К.В. Кузвесов\*

*Описываются критические точки мономов на алгебраических гиперповерхностях.*

Во многих вопросах полезно знать поведение мономиальной функции

$$z^q = z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}, \quad q \in \mathbb{Z}^n$$

на алгебраическом множестве  $V \in \mathbb{C}^n$ . Например, при исследовании экспоненциальных решений [1]

$$\Phi(x) = \int_{\gamma \in V} z^x \omega(z), \quad x \in \mathbb{Z}^n$$

линейных разностных уравнений  $Q(\delta)f(x) = 0$  указанный интеграл является осциллирующим с фазой  $\langle x, \ln z \rangle$ . Асимптотика решения  $\Phi(x)$  на диагонали  $x = l \cdot q$ ,  $l \rightarrow \infty$  определяется вкладом критических точек функции  $\langle q, \ln |z| \rangle$ , которые совпадают с критическими точками функции  $|z^q|$ .

Итак, рассмотрим алгебраическое многообразие  $V$ , заданное в комплексном торе  $\mathbb{T}^n = \{\mathbb{C} \setminus 0\}^n$  нулями многочлена Лорана  $Q(z)$ :

$$V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}.$$

Напомним, что критические точки дифференцируемой функции на множестве регулярных точек  $V$  определяются нулями ее градиента.

**Определение 1.** Критическая точка  $z^0$  функции  $f \in C^\infty(\text{reg } V)$  называется морсовской, если в ней гессиан  $f$  отличен от нуля:

$$\text{hess } f|_V(z^0) \neq 0.$$

**Определение 2.** Мы будем говорить, что некоторое свойство выполняется для почти всех направлений  $q \in \mathbb{Q}\mathbb{P}_{n-1}$ , если оно выполняется для всех направлений  $q$ , за исключением некоторого алгебраического подмножества в  $\mathbb{Q}\mathbb{P}_{n-1}$ .

Основным результатом настоящей статьи является

**Теорема 1.** На многообразии  $V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$  функции  $|z^q| = |z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}|$  имеют лишь морсовские критические точки для почти всех направлений  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ .

Для размерности  $n = 2$  эта теорема была доказана в работе [2].

## 1. Связь критических точек с логарифмическим отображением Гаусса

**Определение 3.** Логарифмическим отображением Гаусса заданного алгебраического многообразия  $V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$  называется отображение [3], [4]

$$\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1 Q'_{z_1} : \dots : z_n Q'_{z_n}),$$

где  $Q'_{z_j} = \partial Q / \partial z_j$ .

**Свойство 1.** Точка  $z^0 \in \text{reg } V$  — критическая для функции  $z^q|_V$  тогда и только тогда, когда логарифмическое отображение Гаусса принимает в ней значение  $q$ :

$$\gamma(z^0) = q.$$

\* © К.В. Кузвесов, Красноярский государственный университет, 2006.

*Доказательство.* В силу гладкости  $V$  в точке  $z^0$  градиент  $\nabla Q$  в этой точке отличен от нуля. Предположим, что  $Q'_{z_n} \neq 0$ . В таком случае мы можем задать  $V$  в окрестности  $z^0$  в виде графика  $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ , считая  $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$  локальными координатами на  $V$ . Тогда условие критичности сужения на  $V$  голоморфной функции  $f(z)$ , заданной в объемлющем пространстве, есть система

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_i} = 0, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

Дифференцируя равенство  $Q(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n(z')) = 0$  по  $z_i$ , получим  $\frac{\partial z_n}{\partial z_i} = -\frac{Q'_{z_i}}{Q'_{z_n}}$ . Поэтому

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_n} \frac{Q'_{z_i}}{Q'_{z_n}} = 0, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

Таким образом, условие критичности  $f$  в части множества  $V$ , где  $Q'_{z_n} \neq 0$ , эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{\partial(Q, f)}{\partial(z_i, z_n)} = 0, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

А по соображениям симметрии это равносильно переопределенной системе

$$\begin{cases} \frac{\partial(Q, f)}{\partial(z_i, z_j)} = 0, & i, j = 1..n. \end{cases}$$

Применяя эти условия к  $f = z^q$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q, z^q)}{\partial(z_i, z_j)} &= \begin{vmatrix} Q'_{z_i} & Q'_{z_j} \\ q_i z^{q-e_i} & q_j z^{q-e_j} \end{vmatrix} = z^{q-e_i-e_j} \begin{vmatrix} Q'_{z_i} & Q'_{z_j} \\ q_i z_j & q_j z_i \end{vmatrix} = \\ &= z^{q-e_i-e_j} (q_j z_i Q'_{z_i} - q_i z_j Q'_{z_j}) = 0, \end{aligned}$$

что и означает  $\gamma(z^0) = q$ :

$$z_i Q'_{z_i} : z_j Q'_{z_j} = q_i : q_j \Rightarrow (q_1 : \dots : q_n) = (z_1 Q'_{z_1} : \dots : z_n Q'_{z_n})$$

□

## 2. Вспомогательные утверждения

Следующие две леммы показывают, что морсовские критические точки модуля монома  $|z^q|$  и самого монома  $z^q$  на  $V$  совпадают. Третья лемма связывает нули гессиана от произведения функций с нулями гессиана одного из сомножителей. Для упрощения вычислений, связанных с критическими точками модуля голоморфной функции в  $\mathbb{C}^m$  переменных  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , он рассматривается как функция переменных  $\zeta_k, \bar{\zeta}_k$ .

**Лемма 1.** Для функции  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$  множество критических точек квадрата модуля  $|f|^2$  есть объединение множества комплексных критических точек самой  $f$  и множества  $\{f = 0\}$ .

*Доказательство.* В самом деле, вычисляя производные, получим:

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial \zeta_k} = f'_{\zeta_k} \bar{f} = 0, \quad \frac{\partial |f|^2}{\partial \bar{\zeta}_k} = f \overline{f'_{\zeta_k}} = 0,$$

и эти равенства выполняются тогда и только тогда, когда  $f'_{\zeta_k} = 0$  для  $\forall k = 1..m$  либо  $f = 0$ . □

**Лемма 2.** В критических точках функции  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$  выполняется равенство

$$\text{hess } |f|^2 = |f|^{2m} \text{hess } f|^2.$$

*Доказательство.* Выпишем гессиан  $\text{hess } |f|^2 = \text{hess } f \bar{f}$  и рассмотрим его в точке, в которой  $\nabla f = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{hess } |f|^2 &= \begin{vmatrix} f''_{11}\bar{f} & f'_1\bar{f}'_1 & \cdots & f''_{1m}\bar{f} & f'_1\bar{f}'_m \\ f'_1\bar{f}'_1 & f f''_{11} & \cdots & f'_1\bar{f}'_m & f f''_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{m1}\bar{f} & f'_m\bar{f}'_1 & \cdots & f''_{mm}\bar{f} & f'_m\bar{f}'_m \\ f'_m\bar{f}'_1 & f f''_{m1} & \cdots & f'_m\bar{f}'_m & f f''_{mm} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} f''_{11}\bar{f} & 0 & \cdots & f''_{1m}\bar{f} & 0 \\ 0 & f f''_{11} & \cdots & 0 & f f''_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{m1}\bar{f} & 0 & \cdots & f''_{mm}\bar{f} & 0 \\ 0 & f f''_{m1} & \cdots & 0 & f f''_{mm} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где  $f'_i = \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}$ ,  $f''_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}$ .

Заметим, что из нечетных строк выносятся  $\bar{f}$ , из четных –  $f$ , а оставшиеся элементы определителя расположены так, что в каждой строке и каждом столбце находятся либо прямые, либо сопряженные производные. Группируя производные с помощью перестановки строк и столбцов определителя (число перестановок четное, т.к. мы одинаковым способом переставляем столбцы и строки, следовательно, знак определителя сохраняется) получаем искомый результат:

$$\begin{aligned} \text{hess } |f|^2 &= f^m \bar{f}^m \begin{vmatrix} f''_{11} & 0 & \cdots & f''_{1m} & 0 \\ 0 & f''_{11} & \cdots & 0 & f''_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f''_{m1} & 0 & \cdots & f''_{mm} & 0 \\ 0 & f''_{m1} & \cdots & 0 & f''_{mm} \end{vmatrix} = \\ &= |f|^{2m} \begin{vmatrix} f''_{11} & \cdots & f''_{1m} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ f''_{m1} & \cdots & f''_{mm} & & \\ & & & f''_{11} & \cdots & f''_{1m} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & f''_{m1} & \cdots & f''_{mm} \end{vmatrix} = |f|^{2m} |\text{hess } f|^2 \end{aligned}$$

□

**Лемма 3.** Якобиан системы  $m$  функций  $f_k = \varphi_k \psi_k$  от переменных  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , рассмотренный в точке  $\zeta^0$ , такой что  $\varphi_k(\zeta^0) \neq 0$ ,  $\psi_k(\zeta^0) = 0$ , обращается в ноль одновременно с якобианом функций  $\psi_k$ :

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_m)} = 0 \iff \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_m)}{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_m)} = 0.$$

*Доказательство.* Производные  $f_k$  следующие:

$$(f_k)'_{\zeta_j} = (\varphi_k)'_{\zeta_j} \psi_k + \varphi_k (\psi_k)'_{\zeta_j}.$$

Рассматривая их в точке  $\zeta^0$ , обратим внимание, что в строках определителя выносятся  $\varphi_k(\zeta^0) \neq 0$ :

$$(f_k)'_{\zeta_j}(\zeta^0) = \varphi_k(\zeta^0) (\psi_k)'_{\zeta_j}(\zeta^0),$$

что и требовалось. □

### 3. Доказательство основной теоремы

С учетом Лемм 1 и 2 морсовские критические точки модуля  $|z^q|$  и монома  $z^q$  совпадают.

Пусть  $z^0$  – критическая точка для  $z^q|_V$ . Будем предполагать, как и в доказательстве Предложения 1, что в точке  $z^0$  производная  $Q'_{z_n} \neq 0$ , тем самым  $V$  задается в окрестности  $z^0$  графиком  $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ . Согласно Предложению 1, для логарифмического отображения Гаусса

$$\gamma : \text{reg } V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$$

имеем  $\gamma(z^0) = q$ , т.е. для  $z \in \text{reg } V$

$$\begin{cases} \frac{z_i Q'_{z_i}}{z_n Q'_{z_n}} = \frac{q_i}{q_n}, & i = 1..n-1. \end{cases} \quad (*)$$

По известной теореме Шевалле [5, Гл. 5, §2] множество критических значений отображения  $\gamma$  лежит в некоторой комплексной гиперповерхности  $\Gamma \in \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$ . Пересечение  $\Gamma \cap \mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}$  лежит в вещественной аналитической гиперповерхности из  $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}$ , которая нигде не плотна. Поэтому почти при любых значениях  $q_1, \dots, q_n$  система (\*) имеет лишь простые корни.

Так как  $\frac{Q'_{z_k}}{Q'_{z_n}} = -(z_n)'_{z_k}$ , система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{z_i}{z_n} (z_n)'_{z_k} = -\frac{q_i}{q_n}, & i = 1..n-1. \end{cases}$$

Условием кратности решения системы является равенство нулю ее якобиана. Покажем, что это условие эквивалентно  $\text{hess } z^q = 0$ .

Рассматривая гессиан  $\text{hess } z^q$  как якобиан градиента, вычислим  $\nabla z^q$ :

$$(z^q)'_{z_k} = q_k \frac{z^q}{z_k} + q_n \frac{z^q}{z_n} (z_n)'_{z_k} = z^q \frac{z_k}{q_n} \left( \frac{q_k}{z_n} + \frac{z_k}{z_n} (z_n)'_{z_k} \right).$$

Применяя к полученному выражению Лемму 3, получим, что  $\text{hess } z^q = 0$  лишь в точках, где система (\*) имеет кратный корень.

Согласно теории Морса, структура многообразия  $V$  определяется индексами невырожденных критических точек рассматриваемой на нем дифференцируемой функции – в нашем случае  $|z^q|$ .

Индексом критической точки называется число отрицательных знаков в нормальной форме квадратичной части рассматриваемой функции. Следующее предложение показывает, что индекс  $|z^q|$  в любой критической точке равен  $(n-1)$ .

**Свойство 2.** В некоторой системе координат квадратичная часть  $|z^q|$  в морсовских критических точках содержит  $n-1$  членов со знаком плюс и  $n-1$  членов со знаком минус.

*Доказательство.* Предположим  $Q'_{z_n} \neq 0$  и рассмотрим

$$|z^q| = e^{\ln |z^q|} = e^{\text{Re } \ln z^q}$$

в локальных координатах  $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ . Пусть  $Q$  – квадратичная часть ряда Тейлора для  $\ln z^q$  в критической точке  $z^0$ . Покажем, что  $Q \neq 0$ .

В морсовской точке  $z^0$

$$z^q = C + Q_1 + \dots,$$

где  $C = (z^0)^q$  – значение монома, а  $Q_1$  – его квадратичная часть, являющаяся функцией переменных  $z_1, \dots, z_{n-1}$ . Следовательно,

$$\ln(C + Q_1 + \dots) = \ln C + \frac{1}{C} Q_1 + \dots \Rightarrow Q = \frac{1}{C} Q_1 \neq 0.$$

Обозначим  $Q' = \text{Re } Q$  – действительная часть  $Q$ . Известно, что существует ортогональное преобразование  $T$ , приводящее матрицу  $Q'$  к диагональному виду:  $T^t Q' T$ .

Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующий результат.

**Лемма 4** ([6, гл. I, §7]). Пусть  $Q$  – квадратичная форма комплексных переменных  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ ,  $Q' = \text{Re } Q$  – ее действительная часть:

$$\begin{aligned} Q(\zeta_1, \dots, \zeta_m) &= \sum a_{kl} \zeta_k \zeta_l, \\ Q'(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) &= \text{Re} \sum a_{kl} (x_k + iy_k)(x_l + iy_l). \end{aligned}$$

Тогда, если  $\lambda$  – собственное значение формы  $Q'$  кратности  $\mu$ , то  $-\lambda$  – собственное значение формы  $Q'$  той же кратности.

По Лемме 4 матрица  $Q'$  имеет одинаковое число положительных и отрицательных собственных чисел. Диагональная матрица  $T^t Q' T$  имеет те же собственные числа, т.е. на ее диагонали находятся  $n - 1$  положительных и  $n - 1$  отрицательных чисел, а следовательно, квадратичная часть для  $\ln |z^q|$  в некоторой системе координат содержит  $n - 1$  членов со знаком плюс и  $n - 1$  членов со знаком минус.

Из разложения экспоненты

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots$$

очевидно, что квадратичная часть  $|z^q|$  совпадает с рассмотренной квадратичной частью  $\ln |z^q|$ . □

## Список литературы

- [1] ЛЕЙНАРТАС Е.К. *Асимптотика многомерных разностных уравнений*/ Е.К.ЛЕЙНАРТАС, М.ПАС-САРЕ, А.К.ЦИХ // Успехи мат. наук. – 2005. – Т. 6. – с.155-156.
- [2] ЛЕЙНАРТАС Д.Е. *Асимптотика коэффициентов Тейлора рациональных функций многих переменных*/ Д.Е.ЛЕЙНАРТАС// Дисс. к.ф.-м.н. КГУ, 2002. – 65 с.
- [3] KAPRANOV M.M. *A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map*/ M.M.KAPRANOV // Math. Ann. 1991. – V. 290. – P. 277-285.
- [4] PASSARE M. *Amoebas: their spines and their contours*/ M.PASSARE, A.TSIKH // Contemporary Math. 2005. – V. 377. – 370 pp.
- [5] ФЕДОРЮК М.В. *Метод перевала*/ М.В.ФЕДОРЮК. – М.: Наука, 1977.
- [6] МИЛНОР ДЖ. *Теория Морса* / ДЖ.МИЛНОР. – М.: Мир, 1965. – 182 с.

### ON SINGULAR POINTS OF MONOMIALS ON ALGEBRAIC HYPERSURFACES

K.V.Kuzvesov

*It is discribed the singular points of monomials on algebraic hypersurfaces.*