

УДК 530.12:531.51

## ПРИНЦИП ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

И.Р.Мубаракшин, А.А.Агафонов\*

*На основе принципа геодезического движения пробных тел в гравитационном поле определено ускорение свободного падения в терминах наблюдаемых физических величин и применено к полному полю Шварцшильда. Поскольку ускорение оказывается зависящим от скорости, то найдено его значение для мгновенно покоящейся частицы, которое непосредственно должно совпадать с величиной, определяемой в гравиметрических экспериментах.*

Гравитационное поле сферически симметричного источника вне этого источника описывается внешним решением Шварцшильда, вакуумным решением уравнений Эйнштейна. Поле внутри источника описывается внутренним решением Шварцшильда, т.е. решением уравнений Эйнштейна в материальной среде с использованием какого-то уравнения состояния. Каждое из этих решений предполагает использование своей координатной карты, и поверхность источника является границей, на которой должны сшиваться карты и решения.

В соответствии с принципом геодезических [1, 2] движений в гравитационном поле (свободное падение) пробных тел должно происходить по геодезическим. Рассматривая внешнее и внутреннее решения как описание единого гравитационного поля, приходим к требованию, что геодезические внешнего решения должны переходить в геодезические внутреннего решения. При этом движение пробного тела внутри источника предполагается происходящим в достаточно узкой полости вдоль траектории, так что тело не испытывает сопротивления вещества источника, а сама полость не создает заметного искажения гравитационного поля.

В настоящей работе рассмотрены радиальные времениподобные геодезические полного поля Шварцшильда и показано однозначное соответствие геодезических, подходящих к границе внешнего и внутреннего решений, получено выражение для ускорения свободного падения.

Возьмем центрально-симметричную статическую метрику

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi.$$

Пусть  $r = R$  — граница источника или распределения вещества, создающего гравитационное поле.

\* © И.Р.Мубаракшин; Марийский государственный университет (Россия), 2005; E-mail: mubaair@mail.ru; А.А.Агафонов; Марийский государственный университет (Россия), 2005; E-mail: aga4nov@mail.ru

Область вне источника,  $r > R$ , — область внешнего решения, или решения вакуумных уравнений. Таким решением является внешнее решение Шварцшильда [1]:

$$e^{\nu(r)} = 1 - \frac{\alpha}{r}, \quad e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}, \quad (2)$$

где  $\alpha = \frac{2kM}{c^2}$ ,  $M$  — масса источника,  $k$  — ньютоновская гравитационная постоянная.

Область внутри источника,  $r < R$ , — область внутреннего решения, решения уравнений Эйнштейна в среде. Рассматривая среду как идеальную жидкость и используя уравнение состояния идеальной жидкости, можно получить внутреннее решение Шварцшильда для идеальной жидкости [2]:

$$e^{\nu} = \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - qR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - qr^2} \right)^2, \quad e^{\lambda} = \frac{1}{1 - qr}, \quad (3)$$

где  $q = \frac{1}{3} \chi \mu_0$ ,  $\chi = \frac{8\pi k}{c^2}$  — эйнштейновская гравитационная постоянная,  $\mu_0$  — плотность жидкости.

Решения (1), (2) и (1), (3) на границе  $r = R$  удовлетворяют всем условиям сшивания. Уравнения геодезических в общем случае имеют вид [1]:

$$\frac{d}{ds} \left( g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (4)$$

Будем рассматривать времениподобные геодезические, для которых

$$g_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1. \quad (5)$$

Для радиальных геодезических  $\frac{dx^2}{ds} = 0$ ,  $\frac{dx^3}{ds} = 0$ . Из уравнений (4), (5) найдем первые интегралы:

$$\frac{dx^0}{ds} = B e^{-\nu}, \quad \frac{dx^1}{ds} = \pm \sqrt{e^{-(\nu+\lambda)} (B^2 - e^\nu)}, \quad (6)$$

где  $B$  — постоянная интегрирования,  $B > 0$ .

Исключая из (6) канонический параметр, получим дифференциальное уравнение радиальных геодезических

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \pm \frac{1}{B} e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \sqrt{B^2 - e^\nu}, \quad (7)$$

которые непосредственно соответствуют орбитам пробных тел в центральном поле.

Из уравнения (7) видно, что различные геодезические (орбиты) будут отличаться значением константы  $B$ , другими словами, значения константы  $B$  нумеруют геодезические всего семейства. Физически разные значения  $B$  соответствуют различным значениям начальной скорости.

Из (7) следует, что возможные значения постоянной  $B$  определяются условием

$$B^2 - e^\nu \geq 0. \quad (8)$$

Для внешнего решения (2) условие (8) примет вид

$$B^2 \geq 1 - \frac{\alpha}{r}. \quad (9)$$

Видно, что если  $B \geq 1$ , то уравнение геодезических (7) остается справедливым при любых сколь угодно больших  $r$ . Следовательно, такие радиальные геодезические уходят на бесконечность и соответствуют инфинитному движению. Если  $B < 1$ , то из условия (9) получаем область возможного движения:  $r \leq \frac{\alpha}{1 - B^2}$ ,

при этом величина  $B$  ограничена снизу значением:

$$B \geq B_{\min\_ex} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}. \quad (10)$$

Для внутреннего решения (3) условие (8) дает:

$$B \geq \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - qR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - qr^2} \right). \quad (11)$$

Если

$$B > \sqrt{1 - qR^2}, \quad (12)$$

то условие (11) выполняется для всех  $r$  внутренней области и соответствующие геодезические уходят через поверхность источника  $r = R$  во внешнюю область.

Так как  $qR^2 = \frac{1}{3} \chi \mu_0 R^2 = \frac{\alpha}{R}$ , то  $\sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}} = \sqrt{1 - qR^2}$ . Следовательно, область значений  $B$  (12) для геодезических внутреннего решения совпадает с областями (9) и (10) значений  $B$  для геодезических внешнего решения. Это позволяет сделать вывод об однозначном соответствии радиальных геодезических, подходящих к границе источника со стороны внешнего и со стороны внутреннего решений.

Если  $\frac{3}{2} \sqrt{1 - qR^2} - \frac{1}{2} \leq B < \sqrt{1 - qR^2}$ , то соответствующие геодезические не выходят за пределы источника, что означает финитное движение во внутренней области.

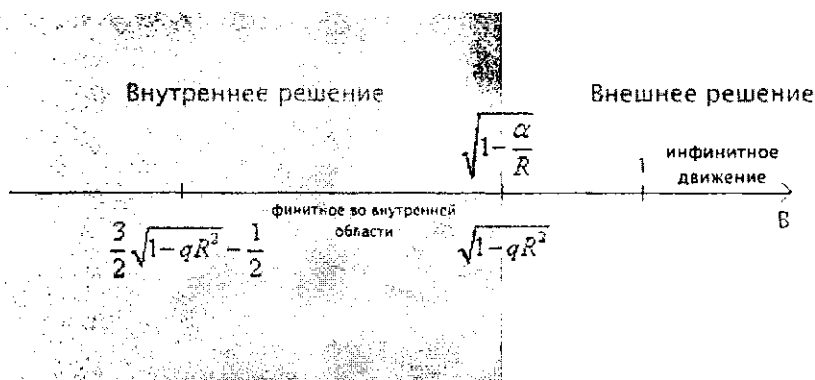


Рис. 1

На рис. 1 показаны возможные значения параметра  $B$  для внешнего решения (над числовой осью) и для внутреннего (под числовой осью). Отмечены  $B_{\min}$  для внешнего решения и  $B_{\min}$  для внутреннего решения. Затемненная область выделяет значения  $B$ , отвечающие финитному движению во внутренней области, значения  $B$  от  $\sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}} = \sqrt{1 - qR^2}$  до 1 соответствуют финитному движению, происходящему во внутренней и внешней областях, значения  $B \geq 1$  отвечают инфинитному движению во всем пространстве полного поля Шварцшильда.

Воспользуемся радиальными геодезическими для определения параметров свободного падения. Пусть  $dl = e^{\lambda/2} dr$  — элемент пространственного расстояния, отвечающего приращению радиальной координаты  $dr$ ,  $d\tau = e^{\nu/2} dt$  — элемент физического или истинного времени, отвечающего приращению  $dt$  [1].

Определим скорость свободного падения как отношение

$$V = \frac{dl}{d\tau} = ce^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \frac{dx^1}{dx^0},$$

где приращения  $dx^1$  и  $dx^0$  связаны уравнением (7). Подставляя, получим

$$V = \pm \frac{c}{B} \sqrt{B^2 - e^\nu}.$$

Для определенности будем рассматривать движение к центру, т.е.  $\frac{dx^1}{dx^0} < 0$ ,

$$V = -\frac{c}{B} \sqrt{B^2 - e^V} < 0. \quad (13)$$

Ускорение свободного падения определим как производную

$$w = \frac{dV}{d\tau} = ce \frac{dx^1}{dx^0} \frac{dV}{dx^1},$$

при условиях (7) и (13):

$$w = -\frac{c^2}{2B^2} e^{\frac{\lambda}{2}} \frac{d}{dr} e^V. \quad (14)$$

Формула (14) позволяет с помощью внешнего (2) и внутреннего (3) решений найти ускорение свободного падения для области вне источника ( $r > R$ )

$$w^{ex} = -\frac{1}{B^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \frac{\alpha c^2}{2r^2} \quad (15)$$

и для области внутри источника ( $r < R$ )

$$w^{in} = -\frac{c^2}{4B^2} \left( 3\sqrt{1 - qR^2} - \sqrt{1 - qr^2} \right) qr. \quad (16)$$

Отметим, что на границе источника,  $r = R$ , ускорение свободного падения сохраняет непрерывность.

Из формул (15) и (16) следует, что при одном и том же значении  $r$  ускорение  $w$  будет различным для разных геодезических, т.е. ускорение свободного падения зависит не только от расстояния до источника, но и от скорости.

Выберем такие геодезические, для которых точка  $r$  является верхней точкой траектории. Другими словами, определим ускорение свободного падения для мгновенно покоящейся частицы.

Для внешней области из (9) следует, что точка  $r$  будет верхней точкой траектории, если  $B^2 = 1 - \frac{\alpha}{r}$ . Тогда  $V(r) = 0$  и ускорение свободного падения в этой точке

$$w^{ex}(r) = -\frac{\alpha c^2}{2r^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Согласно ньютоновской теории тяготения

$$w_N^{ex} = -\frac{\alpha c^2}{2r^2}. \quad (18)$$

Таким образом,

$$w^{ex} = w_N^{ex} \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Аналогично для внутренней области из (11) находим, что при  $B = \frac{3}{2} \sqrt{1 - qR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - qr^2}$ ,  $V(r) = 0$  и

$$w^{in} = -c^2 qr \left[ 3\sqrt{1 - qR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - qr^2} \right]^{-1}. \quad (20)$$

По ньютоновской теории внутри однородного шара

$$w_N^{in} = -\frac{c^2 qr}{2}. \quad (21)$$

Следовательно,

$$w^{in} = w_N^{in} 2 \left[ 3\sqrt{1 - qR^2} - \sqrt{1 - qr^2} \right]^{-1}. \quad (22)$$

Формулы (19) и (22) для ускорения свободного падения могут быть использованы для сравнения с экспериментальными данными гравиметрических измерений. Также заслуживает внимания результат, что согласно (15) и (16) ускорение свободного падения в общем случае зависит от скорости движения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. — М.: Наука, 1973.
2. Мак-Витти Г.К. Общая теория относительности и космология / Г.К.Мак-Витти. — М.: ИИЛ, 1961.
3. Синг Дж. Общая теория относительности / Дж.Синг. — М.: ИИЛ, 1963.

#### GEODESIC PRINCIPLE AND THE GRAVITATIONAL ACCELERATION

I.R.Mubarakshin, A.A.Agafonov

*According to the principle of geodesic movement of test particles in gravity field the gravitational acceleration was defined in terms of observing physical amounts and it was applied to the whole Schwarzschild field. Whereas the acceleration depends on the velocity we found its value for an instantaneously resting particle that have to be equal to the value defined from gravimetric experiments.*



УДК 530.12: 531.51

#### КЛАСС ТОЧНЫХ ВНУТРЕННИХ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ ДЛЯ ЖИДКОГО ШАРА

А.М. Баранов, Р.В. Бикмурзин\*

*Получен класс точных внутренних статических решений уравнений Эйнштейна для жидкого шара. В качестве примера рассмотрена модель нейтронной звезды. Построены графики поведения плотности и давления. Внутреннее решение Шварцшильда оказывается частным случаем.*

Одним из приоритетных направлений мировых исследований в области гравитации в ближайшем десятилетии является развитие методов получения и интерпретации решений уравнений Эйнштейна. К концу XX века был найден ряд экспериментальных и наблюдательных подтверждений теории тяготения Эйнштейна, что значительно повысило интерес к этой теории.

Но сложность проблемы заключается в том, что даже при наложении условий сферической симметрии для статического варианта система уравнений тяготения представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которую трудно точно решить аналитически. Для того чтобы упростить эту систему, исследователи прибегают к введению различного рода координатных систем, среди которых однородная система координат редко используется при решении уравнений Эйнштейна, хотя она имеет ряд достоинств.

В этой связи следует упомянуть об утверждении Вейля ([1], с. 46, 116), касающегося записи метрического элемента в 3-мерном пространстве. Суть его состоит в следующем. Если в каком-нибудь 3-мерном пространстве может быть так выбрана система координат, что смешанные компоненты метрического тензора равны нулю (метрический тензор приводится к диагональному виду), то рассматриваемое 3-пространство оказывается конформно плоским, т.е. квадрат расстояния между бесконечно близкими точками пропорционален квадрату расстояния в евклидовом пространстве.

\* © А.М. Баранов; E-mail: bam@lan.krasu.ru; Р.В. Бикмурзин; Красноярский государственный университет, 2005.