

РАДИАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ МЕДЛЕННО ОСТЫВАЮЩЕЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

А.М.Баранов, С.Ф.Тегай*

Рассматриваются малые неадиабатические колебания релятивистских звезд. Показывается, что для равновесных конфигураций с нулевой температурой учет диссипации приводит к неоднородности системы динамических уравнений, описывающих малые колебания. При этом собственные частоты колебаний не изменяются по сравнению с соответствующей адиабатической моделью.

Первоначально теория релятивистских радиальных звездных пульсаций была развита для холодных адиабатических моделей со статическими равновесными конфигурациями. Обобщение теории для звезд, состоящих из диссипативного вещества, проведено в работе [1], в которой авторы получили динамические уравнения и модифицированный критерий устойчивости. Однако равновесные конфигурации в [1], в отличие от стандартного подхода, имеют в общем случае ненулевую температуру. В частном же случае холодной звезды результат оказывается тривиальным, то есть приводит к отсутствию неадиабатических эффектов. Таким образом, изменение свойств остывающей звезды по сравнению с адиабатической обусловлено в [1] не только эффектом диссипации, но и разницей в температурах равновесных конфигураций. Кроме того, даже малая температура поверхности звезды означает, что эта звезда излучает тепло и, следовательно, не может быть статической в полном смысле этого слова. В связи с этим именно холодные состояния равновесия представляют, на наш взгляд, наибольший интерес при исследовании влияния процессов остывания на малые радиальные колебания такого астрофизического объекта. Для таких моделей важно получить динамические уравнения и исследовать влияние малых возмущений потока тепла и температуры на решения этих уравнений.

Рассмотрим гравитирующий шар, заполненный диссипативной жидкостью, совершающей малые радиальные колебания около положения равновесия. В качестве такой равновесной системы можно взять, например, статическую модель нейтронной звезды [2].

При образовании нейтронных звезд их температура достигает $\geq 10^{11}$ K, но излучение фотонов начинает преобладать по интенсивности над излучением нейтрино, когда температура внутри звезды опускается до $\approx 10^8$ K, т.е. не менее чем через одну тысячу лет [2]. Поэтому не безынтересно было бы выяснить влияние отличной от нуля температуры на устойчивость звезды (малые колебания) вблизи состояния с $T = 0$, например при «плавном» падении температуры. В настоящей работе температуру T будем измерять в энергетических единицах, опуская при этом явную запись постоянной Больцмана k , принимая ее за единицу.

Принимая во внимание эти замечания, будем считать, что имеется остывающая нейтронная звезда с уже достаточно низкой температурой (но еще выше нуля), чтобы считать нейтронную жидкость приближенно вырожденным ферми-газом. В систему вносится малое возмущение, и затем рассматриваются собственные колебания звезды с целью выяснения ее устойчивости при отличной от нуля температуре. Медленное остывание звезды предполагает, кроме того, что система успевает вернуться в термодинамическое равновесие за время, меньшее, чем период колебаний, вызванных возмущениями. С другой стороны это означает наличие определенного закона остывания.

* © А.М.Баранов, bam@lan.krasu.ru, С.Ф.Тегай, tegai_s_f@inbox.ru, Красноярский государственный университет, 2005.

1. Уравнения Эйнштейна

В сопутствующей системе отсчета сферически симметричную метрику удобно записать в форме

$$ds^2 = -e^{2\Phi(t,r)} dt^2 + e^{2\Lambda(t,r)} dr^2 + R(t,r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

так как в этих координатах уравнение, описывающее колебания, примет канонический вид. Вместо неизвестной функции $\Lambda(t,r)$ далее используется функция Мизнера – Шарпа [3]

$$m = \frac{1}{2} R \left(1 - (\vec{\nabla} R)^2 \right) = \frac{1}{2} R \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 e^{-2\Phi} - \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 e^{-2\Lambda} \right). \quad (2)$$

Вещество звезды описывается тензором энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p b_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha, \quad (3)$$

где

$$q_\alpha = (0, q(t,r), 0, 0) \quad (4)$$

- пространственноподобный вектор потока тепла, ортогональный 4-скорости

$$u^\alpha = (e^{-\Phi}, 0, 0, 0), \quad (5)$$

и

$$b_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta} \quad (6)$$

- проекционный 3-тензор, фактически равный пространственному метрическому 3-тензору на гиперповерхности, ортогональной u^α . В используемой сигнатуре $u_\alpha u^\alpha = -1$, а $q_\alpha q^\alpha \geq 0$. Скорость света, если не оговорено противное, считается равной единице, как и гравитационная постоянная Ньютона G_N ; греческие тензорные индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские – 1, 2, 3.

Как правило, рассмотрение гравитирующих конфигураций в общей теории относительности (ОТО) не учитывает наличия у астрофизических объектов температуры, т.е. исследуются холодные тела или, строго говоря, при температуре абсолютного нуля. Далее, как уже упоминалось выше, будем предполагать, что звезда «теплая», т.е. находящаяся в состоянии, близком к $T = 0$. Поэтому принимаем, что модель нейтронной звезды имеет низкую температуру $T(t,r;\eta)$, где η - малый параметр, характеризующий величину отклонения от температурного равновесия. Кроме того, параметр η можно выбрать таким образом, что разложение $T(t,r;\eta)$ в ряд Тейлора по η будет начинаться с первой степени:

$$T(t,r;\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta T_m(t,r) \quad (7)$$

и состояние абсолютного нуля достигается при всех $\Delta T_m = 0$.

Все остальные неизвестные функции также могут быть разложены в ряд по степеням η около положения равновесия:

$$\begin{aligned} \Phi(t,r) &= \Phi_0(r) + \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta \Phi_m(t,r); & m(t,r) &= m_0(r) + \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta m_m(t,r); \\ \rho(t,r) &= \rho_0(r) + \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta \rho_m(t,r); & P(t,r) &= P_0(r) + \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta P_m(t,r); \\ n(t,r) &= n_0(r) + \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta n_m(t,r); & R(t,r) &= r + \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta R_m(t,r); \\ q(t,r) &= \eta^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \eta^m \Delta q_m(t,r), \end{aligned} \quad (8)$$

где $n(t,r)$ - концентрация барионов. Возмущение температуры первого порядка малости соответствует меньшим возмущениям других функций (если $k > 1$). В связи с использованием сопутствующей системы отсчета все возмущения являются лагранжевыми. При изучении малых колебаний от бесконечных сумм в (7), (8) можно оставить только по одному слагаемому с наименьшей степенью.

Далее везде используется сокращенное обозначение $\Delta T \equiv \Delta T_1$ для возмущения температуры и аналогичные обозначения для возмущений других функций.

Линеаризованные уравнения Эйнштейна могут быть сведены к следующей системе

$$\Delta \dot{m} = -4\pi P_0 r^2 \Delta \dot{R} - 4\pi r^2 F e^{\Phi_0} \Delta q; \quad (9)$$

$$\Delta m' = 4\pi \rho_0 r^2 \Delta R' + 8\pi r m_0 \Delta R + 4\pi r^2 \Delta \rho; \quad (10)$$

$$e^{-2\Phi_0} \Delta \ddot{R} = -F \Phi_0' \Delta R' + \left[\frac{3m_0}{r^3} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{4m_0}{r} \right) \Phi_0' \right] \Delta R - \frac{1}{r^2} (1 + 2r \Phi_0') \Delta m + F \Delta \Phi' - 4\pi r \Delta P; \quad (11)$$

$$e^{-\Phi_0} \Delta \dot{q} = -(\rho_0 + P_0) \Delta \Phi' - \Delta P' - \Phi_0' (\Delta \rho + \Delta P) \quad (12)$$

где $F = 1 - 2m_0/r$, штрихом обозначена частная производная по r , а точкой – по t . Эта система четырех уравнений для шести неизвестных функций замыкается законом сохранения барионов

$$(nu^\alpha)_{;\alpha} = 0, \quad (13)$$

уравнениями неравновесной термодинамики [4] (см. также обзор в [5])

$$\tau_1 b_\alpha^\beta u^\gamma q_{\beta;\gamma} + q_\alpha = -\lambda \left(b_\alpha^\beta T_{;\beta} + T u^\beta u_{\alpha;\beta} \right) - \frac{1}{2} \lambda T^2 \left(\frac{\tau_1}{\lambda T^2} u^\beta \right)_{;\beta} q_\alpha, \quad (14)$$

где τ_1 - время релаксации, а λ - коэффициент теплопроводности, и уравнением состояния.

2. О некоторых релятивистских соотношениях в ОТО

В общей теории относительности (ОТО) 4-импульс частицы с массой покоя m_0 определяется как

$$p^\mu = m_0 c \frac{dx^\mu}{ds} = m_0 c u^\mu, \quad (14)$$

где явно введена скорость света c , а интервал ds записывается, например, как и в (1)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \quad (15)$$

а метрический тензор $g_{\mu\nu}$ для простоты дальнейшего изложения выбран в блочно-диагональном виде $g_{\mu\nu} = \text{diag}(g_{00}, g_{ik})$, что не ограничивает общности подхода.

Из выражения (14) следует, что квадрат вектора 4-импульса равен

$$p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m_0^2 c^2 = \text{invar}. \quad (16)$$

С другой стороны, $g_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$; $b_{\mu\nu} u^\nu = 0$. Если ввести теперь физическое время (физически наблюдаемое время) $d\tau = -u_\mu dx^\mu / c = -g_{\mu\nu} u^\nu dx^\mu / c = -g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu ds / c = ds / c$ и физическое 3-мерное расстояние $dl^2 = b_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, то (15) переписывается в виде, аналогичном записи 4-интервала в специальной теории относительности (СТО),

$$ds^2 = dl^2 - c^2 d\tau^2. \quad (17)$$

Производя расщепление 4-импульса на времениподобную и пространственноподобную части 4-вектора

$$p^\mu = \frac{\varepsilon}{c} u^\mu + \bar{p}^\mu, \quad (18)$$

где ε – энергия частицы, $\bar{p}^\mu = b^{\mu\nu} p_\nu$ – пространственный 3-импульс, перепишем соотношение (16) как

$$p^\mu p_\mu = -\frac{\varepsilon^2}{c^2} + \bar{p}^\mu \bar{p}_\mu = -\frac{\varepsilon^2}{c^2} + \bar{p}^2 = -m_0^2 c^2. \quad (19)$$

В итоге получаем связь между физически наблюдаемыми энергией и пространственным импульсом ОТО, внешне неотличимую от соответствующего релятивистского соотношения в СТО,

$$\varepsilon^2 = \vec{p}^2 + m_0^2, \quad (20)$$

здесь мы снова вернулись к геометрической системе единиц, где скорость света $c = 1$.

3. Уравнение состояния

Запишем выражения для концентрации барионов $n(\mu, T)$, плотности энергии $\rho(\mu, T)$ и давления $P(\mu, T)$ для идеального нейтронного (фермионного) газа с учетом сферической симметрии в пространстве 3-импульсов по аналогии с [6] (с.184):

$$n(\mu, T) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{m_n}^\infty \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_n^2} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \quad (21)$$

$$\rho(\mu, T) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon p^2 dp}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{m_n}^\infty \frac{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - m_n^2} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \quad (22)$$

$$P(\mu, T) = \frac{T}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \ln(1 + e^{(\varepsilon-\mu)/T}) p^2 dp = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_{m_n}^\infty \frac{(\varepsilon^2 - m_n^2)^{3/2} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \quad (23)$$

где μ – химический потенциал, совпадающий при $T = 0$ с энергией Ферми ε_F , m_n – масса нуклона, энергия фермиона ε связана с импульсом p посредством релятивистского соотношения $\varepsilon^2 = p^2 + m_n^2$ из (20).

В последнем равенстве было произведено интегрирование по частям. Следуя [6] и в дальнейшем, найдем разложения концентрации n , плотности энергии ρ и давления P в ряд по степеням температуры T , считая, что $T \ll \mu - m_n$.

В формулы (21)-(23) входит интеграл вида

$$I = \int_{m_n}^\infty \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \quad (24)$$

где $f(\varepsilon)$ – некоторая функция. Следуя [6], преобразуем этот интеграл, используя подстановку $\varepsilon - \mu = Tz$:

$$I = \int_{(m_n-\mu)/T}^\infty \frac{f(\mu + Tz) T dz}{e^z + 1} = \int_{(m_n-\mu)/T}^0 \frac{f(\mu + Tz) T dz}{e^z + 1} + \int_0^\infty \frac{f(\mu + Tz) T dz}{e^z + 1}. \quad (25)$$

В первом слагаемом заменим переменную интегрирования $z = -\tilde{z}$ и применим равенство

$$\frac{1}{e^{-z} + 1} = 1 - \frac{1}{e^z + 1}. \quad (26)$$

В результате найдем

$$I = \int_0^\mu f(\varepsilon) d\varepsilon - \int_0^{(\mu-m_n)/T} \frac{f(\mu - Tz) T dz}{e^z + 1} + \int_0^\infty \frac{f(\mu + Tz) T dz}{e^z + 1}. \quad (27)$$

Во втором интеграле верхний предел возьмем равным бесконечности, пользуясь тем, что $(\mu - m_n)/T \gg 1$, а интеграл быстро сходится из-за экспоненты, стоящей в знаменателе. Таким образом, получим

$$I = \int_0^\mu f(\varepsilon) d\varepsilon + \int_0^\infty \frac{f(\mu + Tz) - f(\mu - Tz)}{e^z + 1} T dz. \quad (28)$$

Разложим теперь числитель подынтегрального выражения во втором слагаемом в ряд Тейлора по степеням z и проинтегрируем почленно:

$$I = \int_0^{\mu} f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} T^2 f'(\mu) + \dots \quad (29)$$

Таким образом, для вырожденного ферми-газа в рассматриваемом приближении находим

$$n \approx n_d(p_F) + \frac{T^2}{6\hbar^3} p_F \left(1 + \frac{\varepsilon_F^2}{p_F^2} \right) + O(T^4); \quad (30)$$

$$\rho \approx \rho_d(p_F) + \frac{T^2}{3\hbar^3} \varepsilon_F p_F \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_F^2}{p_F^2} \right) + O(T^4); \quad (31)$$

$$P \approx P_d(p_F) + \frac{T^2}{6\hbar^3} \varepsilon_F p_F + O(T^4), \quad (32)$$

где импульс Ферми p_F и энергию Ферми $\mu(T=0) = \varepsilon_F$ можно связать между собой параметрическим соотношением (согласно соотношению (20))

$$p_F = m_n \sinh(\xi/4), \quad \varepsilon_F = m_n \cosh(\xi/4) \quad (33)$$

с массой бариона m_n , а индекс d обозначает величины, относящиеся к полностью вырожденному газу при $T=0$.

Приближенные выражения (30)-(32) можно рассматривать как параметрическое задание уравнения состояния с учетом температурной зависимости, где параметром является ферми-импульс p_F . С другой стороны, (20) позволяет избавиться от двух параметров p_F и ε_F путем введения параметра ξ .

Первые ненулевые поправки в системе уравнения состояния (30)-(32) содержат температуру во второй степени. Это приводит к тому, что для возмущенных величин n, ρ, P ряды Тейлора (30)-(32) в окрестности $T=0$ можно переписать в общем виде как

$$\eta^k \Delta\{n, \rho, P\} = \frac{\partial\{n, \rho, P\}(\xi, T)}{\partial\xi} \eta^k \cdot \Delta\xi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\{n, \rho, P\}(\xi, T)}{\partial T^2} \eta^2 \cdot \Delta T^2 + o(\eta^2). \quad (34)$$

Из этого уравнения видно, что имеется три принципиально различных варианта значения порядка малости k : $k=1, k=2, k>2$. Последнее сразу приводит к $\Delta T=0$ и, следовательно, к чисто адиабатическим колебаниям. При $k=1$ слагаемым, содержащим возмущение температуры, можно пренебречь, так как оно имеет второй порядок малости, тогда как все остальные – первый. В этом случае возмущение температуры может быть нетривиальным, но оно не будет влиять на движение жидкости, так как ни ΔT , ни Δq не войдут в уравнения (10)-(13). Этот результат может быть легко получен из выкладок работы [1], если в исходных допущениях принять равновесную температуру равной нулю.

Наибольший интерес представляет случай с $k=2$, когда ни одним из слагаемых в (34) нельзя пренебречь, и, следовательно, возмущение температуры ΔT попадает в динамические уравнения после исключения $\Delta n, \Delta \rho$ и ΔP из системы (9)-(12).

4. Энтропия

Диссипация энергии приводит к производству энтропии. Скорость роста энтропии для невязкой жидкости пропорциональна квадрату потока тепла [5]:

$$S_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{q_{\alpha} q^{\alpha}}{\lambda T^2} \approx \frac{\eta^{2k-2} \Delta q^2}{\lambda F \Delta T^2}. \quad (35)$$

Это означает, что при $k=1$ производство энтропии имеет нулевой порядок малости (не является малым). Происходит это из-за того, что температура равновесного состояния равна нулю, а квадрат возмущения температуры стоит в знаменателе.

При $k=2$ производство энтропии имеет второй порядок малости, такой же, как и у возмущений давления, плотности и гравитационных потенциалов. Тогда как при $k>2$ приращение энтропии пренебрежимо мало, что и приводит к адиабатическим колебаниям.

5. Уравнения переноса

В первом порядке по η разложение уравнений переноса (14) дает

$$\frac{\tau_1 e^{-\Phi_0}}{F} \Delta \dot{q} + \frac{1}{F} \Delta q = -\lambda(\Delta T' + \Phi_0' \Delta T), \quad (36)$$

если значение показателя k в (8) равно единице, и

$$\Delta T' + \Phi_0' \Delta T = 0, \quad (37)$$

если k равно двум. Последнее уравнение имеет решение в форме равновесного распределения температуры

$$\Delta T = \Delta T_b(t) e^{-\Phi_0(r)} \sqrt{1 - 2M_0 / r_b}, \quad (38)$$

где индекс b обозначает значения на поверхности. Таким образом, в каждый момент времени звезда приближенно находится в тепловом равновесии.

6. Колебания

Теперь все готово для вывода уравнения, описывающего звездные пульсации. Уравнения (10), (11) и линеаризованное уравнение (34) позволяют исключить $\Delta \rho$, ΔP , Δn , $\Delta \xi$ и $\Delta \Phi'$. В оставшихся уравнениях вводятся новые неизвестные переменные

$$\delta m = \Delta m - 4\pi \rho_0 r^2 \Delta R \quad \text{и} \quad \delta Q = \Delta m + 4\pi p_0 r^2 \Delta R, \quad (39)$$

где δm имеет смысл эйлерова возмущения текущей массы. После этой замены уравнения для функций δm и δQ разделяются:

$$\dot{\delta Q} = 4\pi e^{\Phi_0} r^2 F \Delta q; \quad (40)$$

$$a_1(r) \delta \ddot{m} + a_2(r) \delta \dot{m}' + a_3(r) \delta m' + a_4(r) \delta m = a_5(r) (\Delta T^2)' + a_6(r) \Delta T^2. \quad (41)$$

И, наконец, линеаризованный закон сохранения барионов дает после всех подстановок

$$\frac{n_0}{4\pi(\rho_0 + P_0)r^2} \delta \dot{Q}' + \frac{n_0}{rF} \delta \dot{Q} + \frac{1}{2} \left(n_{TT} - \frac{n_0}{\rho_0 + P_0} \rho_{TT} \right) \frac{\partial \Delta T^2}{\partial t} = 0, \quad (42)$$

где вторые производные n_{TT} и ρ_{TT} берутся при $T = 0$. Коэффициенты динамического уравнения (41) имеют вид

$$a_1 = -\frac{e^{-2\Phi_0}}{4\pi r^2 F}; \quad (43)$$

$$a_2 = \frac{p_0 \Gamma_1}{4\pi(\rho_0 + P_0)r^2 F}; \quad (44)$$

$$a_3 = \frac{P_0 \Gamma_1'}{4\pi(\rho_0 + P_0)r^2} + \frac{\Phi_0'}{2\pi r^2} + \frac{5m_0 P_0 - m_0 \rho_0 + 8\pi P_0^2 r^3 - 2r P_0}{4\pi(\rho_0 + P_0)r^4 F}; \quad (45)$$

$$a_4 = \frac{(\rho_0 + P_0)(1 + 8\pi P_0 r^2)}{r^2 F^2}, \quad (46)$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{\rho_0 + P_0}{P_0} \frac{P_\xi}{\rho_\xi}, \quad (47)$$

а производные по ξ взяты при $T = 0$.

Если $k = 1$ сумма $a_5(r) (\Delta T^2)' + a_6(r) \Delta T^2$ равна нулю, в противном случае, с помощью уравнения (37), она может быть представлена в форме одночлена $a_7(r) \Delta T^2$, где

$$a_7 = \frac{F'}{4F} \left(P_{TT} - \frac{P_\xi}{\rho_\xi} \rho_{TT} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{P'_0}{P_\xi} \left(P_{TT} - \frac{P_\xi}{\rho_\xi} \rho_{TT} \right)_\xi, \quad (48)$$

и производная по параметру ξ тоже берется в точке равновесия $T = 0$. Коэффициент a_7 не равен тождественно нулю, по крайней мере, для выражений (21)-(23), так как

$$P_{TT} - \frac{P_\xi}{\rho_\xi} \rho_{TT} = \frac{2m_n^2}{9\hbar^3} \cdot \frac{p_F}{\varepsilon_F} = \frac{2m_n^2}{9\hbar^3} \tanh(\xi/4). \quad (49)$$

Левая часть динамического уравнения (41) такая же, как и в уравнении для адиабатических колебаний без каких-либо возмущений температуры или потока тепла. Кроме того, так как уравнение имеет особые точки в центре и на поверхности, в качестве краевых условий должны остаться условия ограниченности возмущений в этих точках. Это означает, что собственные колебания звезды не меняются в присутствии малых возмущений температуры и потока тепла. Однако для $k = 2$ в динамическом уравнении появляется новый элемент, а именно правая часть $a_7 \Delta T^2$ с квадратом температуры ΔT^2 , определяемым из соотношения (38).

Решение уравнения (40) можно записать в виде ряда

$$\delta m = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{G}_i(t) \psi_i(r), \quad (50)$$

где $\psi_i(r)$ - собственные функции задачи, соответствующие собственным числам ω_i^2 и удовлетворяющие однородному уравнению

$$a_2(r) \psi_i''(r) + a_3(r) \psi_i'(r) + a_4(r) \psi_i(r) - \omega_i^2 a_1(r) \psi_i(r) = 0 \quad (51)$$

с однородными краевыми условиями. Разделим динамическое уравнение (41) на коэффициент a_1 , затем подставим в него разложение (50) для функции δm . Получим с учетом (51)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i (\ddot{\mathcal{G}}_i + \omega_i^2 \mathcal{G}_i) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \psi_i \Delta T_b^2(t), \quad (52)$$

где c_i - это коэффициенты разложения в ряд по ψ_i функции $(a_7(r)/a_1(r))(1 - 2M_0/r_b) e^{-2\Phi_0(r)}$. Так как собственные функции ψ_i линейно независимы, должны выполняться равенства

$$\ddot{\mathcal{G}}_i + \omega_i^2 \mathcal{G}_i = c_i \Delta T_b^2(t). \quad (53)$$

Рассмотрим поведение \mathcal{G}_i при слабом падении температуры при остывании нейтронной звезды. Для этого смоделируем такое поведение температуры очень медленно спадающей линейной функцией

$$\Delta T_b^2 = \Delta T_0^2 (1 - (t - t^*)/\tau) = \Delta T_0^2 (1 - \Delta t/\tau), \quad (54)$$

где t^* - произвольный момент времени с момента начала остывания звезды, τ - очень большая величина, обеспечивающая медленное падение температуры. В частности, остывание нейтронной звезды за $\Delta t = 1000$ лет (а то и более) на 2-3 порядка ([2], с.328) означает, что соответствующая величина τ должна соответствовать не менее чем 10 млн лет. Возможно и малое изменение температуры звезды за $\Delta t = 10^4$ лет, что еще более увеличивает величину τ ($\tau > 10^8 - 10^{10}$ лет).

Решение уравнения (53) с правой частью (54) записывается в виде

$$\mathcal{G}_i(t) = C_1 \cos(\omega_i t) + C_2 \sin(\omega_i t) + \frac{c_i \Delta T_0^2}{\omega_i^2} (1 - \Delta t/\tau). \quad (55)$$

Отсюда видно, что из-за ограниченности по модулю величин гармонических функций для того, чтобы система резко не меняла своего состояния частоты должны быть большими, так как при очень малых частотах в (55) будет наблюдаться резкое возрастание амплитуды (после учета начальных данных). В самом деле, для устойчивых конфигураций нейтронных звезд собственные частоты их колебаний составляют примерно $\omega_i \approx 10^3 - 10^4$ Гц ([7], с.367).

Для численной оценки влияния температуры на колебания, рассмотрим отношение возмущения массовой функции $\delta m(t, r)$, обусловленное последним слагаемым в (55) к равновесному распределению массы $m_0(r)$:

$$\frac{\delta m(t, r)}{m_0(r)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\vartheta_i(t) \psi_i(r)}{m_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i(r)}{m_0} \cdot \frac{c_i \Delta T_0^2}{\omega_i^2} (1 - \Delta t / \tau) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i(r)}{m_0} \cdot \frac{c_i \Delta T_0^2}{\omega_i^2}. \quad (56)$$

Ограничимся только первым слагаемым этой суммы, так как при малых частотах основной моды колебаний именно оно дает максимальный вклад:

$$\frac{\delta m(t, r)}{m_0(r)} < \frac{\psi_0(r)}{m_0(r)} \cdot \frac{c_0 \Delta T_0^2}{\omega_0^2} \leq \max \left\{ \frac{\psi_0(r)}{m_0(r)} \right\} \cdot \frac{c_0 \Delta T_0^2}{\omega_0^2}. \quad (57)$$

Для сохранения линейности колебаний правая часть неравенства должна быть много меньше единицы, т.е. $(\max \{ \psi_0(r) / m_0(r) \} \cdot (c_0 \Delta T_0^2 / \omega_0^2)) \ll 1$.

На рис. 1 приведены данные численных расчетов, показывающие, при каких значениях частот и температур выполняется это условие. С помощью все тех же численных вычислений можно показать, что требование $\delta m / m_0 \leq 0,1$ при температуре $\Delta T_0^2 = 10^{10}$ К соответствует уменьшению максимально допустимой массы звезды на 0,01% и увеличению минимально возможного радиуса на 1%, тогда как при температуре $\Delta T_0^2 = 10^9$ К максимально допустимая масса уменьшается на $10^{-4}\%$, а минимальный радиус увеличивается на 0,1%. Столь малые изменения массы объясняются тем, что около точки потери устойчивости ($\omega_0^2 = 0$) полная масса m достигает своего экстремального значения.

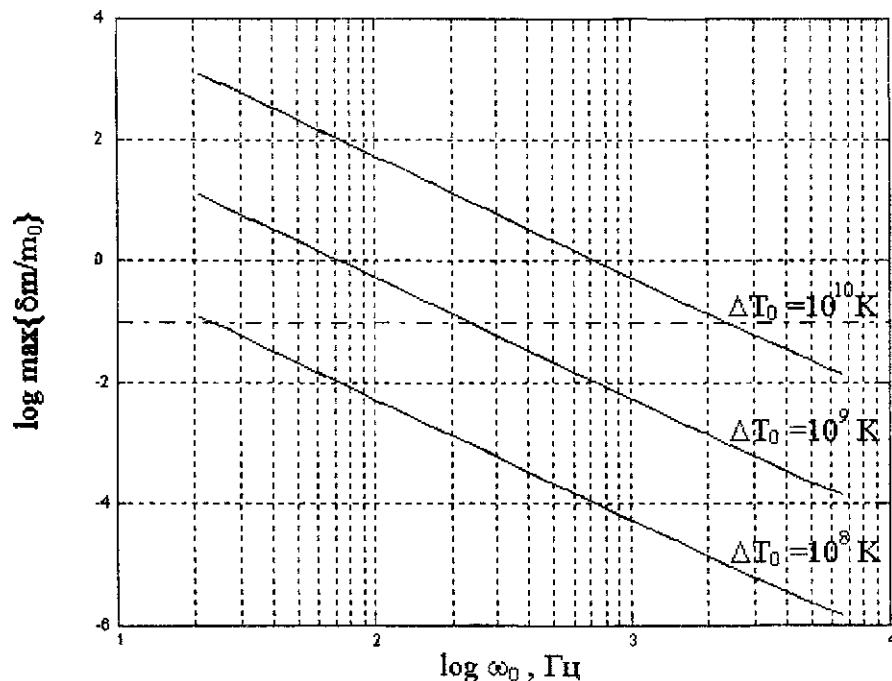


Рис. 1. Смещение равновесия, обусловленное наличием ненулевой температуры

Заключение

Благодаря тому, что первая поправка к уравнению состояния полностью вырожденного ферми-газа пропорциональна квадрату температуры, порядок малости возмущения температуры может отличаться от порядков остальных возмущений. Более того, предположение об одинаковом порядке малости для всех отклонений от равновесия приводит к отсутствию каких-либо новых, по сравнению с холодными адиабатическими колебаниями, эффектов.

Однако если первый порядок малости возмущения температуры соответствует второму порядку возмущений остальных функций, то динамическое уравнение (41), описывающее колебания, становится неодно-

родным с правой частью, пропорциональной квадрату температуры. Из-за этого положение равновесия, относительно которого совершаются колебания функции $\delta m(t, r)$, смещается на величину

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i \Delta T_0^2}{\omega_i^2} (1 - \Delta t / \tau) \mu_i(r), \quad (58)$$

зависящую от собственных частот и начальной температуры. С течением времени ($\Delta t \approx \tau$) такое смещение положения равновесия исчезает, что соответствует для уравнения (55) исчезновению температуры. Для того чтобы колебания не выходили за рамки линейного приближения величина смещения должна быть мала по сравнению с $m_0(r)$. Следовательно, квадраты частот колебаний, стоящие в знаменателе (56), не могут быть меньше некоторого определенного положительного значения, что изменяет и сужает область параметров, при которых звезда является устойчивой.

Таким образом, нейтронная звезда в процессе остывания меняет (хоть и очень незначительно) свои параметры по сравнению с холодным состоянием. В частности, это относится и к величине максимально возможной массы звезды, которая увеличивается по мере падения температуры до абсолютного нуля, и к величине минимально допустимого радиуса, который при этом уменьшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marti J.M. The nonadiabatic general-relativistic stellar oscillations/ J.M.Marti, J.A.Miralles, J.M.Ibanez, L.Herrera // A&SS. - 1990. - V.168. - P.305-316.
2. Шапиро С.А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: В 2-х ч. Ч.2/ С.А.Шапиро, С.А.Тьюколски. - М.: Мир, 1985.
3. Misner C.W. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse/ C.W.Misner, D.H.Sharp // Phys. Rev. - 1964. - V.136. - P.B571-B576.
4. Israel W. Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory/ W.Israel, J.M.Stewart // Ann. Phys. - 1979. - V.118. - P.341-372.
5. Maartens R. Causal thermodynamics in relativity/ R.Maartens // Preprint: astro-ph/9609119.
6. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособие: В 10 т. Т.V. - Статистическая физика/ Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц. - М.: Физматлит, 2001.
7. Misner S.W. Gravitation/ S.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler. - San Francisco: Freeman Co., 1973.

RADIAL PULSATIONS OF A SLOWLY COOLING NEURTRON STAR

A.M.Baranov, S.Ph.Tegai

Small non-adiabatic radial stellar oscillations are studied. It is shown for equilibrium configurations with zero temperature that dissipation leads to the inhomogeneity of dynamical equation describing pulsations. At the same time, the eigen-frequencies remain the same just as for adiabatic oscillations.