

УДК 530.12

АСИМПТОТИЧЕСКИ СТАТИЧЕСКИЕ МИРЫ ФРИДМАНА С КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

М.П. Коркина, И.С. Каземир*

Рассматриваются решения уравнений Фридмана при наличии пылевидного вещества, излучения и космологической постоянной. Получены точные решения этих уравнений, описывающие асимптотически статические вселенные. Показано, что радиусы статических вселенных лежат в пределах от $a_{\Lambda}/\sqrt{3}$ до $a_{\Lambda}/\sqrt{2}$. Максимальный радиус достигается во вселенной с излучением и космологической постоянной, минимальный при наличии только пылевидного вещества и космологической постоянной. Получены выражения для плотности энергии вещества и излучения в предельном случае статических вселенных.

1. В настоящее время наблюдательная космология существенно изменила наши представления о вселенной. Наблюдения сверхновых звезд типа Ia, светимость которых, как считается, лежит в довольно узких пределах (так называемые стандартные свечи), показали, что расширение нашей вселенной происходит не с замедлением, что следовало из уравнений Фридмана, а с ускорением [1,2]. Чтобы объяснить этот факт, нужно признать существование во вселенной нового типа темной небарионной материи, которая по плотности превосходит все другие формы материи вместе взятые. Для обеспечения ускорения эта материя должна иметь строго отрицательное давление. Как правило, эта материя ассоциируется с вакуумом, уравнение состояния для которого

$$\varepsilon + p = 0, \quad (1)$$

где ε – плотность энергии, p – давление.

Уравнение состояния (1) – единственное, для которого любая система координат является сопутствующей [3]. Как известно, решение с таким уравнением состояния – это решение де Ситтера [4] и, следовательно, плотность вакуума можно отождествить с космологической постоянной $\Lambda = 8\pi\kappa^{-4}\varepsilon_{\Lambda}$.

*© М.П.Коркина, E-mail: korkina@ff.dsu.dp.ua; И.С.Каземир, E-mail: kazemirvs@ukr.net, Днепропетровский национальный университет (Украина), 2005.

Существенные перемены в космологии, связанные с космологической постоянной, А.Д. Чернин называет “новой революцией в космологии” [5], и с ним трудно не согласиться. Возможные судьбы вселенных с учетом Λ изменяются и становятся значительно более разнообразными. Поэтому проблеме космологической постоянной посвящены как оригинальные статьи, так и многочисленные обзоры [5–8].

Так как плотность всех форм материи во вселенной близка к критической, среди космологов наиболее популярна плоская модель вселенной. Это обусловлено, во-первых, тем, что увеличение размеров вселенной мало по сравнению с ее нынешней наблюдаемой величиной, так что пространственная структура вселенной в целом близка к плоской. Во-вторых, тем, что выбор единицы для параметра плотности многим кажется более естественным, чем единицы с некоторой малой добавкой [9]. Из фридмановых моделей с неравной нулю пространственной кривизной наименьшее внимание уделяется моделям с положительной кривизной.

Однако если обратиться к современным наблюдательным данным, то мы увидим, что параметр плотности, т.е. отношение суммы плотностей всех форм материи к критической плотности, имеет вид

$$\Omega_{tot,0} = 1,02 \pm 0,04 \quad (2)$$

где индекс “0” означает, что величина относится к настоящему времени [9].

Величина параметра плотности $\Omega_{tot,0}$ определяется не только по наблюдениям за сверхновыми типа Ia, она также подтверждается данными о флуктуациях в спектре реликтового излучения, полученными спутником *WMAP* [10]. Значение $\Omega_{tot,0}$ согласуется с любым предположением: вселенная может быть пространственно плоской, иметь отрицательную или положительную пространственную кривизну. Как уже отмечалось выше, модели с положительной пространственной кривизной уделяется значительно меньше внимания, между тем именно для такого случая введение космологической постоянной в уравнения Фридмана дает значительное разнообразие сценариев развития вселенной: она может быть замкнутой, как и в случае $\Lambda = 0$, может бесконечно расширяться, сначала с замедлением потом с ускорением, асимптотически стремясь к пространству де Ситтера (как и в открытых моделях). В отличие от открытых моделей, закрытая модель вселенной (с положительной пространственной кривизной) может асимптотически стремиться к статическому миру Эйнштейна, а также возможны квазистатические модели, при которых вселенная в некоторый период времени близка к статической, а потом или расширяется, стремясь к миру де Ситтера, или схлопывается. Качественно возможные сценарии развития вселенной представлены на рис. 1 [6].

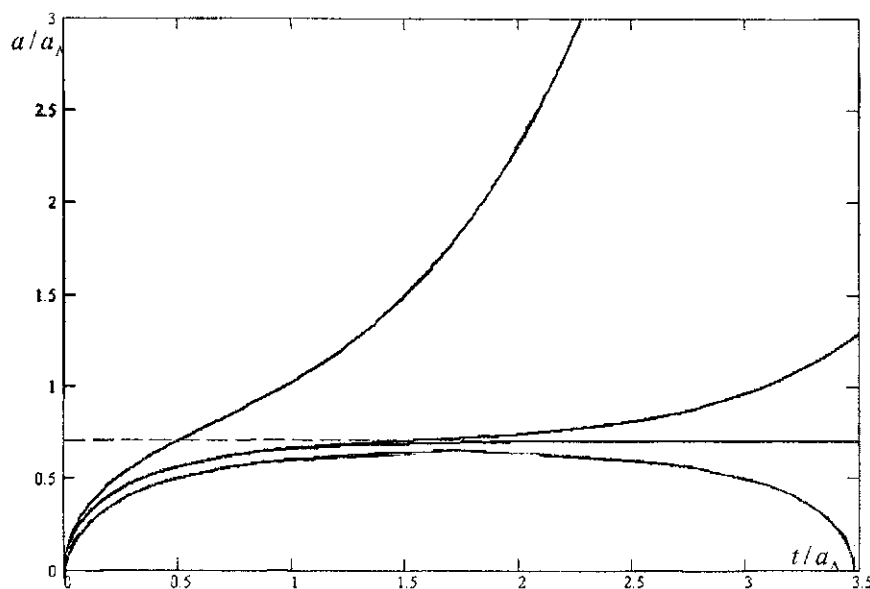


Рис.1. Зависимость масштабного фактора от времени (в безразмерных единицах) для различных вселенных

2. Рассмотрим асимптотически статические модели вселенной при наличии пылевидной матери, излучения и вакуума (космологической постоянной). Уравнения Фридмана для рассматриваемого случая:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi\gamma}{3c^4} (\varepsilon_m + \varepsilon_r + \varepsilon_\Lambda), \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_m + \dot{\varepsilon}_r = (\varepsilon_m + \varepsilon_r + \varepsilon_\Lambda + p_r + p_\Lambda) \frac{3\dot{a}}{a}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_m, \varepsilon_r, \varepsilon_\Lambda$ – плотности энергий материи (пыли), излучения и вакуума соответственно. p_r, p_Λ – давления излучения и вакуума соответственно. Из уравнения (4) при отсутствии взаимодействия между пылевидной материей, вакуумом и излучением имеем:

$$\frac{8\pi\gamma}{3c^4} \varepsilon_m = \frac{a_0}{a^3}, \quad \frac{8\pi\gamma}{3c^4} \varepsilon_r = \frac{a_r^2}{a^4}, \quad \frac{8\pi\gamma}{3c^4} \varepsilon_\Lambda = \frac{1}{a_\Lambda^2} = const, \quad (5)$$

где a_0, a_m и a_Λ – постоянные (a_Λ является радиусом минимальной окружности гиперboloида вращения, представляющего собой пространство де Ситтера, вложенное в 5-мерное плоское пространство). Подставляя (5) в уравнение (3), получим:

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{a_0}{a} + \frac{a_r^2}{a^2} + \frac{a^2}{a_\Lambda^2}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) в общем случае может быть представлено только в квадратурах:

$$t + const = \int_0^a \frac{a \cdot a_\Lambda da}{\sqrt{\left(a_0 + \frac{a_r^2}{a} + \frac{a^2}{a_\Lambda^2} - 1\right)}}. \quad (7)$$

Для асимптотически статического случая подкоренное выражение в (7) имеет кратный корень и (7) можно переписать в виде

$$t + const = \int_0^a \frac{a \cdot a_\Lambda da}{|a - a_k| \sqrt{a^2 + 2a_k a + \frac{a_r^2 a_\Lambda^2}{a_k^2}}}, \quad (8)$$

где $a_k = const$ – максимальный радиус асимптотически статического мира. В этом случае можно получить точное решение, выраженное в аналитическом виде:

$$e^{\frac{t}{a_\Lambda}} \frac{R(a_k) a_\Lambda}{a_k} = \left(\frac{R(a) + a/a_\Lambda + a_k/a_\Lambda}{R(0) + a_k/a_\Lambda} \right)^{\frac{R(a_k) a_\Lambda}{a_k}} \cdot \frac{R(a)R(a_k) + 2\frac{a_k}{a_\Lambda} \frac{a}{a_\Lambda} + 4\frac{a_k^2}{a_\Lambda^2} - 1}{R(0)R(a_k) + 4\frac{a_k^2}{a_\Lambda^2} - 1} \cdot \frac{a_k}{a_k - a}, \quad (9)$$

где $R(a) = \sqrt{\left(\frac{a}{a_\Lambda}\right)^2 + 2\frac{a_k a}{a_\Lambda^2} + 3\frac{a_k^2}{a_\Lambda^2} - 1}$, постоянная интегрирования в уравнения (9) выбрана так, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ радиус вселенной a равнялся нулю. При $t \rightarrow \infty$ радиус вселенной достигает максимального значения a_k .

3. Рассмотрим свойства полученных решений.

Постоянные a_Λ, a_r, a_0, a_k связаны условиями

$$\frac{a_0}{a_k} = 2 \left(\frac{a_k^2}{a_\Lambda^2} - \frac{a_r^2}{a_k^2} \right), \quad 6\frac{a_k^2}{a_\Lambda^2} = 1 + \sqrt{1 + 12\frac{a_r^2}{a_\Lambda^2}}. \quad (10)$$

a_Λ и a_k не могут обратиться в нуль. Рассмотрим, как изменяется радиус асимптотически статической вселенной в зависимости от величин a_0 и a_r , то есть от соотношения между пылевидной материей и излучением. Из (10) следует, что максимальное значение $a_k = a_\Lambda/\sqrt{2}$ достигается при $a_0 = 0$ (при отсутствии пылевидной материи), а минимальное значение $a_k = a_\Lambda/\sqrt{3}$ – при $a_r = 0$ (при отсутствии излучения). Для вселенной, заполненной только излучением и вакуумом, зависимость $a(t)$ имеет вид

$$a^2(t) = \frac{a_\Lambda^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{a_\Lambda}} \right), \quad a_r = \frac{a_\Lambda}{2}. \quad (11)$$

Для вселенной, заполненной только пылевидной материей и вакуумом, зависимость $a(t)$ можно записать следующим образом:

$$e^{\frac{t}{a_\Lambda} \sqrt{3}} = \left(\sqrt{3} \frac{a}{a_\Lambda} + 1 + \sqrt{3 \frac{a^2}{a_\Lambda^2} + 2\sqrt{3} \frac{a}{a_\Lambda}} \right)^{-\sqrt{3}} \cdot \frac{2 \frac{a}{a_\Lambda} + \sqrt{3} + \sqrt{3 \frac{a^2}{a_\Lambda^2} + 2\sqrt{3} \frac{a}{a_\Lambda}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a}{a_\Lambda}}, \quad a_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} a_\Lambda. \quad (12)$$

При наличии вещества (пылевидной материи) и излучения возможные значения отношений $a_0/a_\Lambda, a_r/a_\Lambda$, для которых вселенные являются асимптотически статическими, изображены на рис. 2. По оси ординат – возможные значения a_r/a_Λ и a_0/a_Λ . Кривая 1 соответствует значениям a_0/a_Λ , кривая 2 – значениям a_r/a_Λ .

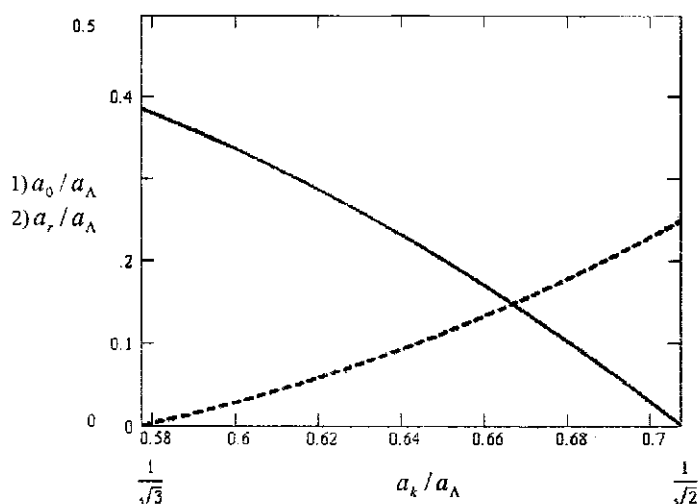


Рис. 2. Значения a_0/a_Λ и a_r/a_Λ для асимптотически статических вселенных

Таким образом, асимптотически статические решения Фридмана возможны при a_0 , изменяющемся от нуля до $a_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} a_\Lambda$, и при a_r , изменяющемся от нуля до $a_r = \frac{1}{2} a_\Lambda$ для a_k в пределах от $a_\Lambda/\sqrt{3}$ до $a_\Lambda/\sqrt{2}$.

На рис. 3 изображены возможные зависимости $a(t)$ для рассматриваемых асимптотически статических вселенных, где верхняя кривая соответствует отсутствию пылевидной материи, нижняя – отсутствию излучения. Все возможные кривые, которые асимптотически стремятся к некоторой величине, лежащей между $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$, соответствуют наличию вещества и излучения.

Вычислим значения плотности энергии и давления для вещества, излучения и вакуума в асимптотически статической вселенной при $a = a_k$. Для пылевидной материи

$$\varepsilon_m = \frac{a_0}{a_k^3} = \frac{2}{a_\Lambda} \left[1 - \frac{36\beta}{(1 + \sqrt{1 + 12\beta})^2} \right], \quad p_m = 0 \text{ (где } \beta = \frac{a_r^2}{a_\Lambda^2} \text{)}.$$

Для излучения $\varepsilon_r = \frac{a_r^2}{a_\Lambda^4} = \frac{1}{a_\Lambda^2} \left[\frac{36\beta}{(1+\sqrt{1+12\beta})^2} \right]$, $p_r = \frac{1}{3}\varepsilon_r$, для вакуума $\varepsilon_\Lambda = \frac{1}{a_\Lambda^2} = -p_\Lambda$.

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_r + \varepsilon_\Lambda = \frac{3}{a_\Lambda^2} \left[1 - \frac{12\beta}{(1+\sqrt{1+12\beta})^2} \right], p = \frac{1}{a_\Lambda^2} \left[\frac{12\beta}{(1+\sqrt{1+12\beta})^2} - 1 \right]$$

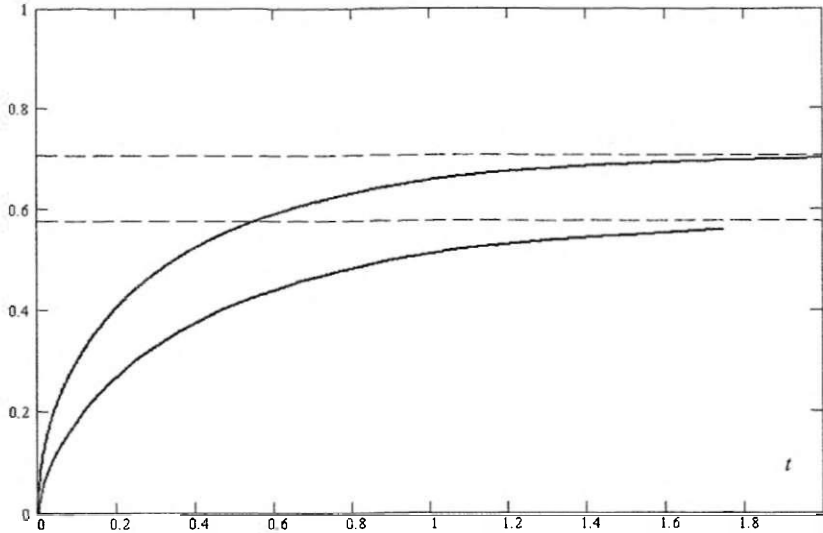


Рис. 3. Зависимости $a(t)$ для асимптотически статических вселенных

То есть имеем уравнение состояния сферического мира Эйнштейна $\varepsilon + 3p = 0$. Можно заключить, что уравнение состояния $\varepsilon + 3p = 0$ является физическим и есть следствие присутствия одновременно трех различных состояний материи – излучения, пылевидного вещества и вакуума.

Поведение параметра замедления $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ для асимптотически статической вселенной изображено на рис. 4, где по оси абсцисс отложено a/a_Λ , по оси ординат – q . При $a \rightarrow a_k$ параметр замедления $q \rightarrow +\infty$, что означает то, что вселенная становится статической.

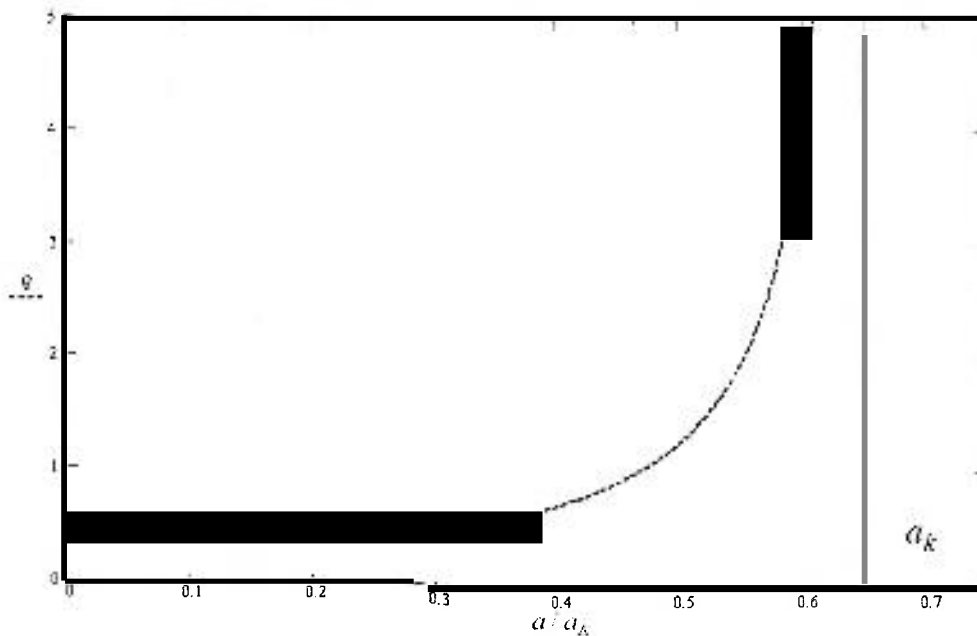


Рис. 4. Параметр замедления $q(a)$ для асимптотически статической вселенной

4. Получены точные решения уравнений Фридмана, описывающие асимптотически плоские вселенные: а) при наличии вещества (пылевидной материи) и космологической постоянной, б) при наличии излучения и космологической постоянной, в) при наличии вещества, излучения и космологической постоянной.

Показано, что существует класс асимптотически статических вселенных, которые определяются соотношением между постоянными a_0 и a_r . Возможные радиусы статических вселенных a_k лежат в пределах от $a_\Lambda / \sqrt{3}$ до $a_\Lambda / \sqrt{2}$. Максимальное значение a_k достигается при отсутствии вещества, минимальное – при отсутствии излучения. Найдены значения для постоянных a_0 и a_r , при которых возможно существование асимптотически статических вселенных:

$$0 \leq a_0 / a_\Lambda \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}, 0 \leq a_r / a_\Lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Получены выражения для плотности энергии вещества и излучения в предельном случае статических вселенных. Показано, что для всех статических вселенных уравнение состояния совпадает с уравнением состояния статического мира Эйнштейна:

$$\varepsilon + 3p = \varepsilon_m + \varepsilon_r + \varepsilon_\Lambda + 3(p_r + p_\Lambda) = 0.$$

Таким образом, уравнение состояния $\varepsilon + 3p = 0$ является физическим и описывает вселенные с наличием трех форм материи: излучения, пылевидной материи и вакуума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Riess A.G. Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ From the Hubble Space Telescope / A.G.Riess et al.// Ap.J. – 2004. – V.607. – P.665-687; Preprint astro-ph/0402512.
2. Perlmutter S. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae / S.Perlmutter et al.// Ap.J. – 1999. – V.517. – P.565-586; Preprint astro-ph/9812133.
3. Глинер Э.Б. Алгебраические свойства тензора энергии-импульса и вакуумподобные состояния вещества / Э.Б.Глинер// ЖЭТФ. – 1965. – Т.49. – №2. – С.542-548.
4. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология / Р.Толмен. – М.:Наука, 1974.
5. Чернин А.Д. Космический вакуум / А.Д.Чернин// УФН. – 2001. – Т.171. – №11. – С.1153-1175.
6. Carroll M. The Cosmological Constant / M.Carroll// Living Rev.Rel. – 2001. V.1; Preprint astro-ph/0004075.
7. Вайнберг С. Проблема космологической постоянной / С.Вайнберг// УФН. – 1989. – №4. – С.639-669.
8. Sahni V. The Case for a Positive Cosmological Λ -term / V.Sahni, A.Starobinsky// Int.J.Mod.Phys.D. – 2000. – V.9. – P.373-444; Preprint astro-ph/9904398.
9. Adler R.J. The Nearly Flat Universe / R.J. Adler, J.M. Overduin// Preprint gr-qc/0501061.
10. Bennett C.L. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP1) Observations / C.L.Bennett et al.// Preprint astro-ph/0302207.

ASYMPTOTICALLY STATICAL FRIEDMAN UNIVERSE WITH THE COSMOLOGICAL CONSTANT

M.P. Korkina, I.S. Kazemir

Solutions of Friedman equations with dust matter, radiations and cosmological constant are considered. The exact solutions of these equations describing asymptotically statical universe are obtained. It is shown, that radius of the static universe change from $a_\Lambda / \sqrt{3}$ to $a_\Lambda / \sqrt{2}$. The maximum radius is reached in the universe with radiation and cosmological constant, minimal radius is reached at presence only dust matter and cosmological constant. Expressions for a density of energy of dust matter and radiation in the statical universe are obtained.