СТО
1905 2005

УДК 530.12: 531.51

КИНЕТИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ СИСТЕМ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ[1]

А.Б.Балакин, В.Р.Курбанова*

Обсуждается математический формализм обобщенной релятивистской кинетической теории, основанный на расширении фазового пространства многочастичной системы, эволюционирующей в нестационарном гравитационном поле. При конструировании обобщенного статистического ансамбля в качестве дополнительных внутренних степеней свободы использованы скалярные, ко-векторные и тензорные стохастические источники различной физической природы. Приведен пример детального анализа эволюционной модели, описывающей кинетику релятивистской системы, испытывающей поляризационно-приливное воздействие поля гравитационного излучения.

Специальная теория относительности, понимаемая в духе Эрлангенской программы Феликса Клейна как теория инвариантов группы Лоренца-Пуанкаре, сыграла выдающуюся роль в становлении физики XX столетия. Все физические теории, содержащие ныне в своем названии ключевой термин *релятивистский*, в известной степени обязаны своим происхождением творениям двух великих людей: Альберта Эйнштейна и Анри Пуанкаре. Не является исключением и *релятивистская теория многочастичных систем*, история создания которой сложна и порой драматична. Известно, что знаменитая функция распределения Юттнера [1], которая стала релятивистским обобщением функции распределения Максвелла-Больцмана — краеугольного камня классической статистической физики, была введена в рассмотрение в 1911 году, то есть в период первого подъема интереса к теории относительности. Только через 25 лет после этого Уолкер [2], а затем Лихнерович и Марро [3] приступили к созданию фундаментальных основ релятивистской кинетической теории. История развития этой науки подробно изложена в книге де Гроота, ван Леувена, ван Верта [4]. Следует подчеркнуть, что усилиями таких признанных классиков релятивистской кинетической теории, как Таубер и Вайнберг [5], Черников [6], Израэль [7], Стьюарт [8], Элерс [9] и других, было создано новое направление — так называемая *общерелятивистская* кинетическая теория, основанная на использовании *ковариантного* кинетического уравнения, базирующегося на фундаменте *общей* теории относительности. Главные страницы в истории создания и обоснования этой науки написаны в 60-х годах XX столетия, а 70-е и 80-е годы ознаменованы бурным и многоплановым развитием ковариантной кинетической теории в приложении к космологии и астрофизике. Стремительный прогресс в этой области был предопределен простотой и элегантностью ковариантного формализма *8-мерного фазового пространства* и заданной на нем функции распределения, зависящей от четырех координат, от 4-вектора импульса и описывающей статистический ансамбль релятивистских *точечных бесструктурных* частиц в гравитационном поле.

Однако, реальные частицы, составляющие многочастичные системы, имеют внутреннюю структуру и обладают вследствие этого дополнительными *внутренними* степенями свободы. К таковым относят спин, поляризацию, изоспин, цветные заряды и т.д. Как правило, в отсутствие внешних полей и внутренних взаимодействий макроскопически усредненные параметры кинетической системы не зависят от внутренней структуры частиц, и дополнительные степени свободы являются *скрытыми*. Тем не менее, во внешних полях: электромагнитном, янг-милсовском, гравитационном, вырождение по скрытым степеням свободы может быть снято и сложная внутренняя структура системы проявит себя в виде многопараметрического отклика. Воздействие гравитационного поля на многочастичную систему как эффект, снимающий вырождение по скрытым параметрам, было исследовано в работах [10-13] на примерах электродинамических, газовых, плазменных и гидродинамических моделей. Из этих работ, в частности, следовало, что так называемые нестационарные гравитационные поля (гравитационные волны, изотропные и анизотропные космологические поля) снимают вырождение по скрытым параметрам в силу того, что неминуемо порождают в системе неравновесные, необратимые процессы. Это стало отправной точкой для целенаправленного исследования эволюции релятивистских иерархических систем в нестационарных гравитационных полях в рамках обобщенной кинетической теории [14].

[1] При поддержке гранта Правительства РФ НШ-1789.2003.02
* © А.Б.Балакин, В.Р.Курбанова; Казанский государственный университет (Россия), 2005;
E-mail: Alexander.Balakin@ksu.ru.

В семидесятых годах XX столетия идея о том, что учесть внутренние степени свободы частиц, эволюционирующих в гравитационном поле, можно путем введения новых стохастических переменных, привела к необходимости расширения фазового пространства. Так, в работе [15] Израэль, рассматривая частицы, обладающие дипольным моментом, и динамику поляризации в среде, ввел набор скалярных параметров (барионные числа, заряды, и т.д.) как дополнительные переменные в фазовом пространстве. Фельдман и Таубер [16] предложили свою версию релятивистской статистической механики частиц со спином в терминах 14-мерного фазового пространства, причем шесть дополнительных измерений были отведены переменным, описывающим спиновые степени свободы. В работах по изучению кварк-глюонной плазмы [17,18] в качестве дополнительных переменных в фазовом пространстве был рассмотрен мультиплет скаляров, отвечающих за цветные заряды и изоспин.

Но если рамки специальной теории относительности позволили достаточно просто расширить число аргументов в функции распределения и, соответственно, увеличить размерность фазового пространства, то общая теория относительности продиктовала новые более сложные правила обобщения ковариантной кинетической теории. Соответствующий формализм для описания систем с внутренними степенями свободы развивался с конца 50-х годов XX века. Одной из первых работ, посвященных непосредственно геометрии расширенного фазового пространства, была обзорная статья казанского геометра Лаптева [19], в которой он применил термин *пространство опорных элементов*. Власов [20], развивая идею о расширенном фазовом пространстве, использовал формализм ковариантного дифференцирования Картана [21] в приложении к проблемам общерелятивистской кинетической теории. Благодаря работам этих авторов в лексикон релятивистской кинетической теории прочно вошел термин *производная Картана*. Впоследствии производная Картана стала краеугольным камнем общерелятивистской кинетической теории газа, плазмы и систем частиц со спином (поляризацией) (см., например, [22-24]).

Дальнейшие события показали, что идея расширения фазового пространства содержит в себе более глубокие обобщения. Смолин [25], рассматривая квантовые и статистические флуктуации и их связь с гравитацией и инерцией, упомянул идею построения *теорий скрытых переменных*, которые должны быть общековариантными и вовлекать в анализ некий новый вид статистического ансамбля. Эта идея привела авторов работ [26,27] к исследованиям расширенного фазового пространства нового типа, в котором роль дополнительных переменных играют не стандартные величины, такие как спин, поляризация и т.д., а стохастические ланжевеновские источники скалярного, векторного и тензорного типов. В результате таких построений аддитивные и мультипликативные источники шума (или флуктуаций) в многочастичной системе приобретают статус стохастических переменных, и моделирование функции распределения этих величин позволяет описать конечные флуктуации в терминах расширенного статистического ансамбля, а также нелинейное воздействие флуктуаций на эволюцию системы.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части мы формулируем основные положения ковариантной кинетической теории на расширенном фазовом пространстве, вводя обобщенное кинетическое уравнение, обобщенный оператор ковариантного дифференцирования, процедуру инвариантного интегрирования, расширенный набор стандартных моментов функции распределения, нестандартные и флуктуационные моменты функции распределения. Во второй части в качестве иллюстрации представленного формализма мы приводим пример точного интегрирования обобщенного кинетического уравнения на 12-мерном фазовом пространстве, который описывает эволюцию системы поляризованных бозонов в плосковолновом гравитационном поле. В заключение мы кратко говорим о перспективах обсуждаемого подхода к описанию сложных многочастичных систем.

1. Релятивистская кинетическая теория на расширенном фазовом пространстве: математический формализм и основные определения

1.1. Обобщенная релятивистская функция распределения

Переход от релятивистской кинетической теории на 8-мерном фазовом пространстве к обобщенной теории на расширенном фазовом пространстве базируется на усложнении структуры функции распределения:

$$f\left(x^i, p^k\right) \;\to\; \Phi\left(x^i, p^k, \omega^{(A)}, \xi_l^{(B)}, h_{mn}^{(C)}, \ldots\right). \tag{1}$$

Общим набором переменных в этих функциях распределения являются координаты точки наблюдения x^i и 4-вектор импульса частицы p^k, понимаемый как независимая стохастическая переменная. Дополнительные переменные представлены набором из N_1 стохастических скалярных переменных $\omega^{(A)}$, N_2 стохастических ко-векторных переменных $\xi_l^{(B)}$, N_3 стохастических тензорных переменных второго ранга $h_{mn}^{(C)}$ и т. д. Число N, описывающее размерность расширенного фазового пространства, исчисляется следующим образом: $N = 8 + 1 \cdot N_1 + 4 \cdot N_2 + 16 \cdot N_3 + \ldots$

Физический смысл дополнительных стохастических переменных предопределяется поставленной эволюционной задачей. Так, например, в теории $SU(n)$-симметричной неабелевой плазмы [17,18] появляются $N_1 = n^2 - 1$ скалярная переменная $\omega^{(A)}$, которые при $n = 2$ имеют смысл изоспиновых переменных, а при при $n = 3$ — цветных зарядов. При исследовании динамики индивидуальных частиц изоспин или цветные заряды рассматриваются как детерминированные переменные, удовлетворяющие эволюционным уравнениям Кернера–Вонга [28,29] с фиксированными начальными данными (примеры решения смотри в [30,31]). При переходе к кинетическому описанию эти величины становятся частью нового набора стохастических переменных, расширяя статистический ансамбль, используемый при усреднении [17,18]. В теории скалярных мультипликативных ланжевеновских источников [26,32] подобные скалярные величины как стохастические коэффициенты вводятся в конструкцию сил, действующих на индивидуальные частицы со стороны окружения. Такой подход позволяет описать на языке кинетической теории взаимодействие частиц с внешним термостатом, внутренним стохастическим резервуаром, самодействие в многочастичных системах, влияние конечных флуктуаций скалярного типа (флуктуации плотности, энтропии, ...) и т.д.

Наиболее известное приложение наборов ко-векторных $\xi_l^{(B)}$ стохастических переменных — это теория частиц со спином, поляризацией или внутренними дипольными моментами. В простейшем варианте такой теории антисимметричный тензор спина S_{mn} может быть представлен с помощью разложения по двум 4-векторам: вектору спина S^i и так называемому вектору орбитального момента L^i $[(B) = (1),(2)]$. В моделях неабелевой $SU(n)$-симметричной плазмы каждая частица, обладающая спином, имеет еще и фиксированный цветной заряд, а потому индекс (B) пробегает $2 \cdot (n^2 - 1)$ значений. Другая модель, вводящая в рассмотрение набор ко-векторных переменных, связана с аддитивными и мультипликативными стохастическими векторными (ко-векторными) ланжевеновскими источниками [14]. Модели такого типа призваны описывать взаимодействие частиц с внешним или внутренним стохастическим резервуаром за счет флуктуаций векторного типа (флуктуации скорости, теплового потока). Подчеркнем, что в пространстве-времени с заданной метрикой ко-векторные переменные $\xi_l^{(B)}$ ассоциированы с векторными переменными $\xi^{i(B)} = g^{il}\xi_l^{(B)}$, а потому разделение ко-векторных и векторных переменных в известной мере условно.

Тензорные стохастические переменные $h_{mn}^{(C)}$ также появляются во многих кинетических моделях. В общем случае этот тензор несимметричен, однако он может быть стандартным образом разложен на симметричную и антисимметричную составляющие $h_{mn}^{(C)} = h_{[mn]}^{(C)} + h_{(mn)}^{(C)}$. Антисимметричная часть $h_{[mn]}^{(C)}$ в свою очередь сводится к паре векторных (ко-векторных) переменных, а потому существенно новой частью служит именно симметричный тензор $h_{(mn)}^{(C)}$. Он может быть ассоциирован, например, с тензором квадрупольного момента частиц Q_{mn} [33]. Важнейшим для нас приложением становится введение тензорной стохастической ланжевеновской переменной h_{mn}, описывающей случайные гравитационные поля и космологические возмущения тензорного типа (гравитационные волны).

В заданном физическом контексте некоторые из переменных удовлетворяют дополнительным условиям связи. Так, 4-импульс частиц нормирован на массу ($p^i p_i = m^2c^2$); пространственноподобный 4-вектор спина, ортогональный 4-вектору скорости частицы U^i ($S_i U^i = 0$), может быть нормирован на единицу ($S^i S_i = -1$) или на другое действительное отрицательное число ($S^i S_i = -E_0^2$); тензор $h_{mn}^{(C)}$, отвечающий за гравитационно-волновые флуктуации, симметричен ($h_{mn}^{(C)} = h_{nm}^{(C)}$) и обладает нулевым следом ($h^{(C)} \equiv h_{mn}^{(C)} g^{mn} = 0$) и т. д. Эти условия связи фиксируются умножением функции распределения Φ на соответствующие дельта-функции: $\delta(p^i p_i - m^2c^2)$, $\delta(S^i S_i + E_0^2)$, $\delta(S_i U^i)$, $\delta(h_{mn}^{(C)} - h_{nm}^{(C)})$, $\delta(h^{(C)})$.

1.2. Обобщенное релятивистское кинетическое уравнение первого типа

Общерелятивистское бесстолкновительное кинетическое уравнение может быть феноменологически получено двумя способами. Первый способ его получения основан на условии равенства нулю дивергенции обобщенного потока:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{(a)}} \left(\frac{D\mathbf{X}_{(a)}}{Ds} \Phi \right) = 0 . \tag{2}$$

Набор обобщенных переменных $\mathbf{X}_{(a)}$ включает в себя координаты $[(a)=1,\dots,4]$, 4-импульс $[(a)=5,\dots,8]$, скалярные переменные $[(a)=9,\dots,8+N_1]$, ко-векторные переменные $[(a)=9+N_1,\dots,9+N_1+4\cdot N_2]$, и т.д. При таком способе вывода получаем следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{p^i}{mc}\tilde{\nabla}_i\Phi+\frac{\partial}{\partial p^i}\left(F^i\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial\omega^{(A)}}\left(\Omega^{(A)}\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_i^{(B)}}\left(G_i^{(B)}\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial h_{mn}^{(C)}}\left(H_{mn}^{(C)}\Phi\right)=0\,. \qquad (3)$$

Здесь $\tilde{\nabla}_i$ — продолженный (удлиненный) оператор Картана,

$$\hat{\nabla}_i\equiv\nabla_i-\Gamma_{il}^k p^l\frac{\partial}{\partial p^k}+\Gamma_{il}^k\xi_k^{(B)}\frac{\partial}{\partial\xi_l^{(B)}}+\Gamma_{il}^k\left(h_{km}^{(C)}\frac{\partial}{\partial h_{lm}^{(C)}}+h_{mk}^{(C)}\frac{\partial}{\partial h_{ml}^{(C)}}\right)+\dots \qquad (4)$$

∇_i — это ковариантная производная, Γ_{il}^k — символы Кристоффеля, ассоциированные с фоновой метрикой g_{ik}. По всем повторяющимся индексам ведется суммирование. Методика «удлинения» оператора Картана при введении стохастических переменных нового типа очевидна из представления (4), однако заметим, что в основе методики такого обобщения лежит важнейшее свойство оператора Картана:

$$\hat{\nabla}_i p^k=0\,,\ \ \hat{\nabla}_i\omega^{(A)}=0\,,\ \ \hat{\nabla}_i\xi_l^{(B)}=0\,,\ \ \hat{\nabla}_i h_{mn}^{(C)}=0\,,\ \dots \qquad (5)$$

Это свойство, представленное в ковариантном виде (5), фактически означает, что переменные x^i, p^k, $\omega^{(A)}$, $\xi_l^{(B)}$, $h_{mn}^{(C)}$, ... являются независимыми. Обобщенные силы

$$F_{(a)}\equiv\frac{D\mathbf{X}_{(a)}}{Ds}\equiv\left\{F^i,\Omega^{(A)},G_i^{(B)},H_{mn}^{(C)}\right\} \qquad (6)$$

зависят, вообще говоря, от полного набора переменных. Учет столкновений добавляет в правую часть кинетического уравнения некий источник $J(\Phi)$ — так называемый интеграл столкновений, который требует специального рассмотрения и здесь не приводится.

1.3. Обобщенное релятивистское кинетическое уравнение второго типа

Альтернативное кинетическое уравнение может быть получено из условия, что скорость изменения функции распределения равна интегралу столкновений:

$$\frac{d}{ds}\Phi\left[x^i(s),p^k(s),\omega^{(A)}(s),\xi_l^{(B)}(s),h_{mn}^{(C)}(s),\dots\right]=J(\Phi)\,. \qquad (7)$$

Такое кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{p^i}{mc}\hat{\nabla}_i\Phi+F^i\frac{\partial\Phi}{\partial p^i}+\Omega^{(A)}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega^{(A)}}+G_i^{(B)}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i^{(B)}}+H_{mn}^{(C)}\frac{\partial\Phi}{\partial h_{mn}^{(C)}}=J(\Phi) \qquad (8)$$

и совпадает с (3), только если равны нулю следующие скаляры дивергентного типа:

$$\frac{\partial F^i}{\partial p^i}=0\,,\ \ \frac{\partial\Omega^{(A)}}{\partial\omega^{(A)}}=0\,,\ \ \frac{\partial G_i^{(B)}}{\partial\xi_i^{(B)}}=0\,,\ \ \frac{\partial H_{mn}^{(C)}}{\partial h_{mn}^{(C)}}=0\,. \qquad (9)$$

1.4. Уравнения характеристик

Кинетические уравнения (3) и (8) имеют одни и те же уравнения характеристик, а именно:

$$\frac{dx^i}{ds}=\frac{p^i}{mc}\,,\ \ \frac{dp^i}{ds}+\Gamma_{kl}^i p^k\frac{dx^l}{ds}=F^i\,,\ \ \frac{d\omega^{(A)}}{ds}=\Omega^{(A)},\ \ \frac{d\xi_k^{(B)}}{ds}-\Gamma_{kl}^i\xi_i^{(B)}\frac{dx^l}{ds}=G_k^{(B)}\,, \qquad (10)$$

$$\frac{dh_{mn}^{(C)}}{ds}-\Gamma_{ml}^k h_{kn}^{(C)}\frac{dx^l}{ds}-\Gamma_{nl}^k h_{mk}^{(C)}\frac{dx^l}{ds}=H_{mn}^{(C)}\,. \qquad (11)$$

Уравнения характеристик в представленной форме совпадают с эволюционными уравнениями для перечисленных независимых переменных.

1.5. Интегрирование на расширенном фазовом пространстве

1.5.1. Инвариантная мера интегрирования

Расчет усредненных величин как макроскопических моментов функции распределения требует введения инвариантной меры интегрирования на расширенном фазовом пространстве. Эта мера $d\mathbf{M}$ может быть представлена в виде

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{P}\cdot d\Omega\cdot d\Xi\cdot d\mathbf{H} \equiv \left[d^4 P\sqrt{-g}\right]\cdot\left[\prod_{(A)=(1)}^{(N_1)} d\omega^{(A)}\right]\cdot\left[\prod_{(B)=(1)}^{(N_2)}\frac{d^4\xi^{(B)}}{\sqrt{-g}}\right]\cdot\left[\prod_{(C)=(1)}^{(N_3)}\frac{d^{16}h^{(C)}}{(-g)^2}\right]. \tag{12}$$

Мера интегрирования $d\mathbf{M}$ представляет собой произведение инвариантных объемов интегрирования по тем сечениям расширенного фазового пространства, которые соответствуют переменным p^i, $\omega^{(A)}$, $\xi_i^{(B)}$, $h_{mn}^{(C)}$. Удлиненный оператор Картана (4) и мера интегрирования (12) удовлетворяют соотношению:

$$\nabla_k \int d\mathbf{M}\cdot\Psi\left(x^j, p^i, \omega^{(A)}, \xi_i^{(B)}, h_{mn}^{(C)}\right) = \int d\mathbf{M}\cdot\hat{\nabla}_k \Psi\left(x^j, p^i, \omega^{(A)}, \xi_i^{(B)}, h_{mn}^{(C)}\right). \tag{13}$$

1.5.2. Стандартные полные моменты первого порядка

Полные макроскопические моменты обобщенной функции распределения строятся по классическому рецепту как интегралы по *полной* мере. Полные моменты первого порядка:

$$N^i(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot p^i, \quad M^{(A)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\omega^{(A)},$$

$$A_i^{(B)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\xi_i^{(B)}, \quad Q_{mn}^{(C)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot h_{mn}^{(C)}, \tag{14}$$

допускают следующую интерпретацию: $N^i(x)$ — это стандартный вектор плотности потока числа частиц, моменты $M^{(A)}(x)$, $A_i^{(B)}(x)$ и $Q_{mn}^{(C)}(x)$ пропорциональны средним значениям скалярной, ко-векторной и тензорной стохастических переменных соответственно, причем коэффициент пропорциональности $K(x)$ может быть найден по правилу $K^{-1}(x) = \int d\mathbf{M}\cdot\Phi$.

1.5.3. Стандартные и смешанные полные моменты второго порядка

Моменты второго порядка

$$T^{ik}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot p^i\cdot p^k, \quad M^{(A_1)(A_2)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\omega^{(A_1)}\cdot\omega^{(A_2)},$$
$$A_{ik}^{(B_1)(B_2)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\xi_i^{(B_1)}\cdot\xi_k^{(B_2)}, \quad Q_{mnpq}^{(C_1)(C_2)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot h_{mn}^{(C_1)}\cdot h_{pq}^{(C_2)},$$
$$M^{i(A)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot p^i\cdot\omega^{(A)}, \quad M_l^{i(B)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot p^i\cdot\xi_l^{(B)},$$
$$Q_{mn}^{i(C)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot p^i\cdot h_{mn}^{(C)}, \quad A_i^{(A)(B)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\omega^{(A)}\cdot\xi_i^{(B)},$$
$$Q_{mn}^{(A)(C)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\omega^{(A)}\cdot h_{mn}^{(C)}, \quad Q_{lmn}^{(B)(C)}(x) \equiv \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\xi_l^{(B)}\cdot h_{mn}^{(C)} \tag{15}$$

также допускают рациональную физическую интерпретацию. Момент $T^{ik}(x)$, очевидно, является тензором энергии-импульса системы. Моменты второго порядка $M^{(A_1)(A_2)}(x)$, $A_{ik}^{(B_1)(B_2)}(x)$ и $Q_{mnpq}^{(C_1)(C_2)}(x)$ пропорциональны среднеквадратичным значениям соответствующих переменных, если индексы (A_1) и (A_2), (B_1) и (B_2), (C_1) и (C_2) совпадают, или соответствующим ковариациям при несовпадающих индексах. Остальные смешанные моменты следует признать нестандартными, и их интерпретация существенно зависит от смысла дополнительных стохастических переменных.

1.5.4. Поток энтропии

Вектор потока энтропии

$$s^i(x) \equiv -k_B c\int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot p^i\left[\ln\left(h^*\Phi\right)-1\right] \tag{16}$$

формально имеет ту же структуру, как и в случае восьмимерного фазового пространства. Размерная константа h^* совпадает с постоянной Планка, если речь идет о стандартной кинетической теории. Интегрирование по полной мере выдает тот скрытый факт, что число состояний многочастичной системы в целом предопределено числом всех внутренних степеней свободы. Это очевидно, например, в том случае, когда полная функция распределения мультипликативна, то есть может быть представлена в виде произведения функций распределения по каждой из переменных: $\Phi = f(x,p)\cdot\Psi_1(x,\omega)\cdot\Psi_2(x,\xi)\cdot\Psi_3(x,h)$. В таком случае вектор потока энтропии (16) превращается в сумму четырех векторов энтропии, каждый из которых отвечает за свой сектор в статистическом ансамбле.

1.5.5. Неполные моменты

Наряду с полными моментами в расширенной кинетической теории возникают моменты функции распределения, вычисленные по неполной мере. Так, например, 8-мерную функцию распределения $f(x,p)$ можно трактовать как интеграл

$$f(x,p) = \int d\Omega\cdot d\Xi\cdot d\mathbf{H}\cdot\Phi = \int d\mathbf{M}/d\mathbf{P}\cdot\Phi \tag{17}$$

по мере, формально записанной как $d\mathbf{M}/d\mathbf{P}$. Аналогичным образом можно представить большое количество различных неполных моментов, однако такой процесс становится рациональным, если только удается придать физический смысл интегралам соответствующих типов. Так, например, неполные моменты

$$N^i(x,\omega) \equiv \int d\mathbf{M}/d\Omega\cdot\Phi\cdot p^i\ ,\quad T^{ik}(x,\omega) \equiv \int d\mathbf{M}/d\Omega\cdot\Phi\cdot p^i\cdot p^k\ , \tag{18}$$

можно трактовать, соответственно, как вектор потока числа частиц и тензор плотности энергии-импульса системы, в которых по скалярным стохастическим переменным $\omega^{(A)}$ усреднение не проведено, а потому соответствующие аргументы в $N^i(x,\omega)$ и $T^{ik}(x,\omega)$ представляют собой случайные значения этих переменных. Полные моменты можно получить из неполных путем интегрирования по недостающему инвариантному объему [в примере (18) это интегрирование по $d\Omega$].

1.5.6. Флуктуационные моменты

Разность неполного и полного моментов одного типа следует считать флуктуационным моментом. Например, тензорные объекты

$$\Delta N^i \equiv N^i(x,\omega) - N^i(x),\quad \Delta T^{ik} \equiv T^{ik}(x,\omega) - T^{ik}(x) \tag{19}$$

[см., соответственно, (18), (14) и (15)] можно интерпретировать как флуктуации вектора потока числа частиц и тензора энергии-импульса системы, вызванные наличием скалярных стохастических источников.

1.6. Уравнения переноса и законы сохранения

Все так называемые «потоковые моменты», содержащие под знаком интеграла множитель p^i, ассоциированы с соответствующим уравнением переноса дивергентного типа. Чтобы получить уравнение переноса, ассоциированного, например, с моментом первого порядка $N^i(x)$, найдем дивергенцию $\nabla_i N^i(x)$, используя свойство оператора Картана (13) и заменяя производную по направлению импульса $p^i\hat{\nabla}_i\Phi$ её значением из кинетического уравнения (3). После интегрирования по полной мере получим *уравнение баланса числа частиц*

$$\nabla_i N^i(x) = 0\,. \tag{20}$$

Поскольку в правой части уравнения баланса получен нуль, то обычно говорят, что в такой многочастичной системе выполняется *закон сохранения числа частиц*. Для кинетического уравнения второго типа (8) уравнение баланса не становится, вообще говоря, законом сохранения, и этот факт дает дополнительную мотивацию тому, что мы в дальнейшем используем только кинетическое уравнение первого типа (3).

Повторяя указанную процедуру для моментов $T^{ik}(x)$, $M^{i(A)}(x)$, $M_l^{i(B)}(x)$, $Q_{mn}^{i(C)}(x)$ и вектора потока энтропии $s^i(x)$, получим, соответственно:

уравнение баланса энергии-импульса

$$\nabla_k T^{ik}(x) = mc\int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot F^i\,, \tag{21}$$

уравнение баланса скалярных источников

$$\nabla_i M^{i(A)}(x) = mc\int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot\Omega^{(A)}\,, \tag{22}$$

уравнение баланса ко-векторных источников

$$\nabla_i M_l^{i(B)}(x) = mc\int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot G_l^{(B)}\,, \tag{23}$$

уравнение баланса тензорных источников

$$\nabla_i Q_{lr}^{i(C)}(x) = mc\int d\mathbf{M}\cdot\Phi\cdot H_{lr}^{(C)}\,, \tag{24}$$

уравнение баланса энтропии

$$\sigma(x) \equiv \nabla_i s^i(x) = k_B mc^2 \int d\mathbf{M}\cdot\Phi\left[\frac{\partial F^i}{\partial p^i} + \frac{\partial\Omega^{(A)}}{\partial\omega^{(A)}} + \frac{\partial G_i^{(A)}}{\partial\xi_i^{(A)}} + \frac{\partial H_{lr}^{(C)}}{\partial h_{lr}^{(C)}}\right], \tag{25}$$

Построенный математический формализм предоставляет широкие возможности для моделирования эволюции многочастичных систем с дополнительными внутренними степенями свободы. Во второй части мы приведем пример детального анализа конкретной физической модели.

2. Кинетика релятивистской системы, испытывающей поляризационно-приливное воздействие поля гравитационного излучения

2.1. Модельные уравнения характеристик

Рассмотрим эволюцию системы массивных частиц (бозонов) со случайно направленным вектором поляризации в поле гравитационного излучения с метрикой

$$ds^2 = 2dudv - \left\{L^2(u)\left[e^{2\beta(u)}\left(dx^2\right)^2 + e^{-2\beta(u)}\left(dx^3\right)^2\right]\cosh 2\gamma(u) + 2\sinh 2\gamma(u)\,dx^2 dx^3\right\}. \tag{26}$$

Функции $\beta(u)$ и $\gamma(u)$ есть произвольные функции запаздывающего времени $u \equiv \left(ct - x^1\right)/\sqrt{2}$, удовлетворяющие начальным условиям $\beta(0) = \gamma(0) = 0$, $\beta'(0) = \gamma'(0) = 0$. Фоновый фактор $L(u)$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$L''(u) + L(u)\left\{\,[\beta'(u)]^2\cosh\gamma(u) + [\gamma'(u)]^2\right\} = 0 \tag{27}$$

и начальным условиям $L(0) = 1$, $L'(0) = 0$.

Пусть гравитационно-волновое поле создает нестационарный фон для системы релятивистских массивных частиц, обладающих случайной поляризацией. Говоря другими словами, мы рассматриваем расширенный 12-мерный статистический ансамбль, в котором из всех дополнительных переменных существенной является только одна ко-векторная величина $\xi_i^{(1)} \equiv S_i$, с которой ассоциирован 4-вектор поляризации массивного бозона S^i. Формулируя уравнения характеристик (10) для данного случая, воспользуемся моделью Хрипловича [34]

$$\frac{Dp^i}{D\tau} = -\frac{1}{(mc)^2}R^{*i}{}_{\cdot klm}p^k S^l p^m = F^i\,,\quad \frac{DS^i}{D\tau} = -\frac{1}{(mc)^2}R^{*i}{}_{\cdot klm}S^k S^l p^m = G^{(1)i}\,, \tag{28}$$

где τ есть аффинный параметр, в качестве которого, в частности, может быть выбран параметр $\tau = s$. Силовые функции F^i и $G_i^{(1)}$ в такой модели линейны по леводуальному тензору Римана $R^{*i}{}_{\cdot klm}$. Для метрики (26) ненулевые ковариантные компоненты такого тензора имеют вид

$$R^*_{2u2u} = -\left[L^2 e^{2\beta}\left(\gamma' - 1/2\,\beta'\sinh 4\gamma\right)\right]',\quad R^*_{3u3u} = \left[L^2 e^{-2\beta}\left(\gamma' + 1/2\,\beta'\sinh 4\gamma\right)\right]',$$

$$R^*_{2u3u} = R^*_{3u2u} = \left[L^2\beta'\cosh 2\gamma\right]'. \tag{29}$$

Методика представления точных решений характеристических уравнений на гравитационно-волновом фоне неоднократно обсуждалась (см., например, [31]). Первые три интеграла движения относятся к разряду квадратичных:

$$p^i p_i = \mathrm{const} = m^2c^2\,,\quad S^i S_i = const = -E_0^2\,,\quad S_i p^i = const = 0\,. \tag{30}$$

Скаляр $p^i p_i$ постоянен вдоль траектории частицы в силу того, что его производная пропорциональна скалярному произведению силы F^i на импульс p^i, которое равно нулю тождественно (по построению), а само значение константы выбирается из условия нормировки импульса. Аналогично, скаляр $S^i S_i$ постоянен в силу ортогональности силы $G_i^{(1)}$ и вектора поляризации. Скаляр $S_i p^i$ постоянен вдоль траектории частицы благодаря тому, что конструкция $F^i S_i + G_i^{(1)} p^i$ равна нулю тождественно в силу построения. Константа выбирается равной нулю как дополнительное физическое требование ортогональности 4-векторов поляризации и импульса, предложенное Таммом [35].

В основе дальнейшего интегрирования уравнений характеристик лежит репараметризация уравнений характеристик с помощью линейного соотношения $u = C_v(\tau - \tau_0)/mc$, где $C_v = \text{const} = p_v(0) \equiv p_i(0)\xi^i_{(v)}$ есть интеграл движения частицы, обязанный своим происхождением наличию у метрики (26) изотропного ковариантно постоянного вектора Киллинга $\xi^i_{(v)}$. Эта методика позволяет привести в квадратурах полный набор интегралов движения поляризованной частицы. Первые восемь интегралов могут быть представлены в следующем виде:

$$p_v = \text{const} = p_v(0) \equiv C_v\,, \quad p_\alpha = C_\alpha + l^\sigma_\alpha\left(E_v C_\sigma - E_\sigma C_v\right), \quad C_\alpha \equiv p_\alpha(0),$$

$$p_u = \frac{(mc)^2}{2C_v} - g^{\beta\gamma}\frac{C_\beta C_\gamma}{2C_v} + g^{\beta\gamma} l^\sigma_\beta\left(E_\sigma C_v - E_v \frac{C_\sigma C_\gamma}{C_v}\right); \tag{31}$$

$$S_v = \text{const} = S_v(0) \equiv E_v \neq 0\,,$$

$$S_\alpha = T^\sigma_\alpha E_\sigma + \left(\delta^\sigma_\alpha - T^\sigma_\alpha\right)E_v\frac{C_\sigma}{C_v} + \frac{1}{mc} l^\sigma_\alpha\left(E_v^2\frac{C_\sigma}{C_v} - E_\sigma E_v\right), \quad E_\alpha \equiv S_\alpha(0),$$

$$S_u = E_v\left[\frac{C_\beta C_\gamma}{C_v^2}\left(g^{\alpha\gamma}T^\beta_\alpha - \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}\right) - \frac{(mc)^2}{2C_v^2}\right] - E_\sigma C_\delta g^{\alpha\delta}T^\sigma_\alpha +$$

$$+\frac{E_v^2}{mc}\left[\frac{C_\sigma C_\gamma}{C_v^2}g^{\beta\gamma}l^\sigma_\beta - \frac{C_\sigma C_\gamma}{C_v}\left(g^{\sigma\delta}l^\gamma_\delta + g^{\gamma\delta}l^\sigma_\delta - g^{\alpha\delta}l^\gamma_\delta T^\sigma_\alpha\right)\right] +$$

$$+\frac{E_v E_\sigma}{mc}\left\{C_\rho\left[2g^{\rho\delta}l^\sigma_\delta - g^{\alpha\delta}\left(l^\sigma_\delta T^\rho_\alpha + l^\rho_\delta T^\sigma_\alpha\right)\right] - \frac{C_\gamma}{C_v}g^{\beta\gamma}l^\sigma_\beta\right\} + \frac{E_\sigma E_\rho}{mc}C_v g^{\alpha\delta}T^\sigma_\alpha l^\rho_\delta\,. \tag{32}$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения для коэффициентов двумерных матриц T^σ_α и l^σ_α:

$$T^2_2 = L\,e^{\beta}\left(\cosh 2\gamma\cos 2\psi + \sinh 2\gamma \sin 2\psi\right), \quad T^2_3 = L\,e^{\beta}\left(\sinh 2\gamma\cos 2\psi - \cosh 2\gamma\sin 2\psi\right),$$

$$T^3_2 = L\,e^{-\beta}\left(\sinh 2\gamma\cos 2\psi + \cosh 2\gamma\sin 2\psi\right), \quad T^3_3 = L\,e^{-\beta}\left(\cosh 2\gamma\cos 2\psi - \sinh 2\gamma\sin 2\psi\right), \tag{33}$$

$$l^\sigma_\alpha \equiv \int_0^u R^{*\rho}_{\cdot u\alpha u}(\tilde u)\,T^\sigma_\rho(\tilde u)\,d\tilde u\,. \tag{34}$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 2 и 3 и нумеруют те компоненты тензоров, которые получены проектированием на плоскость фронта гравитационной волны. Скалярная величина ψ, описывающая фазу геодезической прецессии [36], введена следующим соотношением [37]:

$$\psi(u) = \int_0^u \beta'(\tilde u)\sinh 2\gamma(\tilde u)\,d\tilde u\,. \tag{35}$$

Оставшиеся интегралы движения представляются квадратурами от функций $p_i(u)$, заданных формулами (31):

$$v(u) = v(0) + \frac{1}{C_v}\int_0^u p_u(\tilde u)\,d\tilde u\,, \quad x_\alpha(u) = x_\alpha(0) + \frac{1}{C_v}\int_0^u g^{\alpha\beta}(\tilde u)p_\beta(\tilde u)\,d\tilde u\,. \tag{36}$$

Поскольку полный набор интегралов движения предъявлен, полная функция распределения как решение бесстолкновительного кинетического уравнения (3) содержит произвольную функцию интегралов $p^i p_i$, C_ν, C_α, E_0, E_ν, E_α, а также одной из величин $S_i p^i$ или $S^i S_i$. Таким образом, мы имеем возможность перейти непосредственно к вычислению моментов функции распределения и анализу макроскопических усредненных величин.

2.2. Интегрирование в расширенном 12-мерном фазовом пространстве

Квадратичные интегралы движения $p^i p_i$ и $S_i p^i$ следует ввести в функцию распределения $\Phi\left(x^i, p^k, S_l\right)$ в виде трех δ-функций, а именно $\delta\left(p^i p_i - m^2 c^2\right)$ и $\delta\left(\frac{S_i p^i}{mc}\right)$. При этом функция распределения предстанет в виде

$$\Phi\left(x^i, p^k, S_l\right) = \Phi_0\left(x^i, p^k, S_l\right)\delta\left(p^i p_i - m^2 c^2\right)\delta\left(\frac{S_i p^i}{mc}\right). \tag{37}$$

С помощью δ-функций $\delta\left(p^i p_i - m^2 c^2\right)$ и $\delta\left(\frac{S_i p^i}{mc}\right)$ выполним интегрирование по p_u и S_u, после чего 8-мерный элемент объема интегрирования $d\mathbf{P}d\Xi$ превратится в 6-мерный:

$$\langle y\rangle = \frac{1}{L^2}\int \frac{y}{C_\nu}\Phi_0\left(p_\nu, p_\alpha, S_\nu, S_\alpha\right)dp_\nu dp_2 dp_3 dS_\nu dS_2 dS_3 .$$

Под знаком интеграла перейдем от переменных интегрирования p_ν, p_2, p_3, S_ν, S_2 и S_3 к переменным C_ν, C_2, C_3, E_ν, E_2 и E_3. В соответствии с формулами (31)-(34), якобиан такого перехода

$$J \equiv \frac{D\left(p_\nu, p_2, p_3, S_\nu, S_2, S_3\right)}{D\left(C_\nu, C_2, C_3, E_\nu, E_2, E_3\right)}$$

оказывается степенной функцией E_ν — начального значения проекции вектора поляризации на направление вектора Киллинга ξ_ν^i:

$$\begin{aligned} J = L^2 &+ \frac{2}{mc}E_\nu\left[L^2\left(l_2^2 + l_3^3\right) + T_2^3 l_3^2 + T_3^2 l_2^3 - T_2^2 l_3^3 - T_3^3 l_2^2\right] + \\ &+ \frac{2}{(mc)^2}E_\nu^2\left[2\left(1 + L^2 - T_2^2 - T_3^3\right)\|\mathbf{l}\| + \left(l_2^2 + l_3^3\right)\left(T_3^2 L_2^3 + T_2^3 L_3^2\right) - \left(T_2^2 + T_3^3\right)l_2^3 l_3^2 - T_2^2\left(l_3^3\right)^2 - T_3^3\left(l_2^2\right)^2\right] + \\ &+ \frac{4}{(mc)^3}E_\nu^3\left(T_2^3 l_3^2 + T_3^2 l_2^3 - T_2^2 l_3^3 - T_3^3 l_2^2 + l_2^2 + l_3^3\right)\|\mathbf{l}\| + \frac{4}{(mc)^4}E_\nu^4\|\mathbf{l}\|^2 . \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь

$$T_2^2 T_3^3 - T_3^2 T_2^3 \equiv \|\mathbf{T}\| = L^2 ,\ \ l_2^2 l_3^3 - l_3^2 l_2^3 \equiv \|\mathbf{l}\| .$$

После указанных преобразований любой момент функции распределения представляется в виде

$$\langle y\rangle = \frac{1}{2L^4}\int \frac{y}{C_\nu}J\left(E_\nu\right)\Phi_0\left(C_2, C_3, C_\nu, E_2, E_3, E_\nu\right)dC_\nu dC_2 dC_3 dE_\nu dE_2 dE_3 , \tag{39}$$

и для его расчета необходимо конкретизировать функцию $\Phi_0\left(C_2, C_3, C_\nu, E_2, E_3, E_\nu\right)$.

Заметим, что при $E_\nu = 0$ вычисления моментов значительно упрощаются, этот факт очевиден хотя бы потому, что при этом формула (38) превращается в $J = L^2$. Якобиан преобразования принимает точно такое же значение, если нет поляризационно-приливного взаимодействия (в этом случае следует положить $l_\alpha^\beta = 0$). В отсутствие гравитационной волны $J = 1$. Случай $E_\nu = 0$ ассоциируется с требованием безмассовости частицы (см. [37]), в дальнейшем мы рассмотрим его наряду с условием $E_\nu \neq 0$.

2.3. Модельная функция распределения

Функция $\Phi_0(C_2, C_3, C_\nu, E_2, E_3, E_\nu)$ представляет собой произвольную функцию интегралов движения, полученных из уравнений характеристик и зашифрованных константами $C_2, C_3, \ldots, E_3, E_\nu$. С другой стороны, в силу определения этих констант как начальных значений соответствующих величин в момент $u = 0$, функция распределения Φ_0 задает *начальное* распределение поляризованных частиц. Будем считать, что в начальный момент $u = 0$, когда поле гравитационной волны отсутствует, импульс и поляризация связаны друг с другом только соотношением ортогональности, поскольку отсутствуют иные физические взаимодействия. Тогда в силу независимости распределения частиц по импульсам и поляризации в начальный момент кинетическая система может быть описана *мультипликативной* функцией распределения $\Phi_0(x, p, S) = f_0(C_2, C_3, C_\nu)\Psi_0(E_2, E_3, E_\nu)$. Для упрощения иллюстрационных расчетов предположим, что все частицы имеют одну и ту же продольную поляризацию, определяемую параметром $E_\nu^0 \neq 0$, а оставшиеся две независимые компоненты вектора поляризации, E_2 и E_3, подчиняются Гауссовому распределению:

$$\Psi(E_2, E_3) = \frac{1}{\pi D_2 D_3} \exp\left[-\frac{\left(E_2 - E_2^0\right)^2}{D_2^2}\right] \exp\left[-\frac{\left(E_3 - E_3^0\right)^2}{D_3^2}\right]. \tag{40}$$

Тогда поляризационная часть функции распределения примет вид

$$\Psi_0(E_2, E_3, E_\nu) = \Psi(E_2, E_3)\,\delta\left(E_\nu - E_\nu^0\right). \tag{41}$$

В качестве функции, задающей распределение частиц по импульсам, $f_0(C_2, C_3, C_\nu)$, рассмотрим релятивистскую функцию Юттнера

$$f_0 \equiv f^{eq}(0) = \frac{N \cdot \lambda}{2\pi m^3 c^3 K_2(\lambda)} \exp\left\{-\frac{c}{k_B T}\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}\right\} \tag{42}$$

и перепишем энергию через интегралы движения:

$$c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2C_\nu}\left[m^2 c^2 + C_2^2 + C_3^2 + 2C_\nu^2\right]. \tag{43}$$

Здесь $\lambda \equiv \dfrac{mc^2}{k_B T}$ — безразмерный параметр, описывающий степень релятивизма системы, T — температура в начальный момент времени, $N = \mathrm{const}$ — число частиц на единицу объема в начальный момент времени, $K_n(\lambda)$ — модифицированная функция Бесселя. Интегрирование по dE_ν сводится к замене E_ν на E_ν^0,

$$\langle y \rangle = \frac{J\left(E_\nu^0\right)}{2L^4} \int y f_0(C_2, C_3, C_\nu)\Psi(E_2, E_3)\frac{dC_\nu}{C_\nu}\, dC_2 dC_3 dE_2 dE_3\,, \tag{44}$$

после чего якобиан $J\left(E_\nu^0\right)$ (38) уже не зависит от переменных интегрирования.

2.4. Макроскопические моменты функции распределения

Для иллюстрации метода приведем расчеты некоторых полных моментов модельной функции распределения (37), где $\Phi_0 = f_0 \cdot \Psi_0$, функция f_0 определена формулами (42) и (43), а Ψ_0 — формулами (40) и (41), а также пример неполного и флуктуационного момента.

2.4.1. Вектор плотности потока числа частиц

Используя формулу (44), где функция f_0 определена формулами (42) и (43), а Ψ_0 — формулами (40) и (41), получаем, что компоненты N_ν, N_α и N_u вектора плотности потока числа частиц как функции запаздывающего времени имеют следующий вид:

$$N_\nu(u) = \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \frac{J}{L^4}, \quad N_\alpha(u) = -\frac{N}{\sqrt{2}mc} E_\sigma^0 \cdot l_\alpha^\sigma \frac{J}{L^4},$$

$$N_u(u) = -\frac{N}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{K_1(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\cdot\left(\Delta_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma} + 2\right) - \frac{2K_1(\lambda)}{mc\lambda K_2(\lambda)}E^0_\nu \cdot g^{\beta\gamma} l^\sigma_\beta \Delta_{\gamma\sigma}\right]\frac{J}{L^4}. \tag{45}$$

Здесь символом $\Delta_{\beta\gamma}$ обозначена комбинация символов Кронекера

$$\Delta_{\beta\gamma} \equiv \delta^2_\beta \delta^2_\gamma + \delta^3_\beta \delta^3_\gamma. \tag{46}$$

Скаляр плотности числа частиц легко получается из (45) с помощью определения Эккарта:

$$n^2(u) \equiv N_i N^i = 2N_u N_\nu + g^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta. \tag{47}$$

Макроскопическая скорость перемещения системы бозонов $V^i \equiv N^i / n$ в поле гравитационного излучения приобретает как продольную (по отношению к направлению распространения гравитационной волны), так и поперечные компоненты. В отсутствие поляризационно-приливного взаимодействия $l^\beta_\alpha = 0$, и поперечные компоненты скорости исчезают, поскольку обращаются в нуль поперечные компоненты вектора потока числа частиц ($N_\alpha = 0$). Но даже при этом продольная компонента вектора макроскопической скорости $V_1 \equiv (V_u - V_\nu)/\sqrt{2}$ оказывается ненулевой в поле гравитационной волны, как подчеркивалось в [24,26]. Любопытно также отметить, что при анализе формул для продольной компоненты вектора потока числа частиц поляризационно-приливное воздействие поля гравитационной волны оказывается скрытым, если $E^0_\nu \to 0$.

2.4.2. Тензор плотности энергии-импульса

Расчет второго классического момента функции распределения дает следующий результат:

$$T_{\nu\nu}(u) = \frac{N}{2}\frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)}\cdot\frac{J}{L^4}, \quad T_{\nu\alpha}(u) = -\frac{N}{2mc}\frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)}E^0_\sigma \cdot l^\sigma_\alpha \frac{J}{L^4},$$

$$T_{\nu u}(u) = \frac{N}{2}\left[\frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}\cdot\Delta_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma} - \frac{2}{mc\lambda}E^0_\nu \cdot \Delta_{\sigma\gamma}g^{\beta\gamma} l^\sigma_\beta\right]\frac{J}{L^4},$$

$$T_{\alpha\sigma}(u) = N\left[\frac{\Delta_{\alpha\sigma}}{\lambda} + \frac{1}{mc\lambda}E^0_\nu \cdot \left(\Delta_{\alpha\gamma} l^\gamma_\sigma + \Delta_{\sigma\beta} l^\beta_\alpha\right)\right]\frac{J}{L^4},$$

$$T_{\alpha u}(u) = \frac{N}{mc}\left[-\frac{1}{2}\frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)}E^0_\mu l^\mu_\alpha + \frac{1}{\lambda}\left(E^0_\sigma \Delta_{\alpha\gamma} l^\sigma_\beta + \frac{1}{2}E^0_\mu \Delta_{\beta\gamma} l^\mu_\alpha\right)g^{\beta\gamma}\right]\frac{J}{L^4},$$

$$T_{uu}(u) = \frac{N}{2}\left[\frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} + \frac{K_1(\lambda)}{\lambda^2 K_2(\lambda)}\Delta_{\alpha\delta\beta\gamma}g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma} - 2\frac{K_0(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\Delta_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{mc}E^0_\nu\left(\frac{K_1(\lambda)}{\lambda^2 K_2(\lambda)}\Delta_{\beta\gamma\xi\rho}g^{\beta\gamma}g^{\alpha\rho}l^\xi_\alpha - \frac{K_0(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\Delta_{\sigma\gamma}g^{\beta\gamma}l^\sigma_\beta\right)\right]\frac{J}{L^4}. \tag{48}$$

Символ $\Delta_{\beta\gamma}$ определен в (46), а аналогичный четырехиндексный объект задается формулой

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\sigma\mu\nu} \equiv\ & 3\left(\delta^2_\alpha\delta^2_\sigma\delta^2_\mu\delta^2_\nu + \delta^3_\alpha\delta^3_\sigma\delta^3_\mu\delta^3_\nu\right) + \delta^2_\alpha\delta^2_\sigma\delta^3_\mu\delta^3_\nu + \delta^2_\alpha\delta^3_\sigma\delta^2_\mu\delta^3_\nu + \\ & + \delta^2_\alpha\delta^3_\sigma\delta^3_\mu\delta^2_\nu + \delta^3_\alpha\delta^2_\sigma\delta^3_\mu\delta^2_\nu + \delta^3_\alpha\delta^2_\sigma\delta^2_\mu\delta^3_\nu + \delta^3_\alpha\delta^3_\sigma\delta^2_\mu\delta^2_\nu.\end{aligned} \tag{49}$$

Анализ компонент тензора энергии-импульса (48) демонстрирует следующие очевидные детали эволюционного процесса:

i. Поляризационно-приливное взаимодействие порождает поток энергии, причем его проекция на плоскость фронта гравитационной волны отлична от нуля.
ii. Продольный поток энергии содержит поляризационно-приливной вклад, который определяется величиной параметра E_ν и исчезает при $E_\nu \to 0$.
iii. Тензор давления в системе бозонов становится анизотропным (непаскалевым) за счет поляризационно-приливных взаимодействий, то есть собственные значения тензора энергии-импульса $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$ различны в поле гравитационного излучения.

2.4.3. Усредненные поляризационные характеристики

Для того чтобы охарактеризовать поляризационные свойства системы в среднем, необходимо вычислить нестандартные моменты A_i и A_{ik} первого и второго порядков [см. формулы (14) и (15)]. Первый из них, A_i, дает среднее по статистическому ансамблю направление вектора поляризации a_i согласно определению $a_i \equiv A_i \Big/ \sqrt{-A_k A^k}$. Собственные векторы второго из них, симметричного тензора поляризации A_{ik}, дают так называемые главные направления поляризации. В поле гравитационной волны при наличии поляризационно-приливных взаимодействий пространственно-подобный вектор a_i, вообще говоря, не совпадает ни с одним из главных направлений аналогично тому, как не совпадают векторы макроскопической скорости, определенные согласно правилам Эккарта и Ландау-Лифшица. Для иллюстрации идеи расчетов найдем первый момент A_i. Для этого подставим компоненты 4-вектора поляризации S^i (32) в формулу (44), в которой распределение функции f_0 задано формулами (42) и (43), а распределение Ψ_0 — формулами (40) и (41). Результат выглядит следующим образом:

$$A_v(u) = NE_v^0 \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} \cdot \frac{J}{L^4}, \quad A_\alpha(u) = NE_\sigma^0 \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} \cdot \left[T_\alpha^\sigma - \frac{1}{mc} E_v^0 \cdot l_\alpha^\sigma\right] \frac{J}{L^4},$$

$$A_u(u) = N\left\{2E_v^0\left[\frac{K_0(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\Delta_{\beta\gamma}\left(g^{\alpha\gamma}T_\alpha^\beta - \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}\right) - \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)}\right] + \frac{\langle E_\sigma E_\rho\rangle}{\sqrt{2}mc} g^{\alpha\delta}T_\alpha^\sigma l_\delta^\rho + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}\left(E_v^0\right)^2}{mc}\left[\sqrt{2}\frac{K_0(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\Delta_{\sigma\gamma}g^{\beta\gamma}l_\beta^\sigma - \frac{K_1(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\Delta_{\sigma\gamma}\left(g^{\sigma\delta}l_\delta^\gamma + g^{\gamma\delta}l_\delta^\sigma - g^{\alpha\delta}l_\delta^\gamma T_\alpha^\sigma\right)\right]\right\}\frac{J}{L^4}. \tag{50}$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\langle E_\mu E_v\rangle \equiv \delta_\mu^2\delta_v^2\left[\left(E_2^0\right)^2 + \frac{D_2^2}{2}\right] + \delta_\mu^3\delta_v^3\left[\left(E_3^0\right)^2 + \frac{D_3^2}{2}\right] + \Delta_{\mu v}E_2^0E_3^0. \tag{51}$$

Отметим, что компонента A_v, представляющая собой проекцию момента A_i на изотропное направление, заданное вектором Киллинга $\xi_{(v)}^i$, исчезает, если $E_v = 0$. В таком случае норма вектора A_i имеет простой вид

$$\sqrt{-A_k A^k} = N\frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} \cdot \frac{1}{L^2}\sqrt{-g^{\alpha\beta}T_\alpha^\sigma T_\beta^\rho E_\sigma^0 E_\rho^0}. \tag{52}$$

2.4.4. Производство энтропии

Для модели Хрипловича, представленной формулами (28), производство энтропии (25) равно нулю, поскольку тождественно обращается в нуль сумма $\dfrac{\partial F^i}{\partial p^i} + \dfrac{\partial G_i^{(1)}}{\partial S_i}$. Это может быть интерпретировано в том духе, что поляризационно-приливные взаимодействия данного типа не сопровождаются необратимыми процессами.

2.4.5. Пример вычисления неполного и флуктуационного моментов

Пусть величина E_v распределена независимо от других поляризационных параметров и ее функция распределения $\phi(E_v)$ характеризуется нулевым средним $E_v = 0$. Для описания флуктуаций, вносимых в систему этим поляризационным параметром, подсчитаем, во-первых, полный момент N_i (45) с нулевым средним,

$$N_v(E_v = 0) = \frac{N}{\sqrt{2}L^2}, \quad N_\alpha(E_v = 0) = -\frac{N}{\sqrt{2}mcL^2}E_\sigma^0 \cdot l_\alpha^\sigma,$$

$$N_u(E_v = 0) = \frac{N}{\sqrt{2}L^2}\left[1 - \frac{K_1(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)} \cdot \left(\Delta_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma} + 2\right)\right], \tag{53}$$

во-вторых, неполный момент, в котором осталось непроведенным интегрирование по dE_v,

$$N_v(E_v)=\frac{N}{\sqrt{2}}\cdot\frac{J(E_v)}{L^4},\quad N_\alpha(E_v)=-\frac{N}{\sqrt{2}mcL^2}E_\sigma^0\cdot l_\alpha^\sigma\frac{J(E_v)}{L^4},$$

$$N_u(E_v)=\frac{N}{\sqrt{2}L^2}\left[1-\frac{K_1(\lambda)}{\lambda K_2(\lambda)}\cdot\left(\Delta_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma}+2\right)-\frac{2K_1(\lambda)}{mc\lambda K_2(\lambda)}E_v\cdot g^{\beta\gamma}l_\beta^\sigma\Delta_{\gamma\sigma}\right]\frac{J(E_v)}{L^4}, \tag{54}$$

и наконец их разность,

$$\Delta N_i\equiv N_i(E_v)-N_i(E_v=0)=N_i(E_v=0)\cdot Z(E_v)-\delta_i^u\frac{N\sqrt{2}K_1(\lambda)}{mc\lambda K_2(\lambda)}E_v\cdot g^{\beta\gamma}l_\beta^\sigma\Delta_{\gamma\sigma}\frac{J(E_v)}{L^4}. \tag{55}$$

Здесь для удобства введена вспомогательная функция $Z(E_v)$:

$$Z(E_v)\equiv\frac{J(E_v)}{L^2}-1,\quad Z(0)=0. \tag{56}$$

Функции $Z(E_v)$ и $J(E_v)$ являются полиномами четвертой степени относительно своего аргумента, а потому формула (55) описывает конечные флуктуации пятого порядка. При необходимости описания малых флуктуаций формула (55) легко линеаризуется по E_v.

Использование ковариантного формализма расширенного фазового пространства для теоретического моделирования неравновесных процессов, индуцированных в многочастичных системах нестационарными гравитационными полями, открывает новые интересные перспективы. Например, в тех случаях, когда эволюционные процессы разворачиваются на плоском гравитационно-волновом фоне, такой подход позволяет описать различные стохастические явления, флуктуации и шумы в многочастичных системах, детектирующих гравитационные волны. Если речь идет о расширении Вселенной на ранних стадиях (в рамках анизотропных или изотропной моделей), то возмущения скалярного, векторного и тензорного типа, приводящие к образованию галактических структур, могут, очевидно, стать предметом дискуссии на языке кинетической теории на расширенном фазовом пространстве. Современный этап ускоренного расширения Вселенной и связанные с этим явлением бурные дискуссии по поводу темной энергии побуждают к построению новых моделей взаимодействия многочастичных систем с неравновесным термостатом или внутренним стохастическим резервуаром в рамках расширенной кинетической теории. Все эти перспективные идеи свидетельствуют о том, что релятивистскую кинетическую теорию как наследницу общей и специальной теории относительности, несомненно, ждет дальнейший расцвет и интересное будущее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jüttner F. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie / F. Jüttner // Ann. Phys. — 1911. — B.34. — S.856-882.
2. Walker A.G. The Boltzmann equations in general relativity / A.G.Walker // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1936. — V.4. — P.238-253.
3. Lichnerowicz A. Propriйtйs statistiques des ensembles de particules en relativitй restreinte / A.Lichnerowicz., R.Marrot // Compt. Rend. — 1940. — V.210. — P.759-761.
4. де Гроот С. Релятивистская кинетическая теория. Принципы и применения / С.де Гроот, В.ван Леувен, Х.ван Верт. — М.: Мир, 1983. — 422 с.
5. Tauber G.E. Internal state of a graviting gas / G.E.Tauber, I.W.Weinberg // Phys. Rev. — 1961. — V.122. — № 4. — P.1342-1365.
6. Черников Н.А. Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле / Н.А.Черников // ДАН СССР. — 1962. — Т.144. — №1. — С.89-92.
7. Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas / W.Israel // J. Math. Phys. — 1963. — V.4. — №9. — P.1163-1181.
8. Stewart J.M. Non-equilibrium Relativistic Kinetic Theory / J.M.Stewart. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971. — 113 p.
9. Ehlers J. General Relativity and Kinetic Theory / J. Ehlers // Relativita Generale e Cosmologia, ed. R.Sashs. — NY: Academic Press, 1971. — P.1-70.
10. Балакин А.Б. О критическом характере гравитационно-волновой модуляции электрического и магнитного полей в изотропных средах / А.Б. Балакин, Д.В. Вахрушев // Изв. вузов. Физика — 1993. — №9. — С.28-33.
11. Балакин А.Б. Гравитационное излучение и снятие вырождения по скрытым параметрам в релятивистской гидродинамике / А.Б.Балакин, Д.Н.Горохов // Изв. вузов. Физика — 1993. — №8. — С.108-111.

12. Balakin A.B. Gravity Waves and symmetry of boundary phenomena in relativistic gaseous systems / A.B.Balakin, A.L.Trondin // Rept. Math. Physics — 1995. — V.36. — №1. — P.31-42.
13. Balakin A.B. Evolution of relativistic hierarchical systems in the field of gravitational radiation / A.B.Balakin // Annalen der Physik. — 2000. — V.9. — P.21-24.
14. Балакин А.Б. Эволюция релятивистских иерархических систем в поле гравитационного излучения / А.Б.Балакин — Казань, 1999. — 327 с.
15. Israel W. The dynamics of polarization / W.Israel // GRG. — 1978. — V.9. — №5. — P.451-468.
16. Feldman Y. The internal state of a gas of particles with spin / Y.Feldman, G.E.Tauber // GRG. — 1980. — V.12. — №10. — P.837-856.
17. Elze H.-T. Quark-gluon transport theory / H.-T.Elze, U.Heinz // Phys. Rept. — 1989.—V.183. —№ 3.—P.81-135.
18. Litim D.F. Semi-classical transport theory for non-Abelian plasmas / D.F.Litim, C.Manuel. // Phys. Rept. — 2002. — V.364. — P.451-539.
19. Лаптев Б.Л. Пространство опорных элементов / Б.Л.Лаптев // Геометрия и теория относительности. — Казань: КГУ, 1958. — С.75-147.
20. Власов А.А. Статистическая функция распределения / А.А.Власов. — М.: Наука, 1966. — 356 с.
21. Картан Э. Теория конечных и непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера / Э.Картан, — М.: МГУ, 1963. — 368 с.
22. Игнатьев Ю.Г. Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле / Ю.Г.Игнатьев // Гравитация и теория относительности. — Казань: Изд-во КГУ, 1983.—Вып. 20.— С.50-108.
23. Иванов Г.Г. Статистические системы частиц со спином в электромагнитном и гравитационном полях / Г.Г.Иванов // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — Вып. 14. — С.62-69.
24. Балакин А.Б. Действие плоских гравитационных волн на бесстолкновительные плазмоподобные среды / А.Б.Балакин, Ю.Г.Игнатьев // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — Вып. 14. — С.43-62.
25. Smolin L. On the nature of quantum fluctuations and their relation to gravitation and principle of inertia / L.Smolin // Class. Quantum Grav. — 1986. — V.3. — P.347-359.
26. Balakin A.B. Gravity waves and macroscopic tidal self–interaction in many–particle system / A.B. Balakin, P.V. Schetchikov // Grav. & Cosmol. — 1999. — V.5. — №4(20). — P.347-350.
27. Balakin A.B. Curvature coupling and accelerated expansion of the Universe / A.B.Balakin // GRG. — V.36. — №7. — P.1513-1525.
28. Kerner R. Generalization of the Kaluza–Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group / R.Kerner // Ann. Inst. H. Poincaré. — 1968. — V.9. — P.143-152.
29. Wong C. Field and particle Equations for the Classical Yang-Mills Field and Particles with Isotopic spin / C.Wong // Nuovo Cimento. — 1970. — V.65 A. — №4. — P.689-694.
30. Balakin A.B. An exactly integrable model of evolution of relativistic isospin system in the field of gravitational radiation / A.B.Balakin, F.G.Suslikov // C. R. Acad. Sc. Paris. — 1997. — T.324. — Serie IIb. — P.619-626.
31. Balakin A.B. Parametric phenomena of the particle dynamics in a periodic gravitational wave field / A.B.Balakin, V.R.Kurbanova, W.Zimdahl // J. Math. Phys. — 2003. — V.44. — №11. —P.5120-5140.
32. Balakin A. Anomalous polarization-curvature interaction in a gravitational-wave field / A.Balakin, V.Kurbanova // Grav. & Cosmol. — 2004. — V.10. — №1-2(37-38). — P.98-106.
33. Gemelli G. Dynamical effects of gravitational shock waves / G.Gemelli // GRG. — 1997. — V.29. — №9. — P.1163-1180.
34. Хриплович И.Б. Частица с внутренним моментом в гравитационном поле / И.Б.Хриплович // ЖЭТФ. — 1989. — Т.96. — Вып. 2. — С.385-390.
35. Tamm I. Zur Elektrodynamik des rotierenden Elektrons / I.Tamm // Zs. Phys. 1929. — B.55. — S.199-220.
36. Balakin A.B. Precession of a particle with anomalous magnetic moment in electromagnetic and gravitational pp-wave fields / A.B. Balakin, V. Kurbanova, W. Zimdahl // Grav. & Cosmol. — 2002. — V.8. — Suppl. II. — P.6-9.
37. Balakin A.B. Gravitational radiation and birefringence induced by curvature / A.B. Balakin // Clas. Quantum Grav. — 1997. — V.14. — №10. — P.2881-2893.