

УДК 530.12; 539.12

**О МЕХАНИЗМЕ ГЕНЕРАЦИИ МАСС ФЕРМИОНОВ В 8-МЕРНОЙ ТЕОРИИ
ГРАВИ-СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ****Ю.С.Владимиров, С.В.Болохов***

В работе анализируется фермионный сектор 8-мерной теории гравитационных взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Рассмотрен способ генерации масс спинорных полей с использованием конформных (вейлевских) преобразований, что может трактоваться как геометрический аналог механизма Хиггса. Показано, что в данном подходе удается избежать появления планковских масс заряженных частиц, представляющих собой типичную проблему калуцы-клейновских теорий данного типа.

Построение объединенной теории фундаментальных взаимодействий — одна из главных задач современной теоретической физики. Важным продвижением к пониманию природы взаимодействий оказалось открытие принципа калибровочной инвариантности, что позволило построить ряд достаточно реалистичных объединенных теорий. Таковыми являются, например, общеизвестная Стандартная Модель и ряд ее обобщений на более широкие калибровочные группы ($SU(5)$, $SU(10)$ и т.д.), включая суперсимметричные расширения. В последнее время такие модели рассматриваются как низкоэнергетический предел более общей теории, а именно теории суперструн, построение которой на сегодняшний день еще не завершено.

Отметим, что современные струнные модели с необходимостью строятся в пространстве высшего числа измерений. Есть все основания полагать, что идея *многомерного пространства-времени* должна быть включена в число фундаментальных физических принципов, лежащих в основании объединенной теории. Данная идея воплощена в различных вариантах теории Калуцы — Клейна (КК). Нам представляется, что анализ самостоятельных моделей такого типа (вне их связи с теорией струн) имеет большой теоретический и методологический интерес.

Первоначальный 5-мерный вариант теории Калуцы [1], нацеленный на геометризацию электромагнетизма, может быть легко обобщен на случай неабелевых полей за счет увеличения размерности и выбора подходящей топологии пространства дополнительных измерений. Соответствие со стандартной моделью обеспечивается путем размерной редукции.

Выбор топологии внутреннего пространства определяется конкретным вариантом КК-теории. Часто полагают, что внутреннее пространство должно допускать группу движений, соответствующую рассматриваемой калибровочной группе. Существует, однако, более простой подход, когда дополнительные измерения компактифицированы в обычный тор $S^1 \times \dots \times S^1$, а неабелева структура векторных полей-переносчиков взаимодействий целиком определяется специальным способом их вложения в матрицу метрического тензора. В данной работе мы будем следовать именно этому подходу. Ранее показано [2 – 4], что стандартный лагранжиан сильных (электрослабых) взаимодействий может быть получен на этом пути из КК-теории в восьми (семи) измерениях соответственно. Более того, 7D-теорию гравитационно-электрослабых взаимодействий можно рассматривать как результат частичной размерной редукции 8D-теории гравитационно-сильных взаимодействий [4]. Поэтому далее мы рассматриваем только случай 8 измерений.

Цель статьи — продемонстрировать механизм генерации масс фермионов в рамках 8D-теории гравитационно-сильных взаимодействий. В стандартной теории общепринят механизм Хиггса. Его геометрическим аналогом в 8D-теории являются конформные преобразования метрики, которые первоначально использовались для перенормировки масс векторных полей в бозонном секторе теории [4,5].

Краткий обзор 8D КК-теории гравитационно-сильных взаимодействий

В данном разделе мы кратко рассмотрим принципы 8-мерной теории гравитационно-сильных взаимодействий. Более подробно см. [2 – 5].

В теории используется 8-мерное многообразие $M_8 = V_4 \times B_4$ сигнатуры $(+ - - -; - - - -)$, где 4-мерная гиперповерхность V_4 отождествляется с физическим пространством-временем, а внутреннее пространство B_4 есть 4-тор $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. Соглашения об индексах: большие латинские ($A, B, \dots = 0, \dots, 7$) нумеруют коор-

*© Ю.С.Владимиров, E-mail: yusvlad@rambler.ru; С.В.Болохов; E-mail: boloh@rambler.ru, Московский государственный университет (Россия), 2005.

динаты в M_8 , нижние греческие ($\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$) относятся к V_4 , нижние латинские ($a, b, \dots = 4, 5, 6, 7$) обозначают координаты в B_4 . “Локальные” индексы, нумерующие компоненты величин, спроектированных на тетраду (октаду), заключены в скобки.

Пусть G_{MN} — метрика в M_8 . Используя тетрадный (в 8D случае — “октадный”) формализм, введем локальную ортонормированную октаду $G_{M(A)}$, удовлетворяющую обычным свойствам:

$$G_{M(A)}G_N^{(A)} = G_{MN}, \quad G_{M(A)}G_{(B)}^M = \eta_{(AB)}, \quad (1)$$

где $\eta_{(AB)}$ — метрика Минковского в касательном пространстве TM^8 . Конкретный выбор октадного базиса соответствует выбору обобщенной “системы отсчета” [4,6].

Для дальнейших целей удобно также использовать усеченный октадный метод (4+1+1+1+1-расщепление), когда из G_{MN} явно выделяется 4D-часть g_{MN} :

$$G_{MN} = g_{MN} + G_{M(s)}G_N^{(s)}, \quad g_{MN} \equiv G_{M(\alpha)}G_N^{(\alpha)}, \quad g_{MA}G_{(s)}^A G_N^{(s)} = 0. \quad (2)$$

Концепция обобщенной “системы отсчета” предполагает, что наблюдатель оперирует лишь с тензорными величинами, спроектированными на 4D-сечение, характеризуемое тензором g_{MN} , и на направления, определенные тетрадой $G_{A(s)}$, $s = 4, 5, 6, 7$. В нашем случае 4D-гиперповерхность совпадает с V_4 . Используя произвол в выборе координат x^s , можно осуществить калибровку системы отсчета путем подходящей ориентации координатного базиса по отношению к векторам октады. Мы используем так называемую *четырежды хронометрическую* калибровку [4,5], в которой

$$G_{A(B)} = \begin{pmatrix} G_{\alpha(\beta)} & G_{\alpha(b)} \\ G_{a(\beta)} = 0 & G_{a(b)} = \text{diag} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Для контравариантных компонент октады мы имеем $G_{(b)}^a = 0$, $G_{(b)}^a = \text{diag}$. В данной калибровке тензор g_{AB} автоматически имеет ненулевые компоненты лишь с 4D-индексами α, β , что позволяет отождествить $g_{\alpha\beta}$ с метрикой на V_4 . Существенно, что сохраняется произвол в остаточных 4D-координатных преобразованиях $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, используемых в ОТО. Иными словами, выбор фиксированной калибровки не нарушает релятивистской общековариантности теории на 4-мерном уровне.

В дополнение к выбору калибровки, носящему чисто геометрический смысл, мы налагаем ряд условий на метрику G_{AB} , имеющих физическое содержание. Тензор $g_{\alpha\beta}$ (метрика на V_4) полагается зависящим только от 4D-координат x^μ . Компоненты G_{ab} считаются константами всюду на M_8 , так как они появляются в выражениях, определяющих постоянные характеристики частиц, такие как масса или заряд. Для этого мы используем простейшие и симметричные условия: $G_{(b)}^a = \sigma\delta_b^a$, где $y = \text{const}$. Четверка векторов $G_{\alpha(s)}$, $s = 4 \dots 7$, зависит от всех координат x^M и, в соответствии с общими принципами теорий Калуцы-Клейна, содержит информацию о калибровочных бозонах (в нашем случае, глюонах).

Компактификация дополнительных измерений в 4-тор означает, что зависимость всех физических полей от координат имеет следующий характер:

$$\Phi(x^M) = \phi(x^\mu) \exp[ik\beta x^4 + i\gamma(\varepsilon_5 x^5 + \varepsilon_6 x^6 + \varepsilon_7 x^7)], \quad (4)$$

где β, γ характеризуют периоды компактификации, а величины $k, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ суть безразмерные целочисленные гармоники. Выделенность координаты x^4 обусловлена тем, что она имеет клейновский характер (ответственна за появление масс частиц), в то время как остальные дополнительные координаты - калуцевские (описывают заряд частиц, в данном случае — хроматический).

Согласно калибровочной теории сильных взаимодействий, кварки могут находиться в трех цветовых состояниях $q_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, физическая эквивалентность которых выражается в наличии цветовой $SU(3)$ -симметрии. В рассматриваемой 8-мерной геометрической теории для описания кварков предлагается использовать следующую зависимость:

$$q_{(1)} \sim \exp(i\gamma x^5), \quad q_{(2)} \sim \exp(i\gamma x^6), \quad q_{(3)} \sim \exp(i\gamma x^7). \quad (5)$$

Цветовая симметрия означает равенство периодов компактификации калуцевских координат x^5, x^6, x^7 , определяющих хроматические заряды соответствующих кварковых состояний согласно (5).

Физические глюонные поля, зависящие от координат x^μ , вводятся как коэффициенты разложения функций $G_{\alpha(s)}$ по экспоненциальным гармоникам на торе:

$$G_{\alpha(s)} \sim a_s A_\alpha + b_s B_\alpha + x_s^\pm X_\alpha^{(\pm)} e^{\pm i\gamma(x^5 - x^6)} + y_s^\pm Y_\alpha^{(\pm)} e^{\pm i\gamma(x^5 - x^7)} + z_s^\pm Z_\alpha^{(\pm)} e^{\pm i\gamma(x^6 - x^7)}, \quad (6)$$

где A_α, B_α — хроматически нейтральные глюонные поля (соответствующие диагональным матрицам Гелл-Манна λ_3, λ_8), $X_\alpha^{(\pm)}, Y_\alpha^{(\pm)}, Z_\alpha^{(\pm)}$ — 6 заряженных глюонных полей, а безразмерные константы $a_s, b_s, x_s^\pm, y_s^\pm, z_s^\pm$ определяются из принципа соответствия.

Отметим, что разложение (6) влечет комплексность 8-мерной метрики G_{AB} . Данное обстоятельство не является критическим, поскольку в ходе размерной редукции метрика $g_{\alpha\beta}$ 4-мерного физического пространства-времени оказывается вещественной.

Основной объект 8-мерной геометрической теории — гиперплотность лагранжиана:

$$\tilde{L} \equiv \sqrt{-G^{(8)}} L = \sqrt{-G^{(8)}} \left[-\frac{{}^8R}{2\kappa c} + \frac{i\hbar c}{2} \bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi \right] + h.c., \quad (7)$$

где $\kappa = 8\pi G/c^4$, 8R есть 8D-скалярная кривизна, $G^{(8)} = \det(G_{MN})$, Γ^M — набор матриц Дирака, удовлетворяющих условию $\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2G^{MN}$; $\Psi(x)$ есть спинорное поле материи, а ∇_M — ковариантная производная спинора. Эрмитово-сопряженные члены обозначены как $h.c.$

Размерная редукция предполагает интегрирование (“усреднение”) 8D-действия ${}^8S = \int d^8x \tilde{L}$ по периодам дополнительных измерений. Заметим, что $\sqrt{-G^{(8)}} = \sigma^{-4} \sqrt{-g}$ в используемой калибровке, так что

$$\int d^8x \tilde{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\sigma^{-4} \int dx^5 dx^6 dx^7 dx^8 L \right) \equiv \int d^4x \sqrt{-g} {}^4L, \quad (8)$$

где 4L — 4D-лагранжиан гравитационных взаимодействий. Перед усреднением необходимо представить все геометрические величины, входящие в (7), в 4+1+1+1+1-расщепленном виде в соответствии с (2).

Бозонный сектор теории представлен 8D-скалярной кривизной, которая в ходе редукции переходит в выражение:

$$\langle {}^8R \rangle \rightarrow {}^4R + L_{Y-M.SU(3)} + R_{(m)}, \quad (9)$$

где первый член 4R — обычная 4D-кривизна (лагранжиан Эйнштейна-Гильберта ОТО). Второй член есть кинетическая часть лагранжиана калибровочных $SU(3)$ -полей. Третье слагаемое $R_{(m)}$ в (9) приводит к

планковским массам векторных полей ($M_{Pl} \cong 10^{19}$ GeV), поскольку содержит квадратичные комбинации производных $\partial_s G_{\alpha(s)}$; $r, s = 4, 5, 6, 7$. Планковские массы заряженных полей представляют собой типичную проблему КК-теорий данного типа. Их можно перенормировать подходящим конформным преобразованием исходной метрики G_{AB} , так как при этом в (9) появляется дополнительный конформный член, который может скомпенсировать массовое слагаемое $R_{(m)}$ [5].

Фермионный сектор 8D КК-теории

Гиперплотность лагранжиана фермионной материи $\Psi(x)$ имеет вид

$$\tilde{L}_F = \frac{1}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i\hbar c (\bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi) + h.c. \quad (10)$$

Матрицы Дирака представляются как $\Gamma^M = \Gamma^{(A)} G_{(A)}^M$, где $\Gamma^{(A)}$ суть восемь образующих алгебры Клиффорда $C(1,7)$, удовлетворяющих свойству $\{\Gamma^{(A)}, \Gamma^{(B)}\} = 2\eta^{(AB)}$. Дираковское сопряжение определено как $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma^{(0)}$. Объекты $\Gamma^{(A)}$ в 8D-случае допускают реализацию 16-рядными квадратными матрицами. Соответствующее представление строится на базе обычных 4-мерных дираковских матриц по известным правилам блочного удвоения.

Ковариантная производная спинора есть $\nabla_M \Psi = \partial_M \Psi - T_M \Psi$. Спировая связность представлена коэффициентами Фока-Иваненко: $T_M = \frac{1}{4} \Delta_{M(AB)} \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)}$, где $\Delta_{M(AB)}$ обозначают коэффициенты вращения Риччи [4,6].

Легко показать, что оператор $\Gamma^M \partial_M$, записанный в 4+1+1+1+1-расщепленном виде с учетом 4-хронометрической калибровки, таков:

$$\Gamma^M \partial_M = \Gamma^\mu \partial_\mu + \sum_s \sigma G_{\mu(s)} \Gamma^\mu \partial_s + \sum_s \sigma \Gamma^{(s)} \partial_s. \quad (11)$$

Тогда гиперплотность лагранжиана фермионной материи (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}_F &= \frac{1}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i \hbar c \times \left(\bar{\Psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \bar{\Psi} \sum_s \sigma G_{\mu(s)} \Gamma^\mu \partial_s \Psi + \bar{\Psi} \sum_s \sigma \Gamma^{(s)} \partial_s \Psi - \bar{\Psi} \Gamma^M T_M \Psi \right) + h.c. = \\ &= \tilde{L}_{free} + \tilde{L}_{int} + \tilde{L}_{mass} + \tilde{L}_{anomal}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\tilde{L}_{free}$ — гиперплотность лагранжиана свободного фермионного поля, $\tilde{L}_{int}$ — гиперплотность лагранжиана взаимодействия фермионов с векторными бозонами, $\tilde{L}_{mass}$ — массовые слагаемые фермионов, а $\tilde{L}_{anomal}$ — слагаемые, содержащие коэффициенты вращения Риччи и описывающие взаимодействие с гравитацией и аномальные моменты [4].

В данной работе мы исследуем массовую часть фермионного лагранжиана:

$$\tilde{L}_{mass} = \frac{1}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i \hbar c \left(\bar{\Psi} \sum_s \sigma \Gamma^{(s)} \partial_s \Psi \right) + h.c. \quad (13)$$

16-компонентное спинорное поле Ψ можно разложить на четыре 4-компонентных спинора ψ_f , $f = 1, \dots, 4$ (что продиктовано блочной структурой Γ -матриц):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_4, \bar{\psi}_3, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^{(0)}. \quad (14)$$

Спиноры ψ_f содержат кварковый цветовой триплет $q_{(i)}(x^\mu)$, $i = 1, 2, 3$, фундаментального представления группы $SU(3)$ (рассматривается случай одного аромата):

$$\psi_f = c_f \left(q_{(1)} e^{i\gamma x^5} + q_{(2)} e^{i\gamma x^6} + q_{(3)} e^{i\gamma x^7} \right) e^{ik\beta x^4}, \quad f = 1, \dots, 4, \quad (15)$$

где c_f — комплексные константы порядка единицы, а k есть целое число, характеризующее зависимость от клейновской координаты x^4 .

Отсюда ясно, что выражение (13) действительно носит массовый характер, так как содержит квадратичные комбинации полей $q_{(i)}$.

Конформные преобразования

Планковские массы в бозонном секторе 8D КК-теории перенормируются через конформные преобразования исходной метрики G_{AB} . Рассмотрим, как учет этих преобразований скажется на фермионном секторе теории.

При конформных (вейлевских) преобразованиях метрика умножается на ненулевую скалярную функцию $\xi^2(x)$ (конформный фактор): $G_{AB} \rightarrow \xi^2(x) G_{AB}$. (Так как у нас метрика в общем случае комплексна, функция также может быть комплексной). Геометрические величины, связанные с метрикой, также преобразуются:

$$\Gamma^M \rightarrow \xi^{-1} \Gamma^M, \quad \sqrt{-G^{(8)}} \rightarrow \xi^8 \sqrt{-G^{(8)}}, \quad T_M \rightarrow T_M + \frac{1}{4} \partial_L (\ln \xi) \times [\Gamma^L, \Gamma_M]. \quad (16)$$

Скалярная кривизна (геометрическая часть полного лагранжиана КК-теории) тоже преобразуется, причем добавочный конформный член содержит квадратичные комбинации бозонных полей и позволяет перенормировать их планковские массы подходящим выбором конформного фактора (что фиксирует определенную физическую “конформную калибровку”).

Конформные преобразования спинорных полей предполагаются следующими:

$$\Psi(x) \rightarrow \xi^\omega(x) \Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) \xi^{\omega*}(x). \quad (17)$$

Значение ω (конформный вес спинорного поля) *a priori* не фиксировано. Обычно его выбор производится из эвристических соображений: конформной инвариантности уравнений движения или действия, канонической размерности поля и т.д. Так, выбор $\omega = (1 - N)/2$ обеспечивает (при вещественном конформном факторе) конформную инвариантность действия безмассового дираковского поля в N измерениях [7].

В случае произвольного конформного веса $\omega \neq 0$ и комплексного конформного фактора закон преобразования гиперплотности фермионного лагранжиана (10) выглядит следующим образом:

$$\tilde{L}_F \rightarrow \tilde{L}'_F = (\xi^\omega \xi^{\omega*} \xi^7) \frac{1}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i\hbar c (\bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi) + \frac{\Omega(\omega)}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i\hbar c (\bar{\Psi} \Gamma^M \Psi) \xi^7 (\xi^{\omega*} \partial_M \xi^\omega) + h.c., \quad (18)$$

где $\Omega(\omega) = 1 + 7/(2\omega)$. (Случай $\omega = 0$ является предельным). Заметим, что при вещественном конформном факторе и $\omega = -7/2$ гиперплотность лагранжиана (10) конформно-инвариантна в полном соответствии со сказанным выше.

Анализ бозонного сектора [5] показывает, что конформный фактор $\xi(x)$, дающий перенормировку масс векторных бозонов, следует брать в виде

$$\xi(x) = \left(1 + \phi_1 e^{i\beta x^4} + \phi_2 e^{-i\beta x^4} + \phi_3 e^{i\gamma(x^5 + x^6 + x^7)} + \phi_4 e^{-i\gamma(x^5 + x^6 + x^7)} \right)^{1/3}, \quad (19)$$

где ϕ_i ($i=1...4$) — некоторые малые константы. Конформный фактор в общем случае комплексный, и из выражения (18) видно, что гиперплотность фермионного лагранжиана уже не будет конформно-инвариантной при любом выборе конформного веса спиноров. Ниже мы рассматриваем общий случай, не фиксируя конкретное значение ω .

В ранних вариантах рассматриваемой КК-теории [8] коэффициенты ϕ_i зависели от координат x^μ и рассматривались как скалярные поля в 4D-пространстве-времени (хиггсовские бозоны). Однако, как показывает более поздний анализ, для получения масс фермионов эти коэффициенты достаточно считать константами.

Таким образом, учет конформных преобразований в фермионном секторе приводит к тому, что процедура размерной редукции (включающая усреднение по дополнительным координатам) применяется к лагранжиану, модифицированному согласно (18). Интегрирование упрощается, если использовать следующую лемму о факторизации:

Лемма. Для конформного фактора (19) конформная и спинорная части в (18) могут быть усреднены независимо в любом порядке по ϕ_i :

$$\langle \tilde{L}'_F \rangle = \frac{1}{2} i\hbar c \sqrt{-G^{(8)}} \left(\langle \xi^\omega \xi^{\omega*} \xi^7 \rangle \langle \bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi \rangle + \Omega(\omega) \langle \bar{\Psi} \Gamma^M \Psi \rangle \langle \xi^7 (\xi^{\omega*} \partial_M \xi^\omega) \rangle \right) + h.c., \quad (20)$$

где введено обозначение

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{\beta \gamma^3}{(2\pi)^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^\tau dx^4 dx^5 dx^6 dx^7 (\dots), \quad \tau = \frac{2\pi}{\beta}, \quad T = \frac{2\pi}{\gamma} \quad (21)$$

(нормировка соответствует равенству $\langle \exp[i\gamma(x^r - x^s)] \rangle = \delta_{rs}$, $p, s = 5, 6, 7$).

Доказательство леммы сводится к простому анализу экспоненциальной структуры входящих в (20) выражений и по существу тривиально.

Массы фермионов в 8D-теории

Рассмотрим массовую часть (13) фермионного лагранжиана:

$$\tilde{L}_{mass} = \frac{1}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i\hbar c \bar{\Psi} \sum_{s=4}^7 \Gamma^{(s)} \partial_s \Psi + h.c. \quad (22)$$

При конформных преобразованиях данное выражение модифицируется следующим образом:

$$\tilde{L}'_{mass} = (\xi^\omega \xi^\omega \xi^7) \frac{1}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i \hbar c \sigma \sum_s \Gamma^{(s)} \partial_s \Psi + \frac{\Omega(\omega)}{2} \sqrt{-G^{(8)}} i \hbar c \sigma \sum_s (\bar{\Psi} \Gamma^{(s)} \Psi) \xi^7 (\xi^\omega \partial_s \xi^\omega) + h.c. \quad (23)$$

Данное выражение необходимо представить в терминах кварковых полей согласно (15) и проинтегрировать (усреднить) по x^s , $s = 4 \dots 7$. Используя лемму о факторизации, произведем независимое усреднение каждой части в (23).

1. Усреднение спинорной части в первом слагаемом в (23) (с использованием блочного представления Г-матриц) приводит к выражению

$$i < \bar{\Psi} \sum_{s=4}^7 \Gamma^{(s)} \partial_s \Psi > = - \sum_{i=1}^3 \left[\gamma F_i (\bar{q}_{(i)} q_{(i)}) + i k \beta F_4 (\bar{q}_{(i)} \gamma_5 q_{(i)}) \right], \quad (24)$$

где введены обозначения для вещественных комбинаций коэффициентов c_f :

$$\begin{aligned} F_1 &= (c_1^* c_1 - c_2^* c_2 + c_3^* c_3 - c_4^* c_4); & F_2 &= i(c_2^* c_1 - c_1^* c_2 + c_4^* c_3 - c_3^* c_4); \\ F_3 &= i(c_4^* c_1 + c_3^* c_2 - c_2^* c_3 - c_1^* c_4); & F_4 &= (c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3 + c_4^* c_4). \end{aligned} \quad (25)$$

(Матрица γ_5 — обычная дираковская киральная матрица, $\gamma_5^2 = 1$.)

Заметим, что в отсутствие конформного преобразования выражение (24) дало бы (с точностью до коэффициента) *собственное* (не конформное) массовое слагаемое для кваркового цветового триплета $q = (q_{(1)}, q_{(2)}, q_{(3)})$. При этом требование $SU(3)$ -инвариантности диктует условия $F_1 = F_2 = F_3 \equiv F(c_f)$, которым всегда можно удовлетворить нужным выбором констант c_f .

2. Усредним спинорную часть во втором слагаемом в (23):

$$< (\bar{\Psi} \Gamma^{(4)} \Psi) > = i F_4 \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{(i)} \gamma_5 q_{(i)}; \quad < (\bar{\Psi} \Gamma^{(s)} \Psi) > = F \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{(i)} q_{(i)}, \quad s = 5, 6, 7. \quad (26)$$

3. Усреднение членов, содержащих конформный фактор, дает ненулевой результат, лишь начиная со второго порядка по ϕ_i (этим порядком мы здесь и ограничимся):

$$\frac{A}{2} \equiv < \xi^\omega \xi^\omega \xi^7 > = 1 + \frac{\omega}{3} \left(\frac{\omega}{3} - 1 \right) (\phi_1^* \phi_2^* + \phi_3^* \phi_4^*) + \frac{(\omega+7)(\omega+4)}{9} (\phi_1 \phi_2 + \phi_3 \phi_4) + \frac{\omega(\omega+7)}{9} \sum_{i=1}^4 |\phi_i|^2 = 1 + O(\phi^2); \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{i \beta B_1}{2} &\equiv < \xi^7 (\xi^\omega \partial_4 \xi^\omega) > = \frac{i \beta \omega (2\omega+7)}{9} (|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) = O(\phi^2); \\ \frac{i \gamma B_2}{2} &\equiv < \xi^7 (\xi^\omega \partial_s \xi^\omega) > = \frac{i \gamma \omega (2\omega+7)}{9} (|\phi_3|^2 - |\phi_4|^2) = O(\phi^2), \quad s = 5, 6, 7. \end{aligned} \quad (28)$$

Собирая полученные выражения вместе, найдем полную массовую часть 4D-лагранжиана кваркового поля:

$$< \tilde{L}'_{mass} > = - \frac{\sqrt{-G^{(8)}}}{2} \hbar c \sigma \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{(i)} \left[\gamma F (\text{Re } A + 3\Omega(\omega) B_2) I + \beta F_4 (k \text{Re } A + \Omega(\omega) B_1) i \gamma_5 \right] q_{(i)}. \quad (29)$$

Чтобы привести это выражение к стандартному виду, используем следующий метод. Разложим кварковое поле q на левое и правое поля ($q_L = 1/2(1 - \gamma_5)q$, $q_R = 1/2(1 + \gamma_5)q$) и переопределим их подходящим фазовым вращением. Легко показать, что унитарное преобразование

$$\begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi = \frac{1}{2} \text{Arg} [\gamma F (\text{Re } A + 3\Omega(\omega) B_2) + i \beta F_4 (k \text{Re } A + \Omega(\omega) B_1)], \quad (30)$$

приводит квадратичную форму (29) к виду

$$< \tilde{L}'_{mass} > = - \sqrt{-G^{(8)}} \hbar c \times m_q \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{(i)} q_{(i)}, \quad (31)$$

где токовая масса m_q кваркового поля $q = (q_{(1)}, q_{(2)}, q_{(3)})$ равна

$$m_q = \frac{\sigma}{F_4 \operatorname{Re} A} \sqrt{\gamma^2 F^2 (\operatorname{Re} A + 3\Omega(\omega) B_2)^2 + \beta^2 F_4^2 (k \operatorname{Re} A + \Omega(\omega) B_1)^2} \quad (32)$$

(после нормировки на коэффициент при кинетическом члене).

Проанализируем полученное выражение для массы, учитывая имеющиеся в теории варианты.

1. Допустим, $k \neq 0$, т.е. спинорное поле Ψ зависит от клейновской координаты x^4 в соответствии с (15). В этом случае мы имеем планковские массы фермионов. В самом деле, $B_1, B_2 \sim O(\phi^2) \ll 1$, $A = 1 + O(\phi^2) \cong 1$, $\beta, \gamma \sim 10^{33} \text{ см}^{-1} \approx 10^{19} \text{ GeV}$, и поэтому масса кварка $m_q \cong \sqrt{\gamma^2 F^2 + \beta^2} \sim M_{Pl}$ (независимо от значения коэффициента F). Заметим, что при этом собственная массовая часть (22) полностью доминирует над конформной, чей вклад оказывается пренебрежимо малым. Этот вариант следует считать физически неприемлемым.

2. Положим $k = 0$. Спинорное поле Ψ теперь не зависит от координаты x^4 , которая, таким образом, оказывается задействованной лишь в конформном факторе. В данном случае соотношение между собственной и конформной массовой частью зависит от значения величины $F(c_f)$. Имеем следующие варианты:

2а. $F \sim 1$. Собственная массовая часть вновь имеет планковский порядок: $m_q \cong \sqrt{\gamma^2 + \beta^2 B_1^2} \sim M_{Pl}$, и превалирует над конформной частью независимо от значения B_1 .

2б. $F \ll 1$, так что $\gamma F \sim 1$. Этого всегда можно достичь, если константы c_f очень близки друг к другу (см. (25)). Величины ϕ_i малы, так что $\beta B_1 \ll M_{Pl}$. В этом случае кварковая масса $m_q \cong \sqrt{\gamma^2 F^2 + \beta^2 B_1^2}$ имеет приемлемый порядок величины. Вклады собственной и конформной части примерно одинаковы.

2с. $F = 0$, если положить все коэффициенты c_f равными некоторой общей константе $\tilde{c}$.

Этот вариант выглядит естественно из соображений симметрии и минимизации числа свободных параметров. При этом собственная массовая часть исчезает, и вклад в массу оказывается чисто конформным: $m_q \cong \sigma \beta |\Omega(\omega) B_1| / 2 \ll M_{Pl}$. Малость коэффициента B_1 компенсирует большой порядок β , так что кварковая масса m_q приобретает разумный порядок величины. Заметим, что она отлична от нуля при $\omega \neq -7/2$, т.е. определяется отклонением конформного веса спинорного поля ω от его канонической размерности.

Данный вариант особенно интересен, так как демонстрирует возможный механизм генерации масс фермионов, полностью обусловленный скалярным полем конформного фактора, что может быть интерпретировано как геометрический аналог механизма Хиггса в Стандартной Модели. Имеется, однако, существенное отличие: в рассматриваемой схеме конформный фактор зависит лишь от дополнительных координат и не обязан проявлять себя на 4-мерном уровне в качестве гипотетической хиггсовской частицы.

Таким образом, в рамках 8D КК-теории гравитационных взаимодействий вскрывается возможность непротиворечивого описания масс спинорных частиц, при этом удается избежать появления планковских значений этих масс. Учитывая бозонный сектор теории, важно отметить, что ключевым пунктом в механизме генерации масс оказываются конформные преобразования метрики.

Авторы полагают, что полученные результаты представляют интерес в рамках многомерных теорий Калуцы — Клейна, идеи и методы которых широко используются в современной теоретической физике, в частности в контексте многочисленных струнных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kaluza T. *Zum Unitätsproblem in der Physik* / T.Kaluza// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. - 1921. - K.1. - S.966.
2. Vladimirov Yu.S. *8-Dimensional Geometric Model of Gravi-Strong Interaction* / Yu.S.Vladimirov, A.N.Gubanov// G & C. - 1998. - V.4. - P.193-198.
3. Vladimirov Yu.S. *Unification of gravi-electroweak and strong interactions in an 8-dimensional theory* / Yu.S.Vladimirov, A.N.Gubanov// G & C. - 1999. - V.5. - P.277-280.
4. Владимир Ю.С. *Геометрофизика* / Ю.С. Владимир. - М.: БИНОМ, 2005.
5. Klimenkov V.A. *Renormalization of Planck masses of vector bosons in the eight-dimensional geometric theory* / V.A.Klimenkov, Yu.S.Vladimirov// G & C. - 2004. - V.10. - P.77-82.
6. Владимир Ю.С. *Системы отсчета в теории гравитации* / Ю.С.Владимиров. - М.: Энергоиздат, 1982.
7. Биррелл Н. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени* / Н.Биррелл, П.Девис. - М.: Мир, 1984.
8. Владимир Ю.С. *Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий* / Ю.С.Владимиров. - М.: Изд-во МГУ, 1987.

ON THE MECHANISM OF GENERATING FERMION MASSES IN THE 8D THEORY OF GRAVI-STRONG INTERACTIONS

Yu.S.Vladimirov, S.V.Bolokhov

Fermion sector of the 8-dimensional geometric Kaluza–Klein theory of gravi-strong interactions is considered. Mechanism of generating fermion masses via conformal (Weyl) transformations is proposed. It can be regarded as geometric analogue of the Higgs mechanism in standard gauge models. In this approach it is possible to eliminate Planck masses of particles which often appear in many Kaluza–Klein models of this type.



УДК 530.12: 531.51

ВАКУУМОПОДОБНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ БЕЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ КАК ПРОЯВЛЕНИЕ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОЙ МОДЫ ПЯТИМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

В.Д. Гладуш*

В рамках 5-мерной ОТО строится лоренц-инвариантная космологическая модель. Доказывается 5-мерный аналог обобщенной теоремы Биркгоффа, соответствующий условию цилиндричности теории Калуцы–Клейна. Находится интеграл движения 5-мерных вакуумных уравнений Эйнштейна, аналогичный массовой функции ОТО. Условие отсутствия конической сингулярности приводит к замкнутости по пятой координате. Таким образом, модель Калуцы–Клейна реализуется динамически, как лоренц-инвариантная мода 5-мерной ОТО. После 5-мерной редукции модель сводится к конфигурации ОТО с конформным скалярным полем, который имеет нулевой конформно-инвариантный тензор энергии-импульса, на фоне плоского пространства-времени. Эту нулевую моду можно трактовать как вакуумную конфигурацию ОТО. В итоге вакуумоподобную конфигурацию ОТО можно рассматривать как проявление лоренц-инвариантного пустого пятимерного пространства.

1. Достижения наблюдательной астрономии и развитие современных космологических представлений ставят вопрос о единственности стандартной теории космического вакуума. Последний общепризнанно связывается с ненулевой космологической постоянной (см. обзоры [1,2] и ссылки в них). Вакуум определяется как лоренц-инвариантное состояние физической среды в пространстве-времени $V^{(4)}$ [3,4]. Эта концепция стала основой популярной модели инфляции в ранней Вселенной [5,6]. Вакуумная конфигурация представляет собой космологическую модель с метрикой, допускающей группу Лоренца в качестве группы движений. Причем гравитационное поле порождается лоренц-инвариантным "вакуумоподобным" тензором энергии-импульса

$$T_V^\mu = \frac{\Lambda}{8\kappa\pi} \delta_V^\mu, \quad (1)$$

где κ — ньютоновская гравитационная постоянная, Λ — космологическая постоянная. Плотность вакуума определяется этой постоянной: $\rho = \Lambda/8\kappa\pi$ ($c=1$).

Группа Лоренца $L = O(1,3)$ действует по правилу $\tilde{x}^\mu = L_V^\mu x^\nu$, причем $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta}$, $L_\mu^\alpha L_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha$, $L_\mu^\alpha \tilde{L}_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu$, где $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}, \eta_{\mu\nu}$ — метрики Минковского. Условие инвариантности $V^{(4)}$ относительно группы Лоренца приводит к конформно-плоскому пространству с метрикой

$$^{(4)}ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \psi^2(\zeta) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2)$$

* © В.Д. Гладуш, Днепронетровский национальный университет (Украина), 2005; E-mail: vgladush@ff.dsu.dp.ua