СТО 1905 2005

УДК 530.12: 531.51

О ГЕНЕРИРОВАНИИ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТИПА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А.М.Баранов, Н.Н.Паклин[1]

Рассмотрен случай статического сферически симметричного распределения идеальной жидкости. Представлены преобразования метрических коэффициентов в координатах кривизн, приводящие уравнения Эйнштейна к линейному виду. Предложена процедура получения семейств точных решений. Показана возможность нахождения точных решений из известных решений. Линейность уравнения допускает обобщение частных решений на решения с новыми физическими свойствами.

Опыт исследования нелинейных, в общем случае, уравнений Эйнштейна показывает, что наибольший интерес представляют методы получения точных решений из уже известных решений. Тем более интересны случаи, когда уравнения Эйнштейна удается преобразовать к линейному виду, т.к. знание частных решений оказывается полезным при получении общего решения линейного уравнения.

Статическое сферически симметричное распределение вещества формирует гравитационное поле с такой же симметрией. Это гравитационное поле принято описывать в терминах метрических коэффициентов первой квадратичной формы (метрики), которую мы выберем в следующем виде (в координатах кривизн):

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (1)$$

где $g_{00} = a(r)$, $g_{11} = -b(r)$; t, r, θ, φ – время, радиальная и угловые переменные; c – скорость света.

Вещество будем описывать тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\mu + p)u_i u_k - p g_{ik}, \qquad (2)$$

где $\mu(r)$ – плотность энергии; $p(r)$ – давление; u_i – 4-скорость; g_{ik} – метрический тензор, соответствующий (1). Индексы i,k пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Уравнения Эйнштейна

[1] © А.М.Баранов, Н.Н.Паклин, Красноярский государственный университет, 2005; E-mail: bam@lan.krasu.ru , paklin@lan.krasu.ru

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}-\Lambda g_{ik}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \tag{3}$$

где R_{ik} – тензор Риччи; R – след тензора Риччи (скалярная кривизна); Λ – космологическая постоянная; G – постоянная тяготения Ньютона (далее положим $c=1$, $G=1$), в случае статики, сферической симметрии и идеальной жидкости, представляют собой недоопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, вообще говоря, нелинейных.

Плотность энергии и давление явно выражаются через метрические коэффициенты и их производные по переменной r, которые будем обозначать штрихом:

$$8\pi\mu=\frac{b'}{rb^2}-\frac{1}{r^2b}+\frac{1}{r^2}+\Lambda, \tag{4}$$

$$8\pi p=\frac{a'}{rba}+\frac{1}{r^2b}-\frac{1}{r^2}-\Lambda. \tag{5}$$

Для двух функций $a(r)$ и $b(r)$ получается одно уравнение нелинейное по каждой из них:

$$\frac{a''}{a}-\frac{1}{2}\frac{a'^2}{a^2}-\frac{1}{r}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)-\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\frac{b'}{b}+\frac{2}{r^2}(b-1)=0. \tag{6}$$

Преобразование уравнений к линейному виду

Исследование показывает, что уравнение (6) можно преобразовать к линейному виду по каждой из функций с помощью подстановок:

$$a=zy^2,\ b=1/z. \tag{7}$$

В работах [1, 2] был использован этот вариант, но в неортогональных координатах

$$ds^2=g_{00}du^2+2g_{01}dudr-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{8}$$

где в качестве временной координаты применяется запаздывающее время $u=t-r$, а подстановки для метрических коэффициентов имеют вид $g_{00}=zy^2$, $g_{01}=y$. В статическом случае координаты (8) эквивалентны координатам кривизн. В результате преобразования получается система уравнений для плотности энергии и давления

$$8\pi\mu=\frac{1-z}{r^2}-\frac{z'}{r}+\Lambda, \tag{9}$$

$$8\pi p=\frac{z-1}{r^2}+\frac{2z}{r}\frac{y'}{y}-\Lambda, \tag{10}$$

а также уравнение относительно функции $y(r)$

$$y''+\left(\frac{3}{2}\frac{z'}{z}-\frac{1}{r}\right)y'+\frac{1}{z}\left(\frac{z''}{2}+\frac{1-z}{r^2}\right)y=0, \tag{11}$$

либо то же уравнение, но относительно функции $z(r)$

$$z''+3\frac{y'}{y}z'+2\left(\frac{y''}{y}-\frac{1}{r}\frac{y'}{y}-\frac{1}{r^2}\right)z=-\frac{2}{r^2}. \tag{12}$$

В данном случае общее решение для функции $y(r)$ выражается через частное $y_0(r)$ как

$$y=y_0\left[A+B\int\frac{r\,dr}{z^{3/2}y_0^2}\right], \tag{13}$$

а общее решение неоднородного уравнения для функции $z(r)$ выражается через общее решение однородной части того же уравнения $z_0(r)$ как

$$z = z_0[C_2 + C_1 z_1 + z_2], \tag{14}$$

где

$$z_1 = \int \frac{dr}{y^3 z_0^2}, \qquad z_2 = -2\int \frac{1}{y^3 z_0^2}\left(\int \frac{y^3 z_0}{r^2} dr\right) dr .$$

Опираясь на изложенные результаты, можно предложить процедуру получения семейств точных решений.

Метод сдвигов

Данный метод пригоден и для нелинейных уравнений, но искать частные решения этих уравнений труднее, а линейная суперпозиция частных решений не допускается. Поэтому именно линейный вид уравнений позволяет работать методу сдвигов в полную силу.

Точное статическое сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости определяется парой функций (y,z). Пусть нам известно частное решение (y,z), например плоское пространство-время; оно описывается парой $(y=1, z=1)$. Зафиксируем функцию z и найдем более общее решение для функции $\bar{y}$, в итоге получим другое точное решение $(\bar{y},z)$. Произошел сдвиг в пространстве решений, для краткости назовем его y - сдвигом. Если нам удалось получить общее решение для функции y, то дальнейшая процедура замкнется и y - сдвиг превратится в тождественное преобразование. Если зафиксировать функцию y и найти более общее решение для функции $\bar{z}$, то получим еще одно точное решение $(y,\bar{z})$. Такое преобразование назовем z - сдвигом.

Точные решения $(\bar{y},z)$ и $(y,\bar{z})$ можно использовать для получения новых точных решений. Применим y - сдвиг к паре $(y,\bar{z})$, в результате получим пару $(\tilde{y},\bar{z})$. Применим z - сдвиг к паре $(\bar{y},z)$, в результате получим пару $(\bar{y},\tilde{z})$. Вообще говоря $(\tilde{y},\bar{z}) \neq (\bar{y},\tilde{z})$, т.е. *сдвиги не коммутируют*.

Применяя сдвиги поочередно к различным частным решениям, можно получать семейства заведомо точных решений. Следует отметить, что физический смысл таких решений нужно исследовать дополнительно. Некоторые решения обладают сингулярностями, а некоторые вообще лишены физического смысла. Однако решение, полученное из нефизического решения, может обладать физическим смыслом. Следовательно, каждое точное решение представляет интерес хотя бы как затравочное. Результаты сдвигов удобно представлять графически в виде диаграмм.

Семейства точных решений

После подстановок (7) метрика принимает вид

$$ds^2 = zy^2 dt^2 - \frac{dr^2}{z} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{15}$$

<u>**Плоское решение**</u>: $(y=1, z=1)$. Применим к этой паре функций z - сдвиг, т.е. подставим $y=1$ в уравнение (12): $z'' - 2z/r = -2/r$. Решение однородной части есть $z_0 = c_1 r^2 + c_2/r$. Подставим z_0 в формулу (14), получаем общее решение $\bar{z} = 1 + c_1 r^2 + c_2/r$. Полученное решение $(y=1,\bar{z})$ известно как метрика Котлера. Если $c_1 = 0$ (частный случай z - сдвига), то имеем внешнее решение Шварцшильда, z - сдвиг от которого дает решение Котлера. Если $c_2 = 0$ (другой частный случай z - сдвига), то получается решение де Ситтера, z - сдвиг от которого дает решение Котлера. Применение z - сдвига к решению Котлера дает тождественное преобразование, т.е. решение Котлера не меняется.

Применим y - сдвиг к плоскому решению, т.е. подставим $z=1$ в уравнение (11): $y'' - y'/r = 0$. Общее решение данного уравнения есть $\bar{y} = A + Br^2$. Если в формулу (13) подставить $y_0 = A + Br^2$, то получим это же решение, т.е. y - сдвиг есть тождественное преобразование. Данное решение

$$(\bar{y} = A + Br^2,\ z = 1) \tag{16}$$

допускает физическую интерпретацию, только если $\Lambda \neq 0$. Из формулы (9) видно, что $8\pi\mu = \Lambda$, но из формулы (10) следует, что $8\pi p = 4B/(A+Br^2) - \Lambda$.

Решение Котлера: $(y=1, z=1+c_1r^2+c_2/r)$ замкнуто относительно z - сдвига, попробуем применить y - сдвиг. В результате приходим к выражению

$$\bar{y}=A+B\int\frac{r^{5/2}dr}{\left(c_2+r+c_1r^3\right)^{3/2}}.$$

Подобные квадратуры выражаются через эллиптические интегралы в форме Лежандра. Во избежание громоздких выражений ограничимся частными случаями: $c_1=0$ или $c_2=0$.

Решение де Ситтера: $(y=1, z=1+c_1r^2)$. Применим к этому решению y - сдвиг. В результате получится выражение $(\bar{y}=A+B/\sqrt{1+c_1r^2}, z=1+c_1r^2)$, известное как внутреннее решение Шварцшильда. Если $A=0$, то получим частный случай y - сдвига, такое решение известно как статическая Вселенная Эйнштейна. Применение y - сдвига к нему дает внутреннее решение Шварцшильда. И, наконец, само внутреннее решение Шварцшильда оказывается замкнутым относительно y - сдвига.

Внешнее решение Шварцшильда: $(y=1, z=1-2m/r)$, здесь $c_2=-2m$. Применим к этому решению y - сдвиг. В результате получится выражение

$$\bar{y}=A+B\left[\frac{r^3+5mr^2-30mr}{\sqrt{r(r-2m)}}+15m^2\ln\left(r-m+\sqrt{r(r-2m)}\right)\right]. \tag{17}$$

Это решение допускает физическую интерпретацию, только если $\Lambda\neq 0$.

Интересный результат содержится в работе [3]. Если применить z - сдвиг к решению (16), то пара функций $(\bar{y}=A+Br^2,\ z=1)$ преобразуется в новое решение, выраженное через гипергеометрические функции

$$\tilde{z}=1-C_1r^2\sum_{i=1}^{2}F(a_i,3/a_i,5/2,-Br^2)-\frac{C_2}{r}\sum_{k=1}^{6}F(\bar{a}_k,\bar{b}_k,\bar{c}_k,-Br^2), \tag{18}$$

где $a_{1,2}=(9\pm\sqrt{33})/4$, $\bar{a}_{1,2}=a_{1,2}-3/2$, $\bar{a}_{3,4}=1\pm\sqrt{5/2}$, $\bar{a}_{5,6}=a_{3,4}+3/2$, $\bar{b}_{1,2}=3/a_{1,2}-3/2$, $\bar{a}_{3,4}\bar{b}_{3,4}=-3/2$, $\bar{b}_{5,6}=\bar{b}_{3,4}+3/2$, $\bar{c}_{1,2,3,4}=-1/2$, $\bar{c}_{5,6}=-5/2$. Если нас интересует только регулярное решение, то следует потребовать $C_2=0$.

Изменение алгебраического типа

Статические сферически симметричные решения уравнений тяготения могут относиться лишь к двум типам по алгебраической классификации Петрова [4]: ***O*** или ***D*** [5]. Однако принадлежность того или иного решения уравнений Эйнштейна к определенному типу пространства связана с законом распределения плотности вещества.

Тензор Вейля

$$W_{ijkl}=R_{jikl}+R_{k[ij]l}-R_{l[ij]k}-(R/3)g_{k[i}g_{j]l} \tag{19}$$

можно отобразить на 3-мерное комплексное евклидово пространство. В итоге получим бесследовую 3×3 матрицу Вейля

$$W=diag(W_{11},W_{22},W_{33}), \tag{20}$$

где

$$-\frac{i}{2}W_{11}=W_{22}=\overline{W}_{33}, \tag{21}$$

черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Таким образом, пространство относится к типу ***D***, если $W_{11}\neq 0$, и к типу ***O***, если $W_{11}=0$.

Алгебраическая классификация гравитационных полей связана с решением кубического характеристического уравнения

$$\lambda^3+P\lambda+Q=0, \tag{22}$$

где коэффициенты P и Q находятся по заданной матрице Вейля и равны $P=(-3/4)W_{11}^2$, $Q=(1/4)W_{11}^3$.

Уравнение (22) можно рассматривать как условие экстремума для «потенциальной» функции

$$V(\lambda,P,Q)=(1/4)\lambda^4+(P/2)\lambda^2+Q\lambda. \quad (23)$$

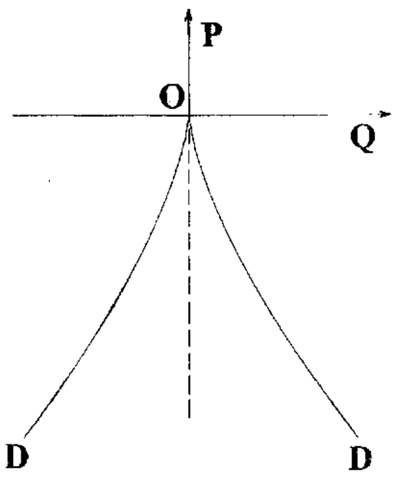

Рис.1. Проекция катастрофы сборки Уитни на плоскость управляющих параметров P и Q

Согласно классификации Тома [6] функция $V(\lambda,P,Q)$ описывает катастрофу сборки Уитни. В плоскости управляющих параметров P, Q точка сборки ($P=Q=0$) по аналогии с теорией Ландау фазовых переходов 2-го рода соответствует фазовому переходу в алгебраический тип $\boldsymbol{O}$ (наиболее симметричную фазу). Отметим, что параметр P аналогичен температуре; $\partial V/\partial P$ – энтропии; $\partial^2 V/\partial P^2$ – теплоемкости. Однако у матриц имеется «собственная» характеристика (ранг матрицы), которая ведет себя как теплоемкость твердого тела при фазовых переходах 2-го рода. При этом «фазами вещества» выступают типы гравитационных полей.

В нашем случае уравнение $\lambda^3+P\lambda+Q=0$ имеет три вещественных корня: $\lambda_2=\lambda_3=W_{11}/2$, $\lambda_1=-W_{11}$. Обращение в ноль дискриминанта $(P/3)^3+(Q/2)^2$ задает полукубическую параболу $P=-3(Q/2)^{2/3}$ (рис.1), отвечающую пространству типа D.

Подставляя корни кубического уравнения в функцию $V(\lambda,P,Q)$, получим экстремальные значения этой функции, выраженные через управляющий параметр P:

$$V(\lambda_1,P)=-2P^2/3, \quad V(\lambda_2,P)=V(\lambda_3,P)=P^2/12. \quad (24)$$

В точке $P=Q=0$ наблюдаются скачки вторых производных по параметру P от функции $V(\lambda,P,Q)$: $\Delta(\partial^2 V/\partial P^2)=1/6$ и $\Delta(\partial^2 V/\partial P^2)=-4/3$, что отвечает скачку ранга матрицы Вейля в точке сборки с трех до нуля.

Следовательно, непрерывное стремление параметров P и Q к нулю приводит к катастрофе: тип пространства меняется скачком ($\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{O}$).

После общего рассмотрения возможности скачкообразного изменения типа пространства-времени перейдем к детальному исследованию. С учетом уравнений Эйнштейна элемент W_{11} матрицы Вейля может быть записан как

$$W_{11}=\frac{1}{3r}\left(z'+\frac{2(1-z)}{r}\right). \quad (25)$$

Из уравнения (9) можно выразить функцию z как

$$z=1-\frac{1}{r}\int(8\pi\mu-\Lambda)r^2dr+\frac{C}{r}, \quad (26)$$

где C – постоянная величина, что позволяет представить z в виде $z=1+\Phi(r)$. Тогда (9) можно переписать как

$$8\pi\mu=-\frac{(r\,\Phi)'}{r^2}+\Lambda\,. \quad (27)$$

В любом случае функция z (или Φ) связана непосредственно с выбором μ – функции распределения плотности вещества. Поэтому тип пространства ($\boldsymbol{O}$ или $\boldsymbol{D}$) зависит от функции z и оказывается никак не связанным с изменением функции y.

Для того чтобы установить, при каких функциях z пространство-время будет иметь тип O, необходимо в (25) приравнять W_{11} нулю. Интегрируя получившееся уравнение, находим $z=1+C_0r^2$, где C_0 – постоянная интегрирования. Это соответствует однородному распределению вещества и, в частности, описывается внутренним решением Шварцшильда.

Другими словами, y – сдвиг оказывается автоморфизмом, т.е. не выводит за рамки исходного типа пространства. Применение z – сдвига может изменить исходный алгебраический тип пространства, а значит, привести к другому закону поведения плотности энергии μ .

Результаты

Изложенные результаты наглядно представлены в виде диаграммы на рис.2.
Рис.2. Наглядная схема цепочек сдвигов, показывающих переходы от одних точных решений к другим.

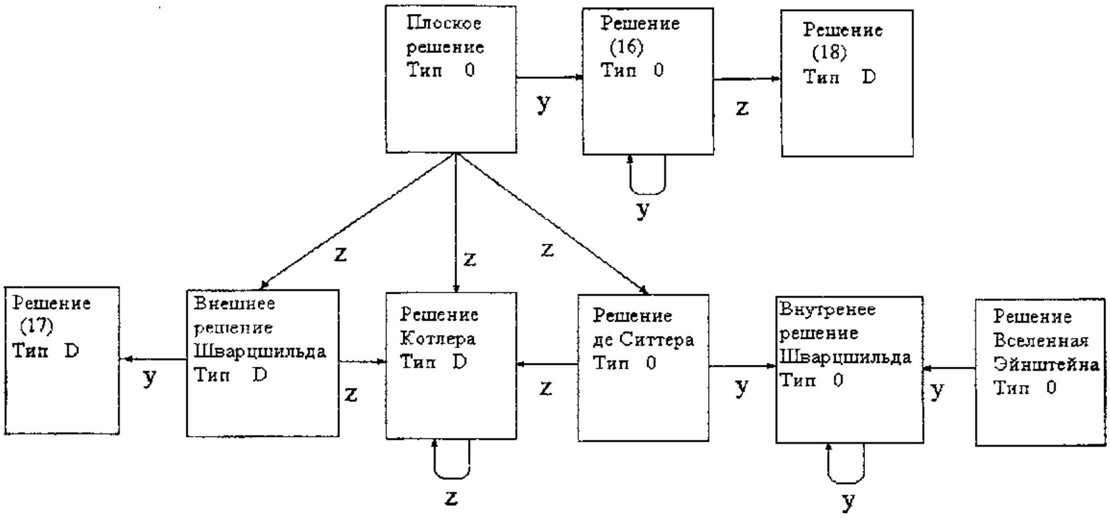

Рис.2. Наглядная схема цепочек сдвигов, показывающих переходы от одних точных решений к другим

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А.М. Генерирование статических сферически симметричных решений уравнений тяготения / А.М.Баранов, Н.Н.Паклин // 1. Изменение алгебраического типа пространства Деп. ВИНИТИ 20.09.88 № 7037-В88; 2. Получение решений Деп. ВИНИТИ 20.09.88 №7038-В88; 3. Суперпозиция и конструирование метрик Деп. ВИНИТИ 14.11.88 № 8040-В88.
2. Баранов А.М. Генерирование и конструирование статических сферически-симметричных решений уравнений тяготения / А.М.Баранов, Н.Н.Паклин // Известия вузов. Физика. – 1990. – №6. – С. 5-9.
3. Паклин Н.Н. Аналитические модели нейтронных звезд / Н.Н.Паклин // Тезисы конф. «Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации». - Новгород, 1996. – С.121.
4. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966.
5. Баранов А.М. Алгебраический тип сферически симметричного поля / А.М.Баранов, А.А.Чешель // Материалы V Сов. грав. конф. – М., 1981. - С.107.
6. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т.Постон, И.Стюарт. - М.: Мир, 1980.

ON GENERATION OF SPHERICALLY SYMMETRIC STATIC SOLUTIONS OF GRAVITATIONAL EQUATIONS AND A CHANGE OF GRAVITATIONAL FIELD'S ALGEBRAIC TYPE

A.M. Baranov, N.N. Paklin

The perfect fluid's spherically symmetric static distribution inside of a gravitating ball is considered. The metric coefficients' transformation to spherical coordinates leads to a linear form of Einstein's equations. The procedure of deriving families of exact solutions from the well-known solutions of gravitational equations is suggested. A linearity of the field's equations supposes generalization of particular solutions on solutions of with new physical properties.