УДК: 530.12

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И АНИЗОТРОПНАЯ ПЛОСКАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А.В.Захаров, Р.К.Мухарлямов*

Данная работа посвящена макроскопическим уравнениям Эйнштейна. На их основе строятся несингулярные анизотропные космологические модели.

Как известно, макроскопические уравнения Максвелла для сред могут быть получены из микроскопических уравнений Максвелла с помощью усреднения последних по ансамблям. Впервые эта задача была поставлена и решена Лоренцем [1-3].

Хотя изначально идея макроскопического описания была сформулирована в электродинамике, она необходима в общей теории относительности (ОТО), в частности в космологии. Впервые задача о построении макроскопических уравнений Эйнштейна была поставлена М.Ф.Широковым в [4].

---

* © А. В. Захаров, Казанский госуниверситет (Россия); Р. К. Мухарлямов, Казанский госуниверситет (Россия), 2005;
e-mail: Ruslan.Muharlyamov@ksu.ru

Во всех релятивистских космологических теориях распределение вещества во Вселенной принято брать в виде однородной сплошной среды. Более правдоподобно допущение о распределении вещества в виде отдельных точечных или весьма малых источников гравитационного поля, лишь в среднем реализующее равномерное заполнение пространства.

Такая модель имеет определенный интерес, особенно в связи с вопросом сингулярности в космологических моделях. Для космологических приложений большую роль играет также вопрос о сглаживании по местным неоднородностям средней метрики пространства - времени. Но определение метрики должно быть произведено с явным учетом дискретного распределения масс.

Обычный подход к задаче во всех существующих релятивистских космологических теориях представлен крайне непоследовательно. Используя в правой части уравнений Эйнштейна усредненный тензор энергии - импульса, соответствующий непрерывному распределению вещества, обычно оставляют неусредненной левую часть этих уравнений. Правильные уравнения гравитационного поля или должны вовсе не содержать усреднений, или же должны быть целиком усреднены.

Проблема макроскопического описания в ОТО намного сложнее, чем в электродинамике, где максвелловские микроскопические уравнения легко усредняются благодаря их линейности. Трудности в ОТО носят геометрический характер. Они заключаются в неплоской геометрии, лежащей в основе ОТО, что отражается в нелинейности уравнений Эйнштейна. Ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна макроскопический тензор энергии - импульса не определяет макроскопическую метрику пространства-времени, иными словами макроскопический тензор Эйнштейна не равен тензору Эйнштейна, построенного на основе макроскопической метрики $\langle g_{ij} \rangle$:

$$\langle G_{ij}(g) \rangle \neq G_{ij}(\langle g \rangle), \tag{1}$$

где скобки $\langle ... \rangle$ означают усреднение по ансамблю. Макроскопический тензор Эйнштейна можно представить следующим образом:

$$\langle G_{ij}(g) \rangle = G_{ij}(\langle g \rangle) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n , \tag{2}$$

где f_n - корреляционные функции n-го порядка локальных флуктуаций. Физически, этот бесконечный ряд можно рассматривать как некоторый эффективный тензор энергии - импульса.

В работах [5–8] были получены макроскопические уравнения Эйнштейна для системы самогравитирующих частиц. За основу были взяты уравнения Лиувилля для случайных функций каждого из сортов частиц и микроскопические уравнения Эйнштейна. Под последними понимаются классические уравнения Эйнштейна, в правой части которых присутствует сумма микроскопических тензоров энергии-импульса всех частиц среды, которые выражаются через интегралы по импульсам от случайных функций каждого сорта частиц.

В дальнейшем эти микроскопические уравнения и уравнения Лиувилля усредняются по ансамблю. В результате получаем бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений для одночастичных, двухчастичных и многочастичных функций распределения, а также усредненные уравнения Эйнштейна. В последние ввиду нелинейности входят многочастичные функции распределения.

Полученную цепочку уравнений удалось расцепить, если учитывать только члены второго порядка по взаимодействию. В этом случае достаточно учитывать только двухчастичные корреляции частиц, а корреляциями большего порядка пренебречь. Тогда возникает замкнутая система уравнений на одночастичные функции распределения и корреляционные функции второго порядка. Из этой системы получаются кинетические уравнения для одночастичных функций распределения с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию.

В макроскопических уравнениях Эйнштейна ввиду их нелинейности присутствуют многочастичные корреляционные функции (2). Пренебрегая трехчастичными корреляциями и решая уравнение на двухчастичную корреляционную функцию, мы выводим макроскопические уравнения Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по гравитационному взаимодействию:

$$G_{ij} + \nabla_k \varphi_{ij}^k + \mu_{ij} = \chi T_{ij} . \tag{3}$$

Здесь G_{ij} - тензор Эйнштейна риманова пространства с макроскопической метрикой g_{ij}, $\chi = {}^{8\pi G}\!/_{c^4}$ - постоянная Эйнштейна, G - гравитационная постоянная, c - скорость света, T_{ij} - макроскопический тензор энергии – импульса.

Полученные уравнения (3) отличаются от классических уравнений Эйнштейна дополнительными слагаемыми $\nabla_k \varphi_{ij}^k$, μ_{ij}, обусловленными взаимодействием частиц.

Добавочные члены в уравнение (3) представляют собой интегралы в импульсном пространстве от выражений, содержащих одночастичные функции распределения взаимодействующих частиц. Члены $\nabla_k \varphi_{ij}^k$, μ_{ij} - симметричные двухвалентные бесследовые тензоры с равной нулю дивергенцией.

В работах [7, 9, 10] получена, с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию, система макроскопических уравнений Эйнштейна – Максвелла для релятивистской плазмы:

$$G_{ij} + \nabla_k \varphi_{ij}^k + \mu_{ij}^* - \chi \tau_{ij}^{(gr)} = \chi(\mathrm{T}_{ij}^{(m)} + \mathrm{T}_{ij}^{(el)} + \tau_{ij}^{(gr)}) . \tag{4}$$

$$\nabla_k F^{ik} + \nabla_k \varphi^{ik} + \mu^i = -{}^{4\pi}\!/_{c}\, J^i . \tag{5}$$

Здесь F^{ik} - тензор Максвелла, J_i - макроскопический 4-вектор плотности электрического тока, $\mathrm{T}_{ij}^{(m)}$ - макроскопический тензор энергии-импульса среды, $\mathrm{T}_{ij}^{(el)}$ - электромагнитное поле (э/м), $\tau_{ij}^{(gr)}$ - электромагнитное излучение в плазме.

Макроскопические уравнения Эйнштейна для релятивистской плазмы отличаются от классических уравнений Эйнштейна присутствием в левой части дополнительных слагаемых $\nabla_k \varphi_{ij}^k$, μ_{ij}^* и $-\chi \tau_{ij}^{(gr)}$, обусловленных одновременно как электромагнитным, так и гравитационным взаимодействиями.

Макроскопические уравнения Максвелла в общей теории относительности (ОТО) отличаются от классических дополнительными слагаемыми $\nabla_k \varphi^{ik} + \mu^i$. Эти слагаемые обусловлены эффектами как взаимодействия, так и ОТО.

Добавочные члены в уравнениях (3), (4) и (5) представляют собой интегралы в импульсном пространстве от выражений, содержащих одночастичные функции распределения взаимодействующих частиц. Члены $\nabla_k \varphi_{ij}^k$, μ_{ij}, μ_{ij}^* и $-\chi \tau_{ij}^{(gr)}$ - симметричные двухвалентные бесследовые тензоры с равной нулю дивергенцией.

Полученные макроскопические уравнения рассматриваются здесь для среды, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия, когда взята семимерная функция распределения Черникова [11, 12]:

$$F = A \exp(-\frac{c v_i p^i}{kT}) . \tag{6}$$

Здесь v_i - макроскопическая 4-скорость среды, p^i - импульс частицы, k - постоянная Больцмана, T - температура. В этом случае тензор $\nabla_k \varphi_{ij}^k$ тождественно равен нулю, а тензоры μ_{ij}, μ_{ij}^* и $\chi \tau_{ij}^{(gr)}$ имеют одинаковую структуру

$$\chi \tilde{\varepsilon} \left(\frac{4}{3} v_i v_j - \frac{1}{3} g_{ij} \right) \tag{7}$$

и отличаются только значением $\tilde{\varepsilon}$. Для данной функции распределения (6) тензор энергии – импульса имеет структуру тензора энергии – импульса идеальной жидкости. Если перенести дополнительные слагаемые из левой части макроскопических уравнений Эйнштейна в правую, то они превращаются в обычные уравнения Эйнштейна с дополнительным тензором энергии-импульса идеальной жидкости с уравнением состояния $\tilde{p} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$, но с отрицательной "плотностью энергии". Можно считать, что это плотность энергии взаимодействия. Для системы гравитационно взаимодействующих частиц эта энергия равна

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\mu_{ij} v^i v^j}{\chi} , \tag{8}$$

а для релятивистской плазмы:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{v^i v^j (\mu_{ij}^* - \chi \tau_{ij}^{(gr)})}{\chi} . \tag{9}$$

1. Несингулярные изотропные однородные модели

Приступим к построению изотропных однородных космологических моделей для макроскопических уравнений Эйнштейна (3). Метрика этих моделей такова:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dr^2 - \phi^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)). \tag{10}$$

Здесь $\phi(r) = r, \phi(r) = \sin(r), \phi(r) = sh(r)$ для плоской, закрытой и открытой моделей соответственно. Уравнения Эйнштейна для этой метрики принимают вид [13]

$$a'^2 + \xi a^2 = \chi a^4 \varepsilon, \tag{11}$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = -3\frac{da}{a}. \tag{12}$$

Здесь штрих над a обозначает производную по временной переменной η, ε и p - плотность энергии и давление вещества, $\xi = 0, +1, -1$ соответственно для плоской, закрытой и открытой моделей.

Макроскопические уравнения Эйнштейна отличаются от (11) и (12) следующим. Во-первых, ε в правой части (11) заменяется на разность $\varepsilon - \tilde{\varepsilon}$. Во вторых, уравнение (12) заменяется на два аналогичных:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = -3\frac{da}{a}, \tag{13}$$

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + \tilde{p}} = -3\frac{da}{a}. \tag{14}$$

Здесь p - обычное давление вещества, $\tilde{p} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$ - «давление», обусловленное взаимодействием частиц. Уравнения (13) и (14) следуют из равенств нулю дивергенции для обычного тензора энергии-импульса и дивергенции для дополнительного тензора энергии-импульса, обусловленного взаимодействием частиц.

Уравнение состояния обычного вещества для современной Вселенной $p = 0$. Из-за этого уравнение (13) приводит к следующей зависимости от масштабного фактора:

$$\varepsilon = \frac{6a_0}{\chi a^3}. \tag{15}$$

Здесь $a_0 = const$.

Для плотности энергии $\tilde{\varepsilon}$ из (14) имеем:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{3a_1}{\chi a^4}. \tag{16}$$

Здесь $a_1 = const$.

Возможно, в настоящий момент времени плотность энергии $\tilde{\varepsilon}$ и плотность реликтового излучения ε_γ имеют одинаковый порядок. Поэтому, следует учесть также наличие излучения, уравнение состояния которого $p_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{3}$, где

$$\varepsilon_\gamma = \frac{3a_2}{\chi a^4}. \tag{17}$$

Здесь $a_2 = const$.

Уравнение (11) с учетом (15) – (17) приобретает вид

$$a'^2 + \xi a^2 = 2a_0 a - (a_1^2 - a_2^2). \tag{18}$$

Вид решения (18) зависит от знака разности $a_1^2 - a_2^2$. Если в настоящий момент времени плотность энергии реликтового излучения больше плотности энергии взаимодействия $\varepsilon_{\gamma 0} > \tilde{\varepsilon}_0$, то разность отрицательна и решение таково [14]:

$$a = \eta\sqrt{a_2^2 - a_1^2} + \frac{1}{2}a_0\eta^2 \qquad (19)$$

для плоской модели,

$$a = a_0 - \sqrt{a_0^2 + a_2^2 - a_1^2}\cos(\eta + \delta), \delta = arctg\left(\frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0}\right) \qquad (20)$$

для закрытой модели и

$$a = \sqrt{a_0^2 - a_2^2 + a_1^2}\,ch(\eta + \delta) - a_0, \delta = Arth\left(\frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0}\right) \qquad (21)$$

для открытой модели.

Если $\varepsilon_{\gamma 0} < \tilde{\varepsilon}_0$, то разность $a_1^2 - a_2^2 > 0$ и решение (18) имеет вид [15]

$$a = a_m + \frac{1}{2}a_0\eta^2,\ a_m = \frac{a_1^2 - a_2^2}{2a_0} \qquad (22)$$

для плоской модели,

$$a = a_m + (a_0 - a_m)(1 - \cos\eta), a_m = a_0 - \sqrt{a_0^2 - a_1^2 + a_2^2} \qquad (23)$$

для закрытой модели и

$$a = a_m + (a_0 + a_m)(ch\eta - 1), a_m = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2} - a_0 \qquad (24)$$

для открытой модели.

В работе [15] показано, что $\varepsilon_{\gamma 0} < \tilde{\varepsilon}_0$, следовательно, реализуются модели (22) – (24). Эти три модели являются несингулярными. При $\eta = 0$, масштабный фактор не обращается в нуль, как в стандартных космологических моделях, а принимает минимальное значение a_m. В остальном поведение данных моделей качественно такое же, как и поведение стандартных моделей Фридмана.

2. Слабоанизотропная плоская космологическая модель с осевой симметрией

Рассмотрим метрику вида

$$ds^2 = c^2dt^2 - b^2(t)[dx^2 + dy^2] - d^2(t)dz^2 . \qquad (25)$$

Перейдем от космологического времени t к новой переменной η:

$$\eta = c\int\frac{dt}{a(t)}, \qquad (26)$$

где $a(\eta)$ есть решение (22). Тогда следствия макроскопических уравнений Эйнштейна и плотности энергий $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ запишутся таким образом:

$$\frac{2b'd'}{bd} + \frac{b'^2}{b^2} = \chi a^2(\varepsilon - \varepsilon'), \qquad (27)$$

$$\frac{2b''}{b} - \frac{2b'a'}{ba} + \frac{b'^2}{b^2} = \frac{\chi\varepsilon' a^2}{3}, \qquad (28)$$

$$\varepsilon = \frac{6a_0}{\chi b^2 d},\ \ \tilde{\varepsilon} = \frac{3a_0}{\chi(b^2d)^{4/3}}. \qquad (29)$$

Рассмотрим случай малой анизотропии, когда b и d мало отличаются от решения (22):

$$b = a(1+m),\ \ d = a(1+q),\ q << 1,\ m << 1,\ q' << 1,\ m' << 1. \qquad (30)$$

Линеаризируем систему (27) - (29) в окрестности решения (22):

$$(2m+q)'=(2m+q)\left(\frac{4a_1^2}{a^2}-\frac{6a_0}{a}\right), \tag{31}$$

$$m''+\frac{2a'}{a}\cdot m'+\frac{2}{3}\cdot\frac{(2m+q)}{a^2}=0, \tag{32}$$

$$\varepsilon=\frac{6a_0}{\chi a^3}\left(1-(2m+q)\right),\ \ \tilde{\varepsilon}=\frac{3a_0}{\chi a^4}\left(1-\frac{4}{3}(2m+q)\right). \tag{33}$$

Для простоты в решении (22) сделали переход $a_1^2-a_2^2\to a_1^2$.

Решение этой системы таково

$$m=\frac{1}{2}\left(\frac{C_0}{a_1^4}+\frac{C_1}{a_1^2}\right)\left(\frac{\eta}{a_1^2+a_0^2\eta^2}+arctg\left(\frac{a_0\eta}{a_1}\right)\right)+\frac{C_0\eta}{3a_1^2(a_1^2+a_0^2\eta^2)^2}+C_2, \tag{34}$$

$$q=-\left(\frac{C_0}{a_1^4}+\frac{C_1}{a_1^2}\right)\left(\frac{\eta}{a_1^2+a_0^2\eta^2}+arctg\left(\frac{a_0\eta}{a_1}\right)\right)+\frac{C_0\eta}{(a_1^2+a_0^2\eta^2)^2}\left(1-\frac{2}{3a_1^2}\right)-2C_2. \tag{35}$$

Функции $m(\eta)$ и $q(\eta)$ должны удовлетворять условиям (30). Они выполняются, если наложить условие на константы интегрирования и переменную η:

$$C_1=-\frac{C_0}{a_1^2},\ C_2=0,\ \eta\to\infty. \tag{36}$$

Окончательно получаем:

$$m=\frac{C_0}{3a_1^2}\cdot\frac{\eta}{(a_1^2+a_0^2\eta^2)^2}, \tag{37}$$

$$q=\left(C_0-\frac{2C_0}{3a_1^2}\right)\frac{\eta}{(a_1^2+a_0^2\eta^2)^2}. \tag{38}$$

Таким образом, мы имеем слабоанизотропную космологическую модель с осевой симметрией, которая в ходе расширения Вселенной изотропизируется и описывается решением (22).

3. Слабоанизотропная космологическая модель с однородным магнитным полем

Влияние первичного однородного магнитного поля на анизотропное расширение Вселенной исследовалось многими авторами (см., например, [13]). Как показали исследования, магнитное поле «консервирует» анизотропию расширения. Возникает вопрос: остаётся ли верным этот вывод для макроскопических уравнений Эйнштейна?

Рассмотрим метрику вида (25). Тензор энергии–импульса возьмем для идеальной жидкости и однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z. Уравнение состояния для обычного вещества $p=0$. Для однородного магнитного поля [13]

$$T_1^1=T_2^2=-T_3^3=-\frac{H^2}{8\pi}\equiv-\omega, \tag{39}$$

где H - напряженность поля. Макроскопические уравнения Эйнштейна и законы сохранения принимают вид:

$$(bd^2)^{-1}\frac{d}{dt}\left(b^2 d\alpha\right)=\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}+\omega, \tag{40}$$

$$(bd^2)^{-1}\frac{d}{dt}\left(b^2 d\beta\right)=\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}-\omega, \tag{41}$$

$$\dot{\varepsilon}+(2\alpha+\beta)\varepsilon=0\,, \tag{42}$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}+\frac{4}{3}(2\alpha+\beta)\tilde{\varepsilon}=0\,, \tag{43}$$

$$\dot{\omega}+4\alpha\omega=0\,, \tag{44}$$

где

$$8\pi G=c=1,\ \alpha=\frac{\dot{b}}{b},\ \beta=\frac{\dot{d}}{d}. \tag{45}$$

Введем следующие величины:

$$n=\frac{2\alpha+\beta}{3},\ r=\frac{\alpha-\beta}{n},\ q=\frac{\omega}{\varepsilon-\tilde{\varepsilon}}. \tag{46}$$

Величина n описывает изотропное расширение, r и q - анизотропию [13]. Перейдем от космологического времени t к новой переменной η:

$$\eta=c\int\frac{dt}{a(t)}, \tag{47}$$

где $a(\eta)$ есть решение (22).

Уравнения (40) – (44) приобретают вид:

$$3n'+9an^2=a(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})\left(1+q+\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})}\right), \tag{48}$$

$$(nr)'+3an(nr)=2aq(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})\,, \tag{49}$$

$$\varepsilon'+4an\varepsilon=0\,, \tag{50}$$

$$\tilde{\varepsilon}'+3an\tilde{\varepsilon}=0\,, \tag{51}$$

$$q'+\frac{4}{3}arnq=0\,. \tag{52}$$

Пусть начиная с некоторого момента η_0 Вселенная максимально близка к изотропной модели (22), тогда r и q малы, а плотности энергий ε, $\tilde{\varepsilon}$ и общая скорость расширения n близки к изотропным значениям:

$$\varepsilon=\frac{6a_0}{a^3},\ \ \tilde{\varepsilon}=\frac{3a_0}{a^4},\ \ n=\frac{a_0\eta}{a^2}=\frac{2a_0^2}{a_1^2+a_0^2\eta^2}. \tag{53}$$

Отсюда

$$\left(r\frac{a_0\eta}{a^2}\right)'+\frac{3a_0\eta}{a}\left(r\frac{a_0\eta}{a^2}\right)=2q\left(\frac{6a_0}{a^2}-\frac{3a_1^2}{a^3}\right), \tag{54}$$

$$q'=-\frac{4}{3}a_0\eta rq\,. \tag{55}$$

Рассмотрим случай, когда магнитное поле отсутствует. Тогда, интегрируя (54) при $q=0$, получим:

$$r=r_0\cdot\frac{\eta_0(a_1^2+a_0^2\eta_0^2)}{\eta(a_1^2+a_0^2\eta^2)}. \tag{56}$$

При отсутствии магнитного поля анизотропия расширения быстро убывает со временем.

Как показывают наблюдения [13], галактики обладают некоторым магнитным полем. Для объяснения этого факта вводится первичное космологическое магнитное поле. Далее предполагается, что это поле стремится не к нулю, а некоторому малому постоянному значению. Математически это означает, что мы будем искать квазистационарное решение. Положим $r' = 0$. Из уравнений (48) и (49) получим

$$r \to \frac{12(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})}{3\varepsilon - 2\tilde{\varepsilon}} \cdot q = \frac{12a_0^2\eta^2}{a_1^2 + 3a_0^2\eta^2} \cdot q \,. \tag{57}$$

Подставляем последнее соотношение в (52) и интегрируем:

$$q' = -\frac{32a_0^4\eta^3}{(a_1^2 + a_0^2\eta^2)(a_1^2 + 3a_0^2\eta^2)} \cdot q^2 \,, \tag{58}$$

$$q = \frac{q_0}{1 + 8q_0\left(\ln\left[\frac{a_1^2 + a_0^2\eta^2}{a_1^2 + a_0^2\eta_0^2}\right] - \frac{1}{3}\ln\left[\frac{a_1^2 + 3a_0^2\eta^2}{a_1^2 + 3a_0^2\eta_0^2}\right]\right)} \,. \tag{59}$$

Сравнивая решения (56), (57) и (59), приходим к выводу, что наличие магнитного поля приводит к менее быстрому убыванию анизотропии расширения, чем без поля.

Таким образом, для макроскопических уравнений Эйнштейна качественно физическая картина процесса изотропизации расширения Вселенной не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lorentz H. A. Versush einer Theorie der Elektrishen und Optishen Ercheinungen in Bewegten Korpern / H.A.Lorentz. – Leiden, 1895.
2. Lorentz H. A. The Theory of Electrons / H.A.Lorentz. – Leipzig: Teubner, 1916.
3. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов / Ю. Л. Климонтович. – М.: Наука, 1980. – С. 373.
4. Широков М. Ф. Изотропное пространство с дискретными источниками гравитационного поля / М.Ф.Широков, И.З.Фишер // Астрон. журн..-1962. -Т.39.- С.899-910.
5. Захаров А. В. Макроскопические уравнения Эйнштейна для системы самогравитирующих частиц с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию / А.В.Захаров //ЖЭТФ.-1996.-Т. 110.- С. 3-16.
6. Захаров А. В. Макроскопические уравнения Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию / А.В.Захаров //ЖЭТФ.-1997.-Т. 112.-С.1153-1166.
7. Захаров А. В. Макроскопическая гравитация / А.В.Захаров. – М.: ЯНУС-К, 2000. -С.284.
8. Захаров А. В. Макроскопические уравнения Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию для системы самогравитирующих частиц с разными массами / А.В.Захаров, Р.К.Мухарлямов //ЖЭТФ.-2003.-Т. 123.-С.665-671.
9. Захаров А. В. Макроскопическая система уравнений Эйнштейна - Максвелла для системы взаимодействующих частиц / А.В.Захаров //ТМФ.-2000. -Т. 125.-С.107-131.
10. Захаров А.В. Макроскопическая система уравнений Эйнштейна – Максвелла для системы взаимодействующих частиц с разными массами / А.В.Захаров, Р.К.Мухарлямов // ЖЭТФ. -2004 – Т. 126.- С.1027-1033.
11. Chernicov N. A. The relativistic gas in the gravitational Field / N. A. Chernicov //Acta Phys. Pol. – 1963. – Vol. 23. – N 5. – P.629-645.
12. Chernicov N. A. Equilibrium distribution of the relativistic gas / N. A. Chernicov //Acta Phys. Pol. – 1964. – Vol. 26. – N 6. – P. 1069-1092.
13. Зельдович Я.Б. Строение и эволюция Вселенной / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. – М.: Наука, 1975. – С.736.
14. Шмутцер Э. Точные решения уравнения Эйнштейна / Э. Шмутцер, Д. Крамер, Ч. Штефани, Мак – Каллум. – М.: Энергоиздат, 1982. – С.416.
15. Захаров А.В. Оценка дополнительных слагаемых макроскопических уравнений Эйнштейна в космологии. Несингулярные космологические модели / А.В. Захаров, Р.К. Мухарлямов // Изв. ВУЗов. Физика. - 2004. - № 12. –С.21-26.