УДК 517 + 530.1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ
Функции Грина. Вариационные принципы. Аппроксимация электрических полей проводников полями точечных зарядов. Расчеты емкости экранированного проводника

В.П.Казанцев, М.В.Долгополова, О.А.Золотов*

Предложено аппроксимировать электрическое поле проводников полями зарядов, распределенных по поверхности проводников и создающих вне проводников такое же электрическое поле, как и точечные заряды, расположенные в различных точках областей проводников. Предложенный подход реализован на основе вариационного принципа.

Электростатические задачи на плоскости довольно часто возникают на практике [1,2], когда нужно определять электрическое поле, зависящее лишь от двух декартовых координат. Особенности постановки таких задач, специфика нормировки электрического потенциала, а также органичность использования комплексного анализа для их решения подробно были рассмотрены в работе [3].

Применение вариационных принципов для постановки и решения электростатических задач позволяет проводить аппроксимацию электрических полей с помощью весьма широких классов базисных функций, а также использовать разнообразные, в том числе и неортогональные, системы координат [4].

Из учебной литературы хорошо известен метод "изображений", основанный на том, что электрическое поле точечного заряда индуцирует на проводящих сфере и плоскости электрические заряды, создающие вне проводящей области такие же поля, как и точечные заряды, расположенные в областях проводников. Применительно к задачам электростатики на плоскости этот метод позволяет, в частности, дать полное решение задачи об электрической емкости двух проводящих кругов, а также задачи о емкости круга относительно экранирующей его проводящей прямой [5]. На наш взгляд, суть метода "изображений" лучше выражает название "метод эквивалентных зарядов", которое мы и будем использовать. Распространение метода "изображений" на другие задачи в его классической формулировке оказалось невозможным, однако такое распространение может быть проведено, если воспользоваться вариационными принципами, выбирая поля точечных зарядов, расположенных в областях проводников, в качестве базисных при аппроксимации реального поля. Положения этих зарядов и их величины определяются на основе вариационного принципа.

Органичное объединение вариационного подхода с методом эквивалентных зарядов для решения электростатических задач на плоскости - цель настоящей работы.

Функции Грина и электрические поля экранированных точечных зарядов

Как показано в [3], комплексный потенциал экранированного точечного заряда λ_0, расположенного в точке $\breve{z}$,

$$\Pi_0(z,\breve{z}) = \lambda_0(\Gamma(z,\breve{z}) + \gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)) = \lambda_0(\Gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*) - P(\breve{z},\breve{z}^*)) \tag{1}$$

складывается из потенциала неэкранированного точечного заряда

$$\Gamma_0(z,\breve{z}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-\breve{z}}{R}\right) \tag{2}$$

и потенциала наведенных зарядов

$$\gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\partial S}\ln\left(\frac{z-z_S}{R}\right)d\lambda(z_S)\,. \tag{3}$$

Отметим, что выражение, стоящее в скобках правой части формулы (1), отличается от функции Грина, которая должна принимать на границе проводника нулевое значение, на постоянную величину $P(\breve{z},\breve{z}^*)$, что требует известной тщательности при анализе возникающих здесь физических соотношений.

Поскольку при реализации вариационного подхода важны энергетические соотношения, найдем энергию взаимодействия неэкранированного точечного заряда с зарядами, наведенными на ∂S:

$$W_{вз} = \lambda_0^2\,\mathrm{Re}\int_{\partial S}\Gamma_0(z_S,\breve{z})d\lambda(z_S) = \lambda_0^2\,\mathrm{Re}\gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*) = \frac{\lambda_0^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\left|G(\infty,\breve{z},\breve{z}^*)\right|}{R}\right), \tag{4}$$

где

$$G(z,\breve{z},\breve{z}^*) = B\exp(-2\pi\varepsilon_0 \Gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)) \,. \qquad (5)$$

Отметим, что функция $G(z,\breve{z},\breve{z}^*)$ отображает часть комплексной плоскости S на круг радиусом $|B|$.

Собственная энергия зарядов, наведенных точечным зарядом λ_0 на ∂S,

$$\gamma(z_S,\breve{z},\breve{z}^*)d\lambda(z_S) = -\frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{Re}\int_{\partial S}(\Gamma_0(z_S,\breve{z}) + P(\breve{z},\breve{z}^*))d\lambda(z_S) =$$

$$W_{соб} = \frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{Re}\int_{\partial S}\frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{Re}(P(\breve{z},\breve{z}^*) - \gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)) = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{Ra(\breve{z},\breve{z}^*)}{\left|G(\infty,\breve{z},\breve{z}^*)\right|^2}\right) = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{A(\breve{z},\breve{z}^*)} \qquad (6)$$

Сумма собственной энергии и энергии взаимодействия

$$W_{вз} + W_{соб} = \frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{Re}(P(\breve{z},\breve{z}^*) + \gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)) = \frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{Re}(\Gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*) - \Gamma_0(z,\breve{z}))\Big|_{z=\breve{z}} = \operatorname{Re}\frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a(\breve{z},\breve{z}^*)}{R} \,. \qquad (7)$$

Положительные параметры, имеющие размерности длины и определяющие энергии в формулах (4) - (7), связаны соотношениями:

$$A(\breve{z},\breve{z}^*) < \left|G(\infty,\breve{z},\breve{z}^*)\right| < a(\breve{z},\breve{z}^*)\,;\; \left|G(\infty,\breve{z},\breve{z}^*)\right|^2 = A(\breve{z},\breve{z}^*)a(\breve{z},\breve{z}^*) \,. \qquad (8)$$

Наиболее важным для дальнейшего применения будет формула (7), ибо в вариационные расчеты будет входить именно сумма собственной энергии наведенных зарядов и энергии их взаимодействия с точечным зарядом. По этой причине далее мы будем иметь дело только с внутренним конформным радиусом $a(\breve{z},\breve{z}^*)$, отнесенным к некоторой точке. Отметим также, что обозначение $a(\breve{z},\breve{z}^*)$ подразумевает аналитическую зависимость внутреннего радиуса от каждой из переменных.

Энергия взаимодействия двух точечных экранированных зарядов $\lambda_0^{(i)}$ и $\lambda_0^{(j)}$, расположенных в точках z_i и z_j, как в этом нетрудно убедиться, может быть выражена через функцию Грина

$$W_{вз} = W_{ji} = \lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}\operatorname{Re}\Gamma(z_i,z_j,z_j^*) = \lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}\operatorname{Re}\Gamma(z_j,z_i,z_i^*) \,. \qquad (9)$$

Заметим, что из полученного соотношения ясно видна симметрия реальной части функции Грина относительно перестановки z_i и z_j, а вместе с тем и гармоничность $\Gamma(z_i,z_j,z_j^*)$ как по z_i, так и по z_j.

Энергию взаимодействия распределений $d\lambda(z_S,z_i,z_i^*)$ и $d\lambda(z_S,z_j,z_j^*)$ наведенных на границе ∂S зарядов можно найти из соотношений

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}\operatorname{Re}(P(z_i,z_i^*) + P(z_j,z_j^*) - \Gamma(z_i,z_j,z_j^*) + \Gamma_0(z_i,z_j)) = \\ &\lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}\operatorname{Re}(P(z_i,z_i^*) + P(z_j,z_j^*) - \Gamma(z_j,z_i,z_i^*) + \Gamma_0(z_j,z_i)) = w_{ji} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\frac{\lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{Re}\left(\ln\left(\frac{a(z_i,z_i^*)a(z_j,z_j^*)}{G(\infty,z_i,z_i^*)G(\infty,z_j,z_j^*)}\right) + \ln\left(\frac{G(z_i,z_j,z_j^*)R}{a(z_j,z_j^*)(z_i - z_j)}\right)\right) .$$

Отсюда, в частности, следует гармоничность $\Gamma(z_j,z_i,z_i^*) - \Gamma_0(z_j,z_i) = \gamma(z_j,z_i,z_i^*)$ как по z_i, так и по z_j.

Аппроксимация электрических полей на плоскости полями экранированных точечных зарядов. Экранированный заряженный провод

Экранированный заряженный провод можно рассматривать как проводящую (обладающую свойствами проводника) область S_n комплексной плоскости, содержащуюся в области комплексной плоскости, ограниченной экраном ∂S. Электрическое поле экранированного провода S_n будем приближать суммой полей экранированных зарядов, распределенных по поверхности провода ∂S_n с плотностями $\lambda_0^{(i)}\sigma(z_n,z_i,z_i^*)$;

$z_n \in \partial S_n$ и создающих вне его такие же поля, как и точечные экранированные заряды $\lambda_0^{(i)}$, расположенные в точках z_i области S_n. Комплексный потенциал, отвечающий одному точечному заряду $\lambda_0^{(i)}$, будет равен:

$$\lambda_0^{(i)} \Pi_o^{(i)}(z, z_i, z_i^*) = \lambda_0^{(i)} \begin{cases} \Gamma(z, z_i, z_i^*) & при \quad z \in S - S_n \\ \Gamma(z, z_i, z_i^*) - \Gamma(z, z_i, z_i^*) & при \quad z \in S_n \end{cases}, \tag{11}$$

где $\Gamma(z, z_i, z_i^*)$ - функция Грина области S, а $\Gamma_n(z, z_i, z_i^*)$ - функция Грина области S_n. Комплексный потенциал заряженного провода будем аппроксимировать потенциалами

$$\Pi_N(z) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_0^{(i)} \Pi_0^{(i)}(z, z_i, z_i^*), \tag{12}$$

определяя $\lambda_0^{(i)}$ согласно вариационному принципу Гаусса из требования минимума электростатической энергии

$$W_N = \frac{1}{2} \vec{\lambda}_0 \cdot \widehat{A} \cdot \vec{\lambda}_0 \tag{13}$$

при условии постоянства полного заряда провода

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_0^{(i)} = \vec{\lambda}_0 \cdot \vec{e} = \lambda_0 \ ; \ \vec{\lambda} = (\lambda_0^{(1)}; \lambda_0^{(2)}; ... \lambda_0^{(N)}) \ ; \ \vec{e} = (1;1;...1) \ . \tag{14}$$

Для определения элементов симметричной положительно определенной энергетической матрицы $\widehat{A}$ заметим, что величины $\frac{1}{2} A_{ii} \lambda_0^{(i)2}$ и $\lambda_0^{(i)} A_{ij} \lambda_0^{(j)}$ - это собственная энергия и энергия взаимодействия экранированных зарядов, распределенных по поверхности провода ∂S_n с плотностями $\lambda_0^{(i)} \sigma(z_n, z_i, z_i^*)$. Учитывая это обстоятельство, запишем

$$\frac{1}{2} A_{ii} \lambda_0^{(i)2} = W_{соб} + W_{соб}^{(n)} + W_{вз} \ . \tag{15}$$

С помощью соотношения (26) находим

$$W_{соб} + W_{соб}^{(n)} + W_{вз} = \frac{\lambda_0^{(i)2}}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a(z_i, z_i^*)}{R} \ ; \ W_{соб}^{(n)} = \frac{\lambda_0^{(i)2}}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R}{a_n(z_i, z_i^*)}$$

и

$$A_{ii} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a(z_i, z_i^*)}{a_n(z_i, z_i^*)} \ . \tag{16}$$

Напомним, что $a(z_i, z_i^*)$ и $a_n(z_i, z_i^*)$ - это внутренние конформные радиусы областей S и S_n относительно точки z_i.

Чтобы выразить недиагональные элементы матрицы $\widehat{A}$ через функции Грина, рассмотрим равенство

$$A_{ij} = \mathrm{Re} \int_{\partial S} \sigma(z_n, z_j, z_j^*) \Gamma(z_n, z_i, z_i^*) dl_n \ . \tag{17}$$

Воспользуемся представлением (2) и (3) для $\Gamma(z_n, z_i, z_i^*)$ и, принимая во внимание соотношения

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \mathrm{Re} \int_{\partial S_n} \sigma(z_n, z_j, z_j^*) \ln\left(\frac{z_n - z_i}{R}\right) dl_n = -\mathrm{Re}\, \gamma_n(z_i, z_j, z_j^*) \ ;$$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Re} \int_{\partial S_n} \sigma(z_n, z_j, z_j^*) P(z_i, z_i^*) dl_n = \mathrm{Re}\, P(z_i, z_i^*) \ ; \tag{18}$$

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \mathrm{Re} \int_{\partial S} \int_{\partial S} \sigma(z_S, z_i, z_i^*) \sigma(z_n, z_j, z_j^*) \ln\left(\frac{z_n - z_S}{R}\right) dl_n = \mathrm{Re}\, \gamma(z_i, z_j, z_j^*) \ ,$$

получаем

$$A_{ij} = \mathrm{Re}(\gamma(z_i, z_j, z_j^*) + P(z_i, z_i^*) - \gamma_n(z_i, z_j, z_j^*)) \qquad (19)$$

Если также учесть, что

$$\mathrm{Re}\gamma(z_i, z_j, z_j^*) = \mathrm{Re}\gamma(z_j, z_i, z_i^*)\,;\ \mathrm{Re}\gamma_n(z_i, z_j, z_j^*) = \mathrm{Re}\gamma_n(z_j, z_i, z_i^*)\,, \qquad (20)$$

то можно привести выражение для A_{ij} к более удобному виду

$$A_{ij} = \mathrm{Re}(\Gamma(z_j, z_i, z_i^*) - \Gamma_n(z_j, z_i, z_i^*))\,, \qquad (21)$$

подразумевая в этой формуле взаимное уничтожение особенностей функций Грина $\Gamma(z_j, z_i, z_i^*)$ и $\Gamma_n(z_j, z_i, z_i^*)$.

Минимизация электростатической энергии (13) при условии (14) приводит к соотношениям

$$\vec{\lambda}_0 = \lambda_0 (\vec{e} \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \vec{e})^{-1} \hat{A}^{-1} \cdot \vec{e}\,;\ C > (\vec{e} \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \vec{e})\,. \qquad (22)$$

Здесь C - значение погонной емкости провода относительно экрана, иначе можно сказать, что C - это погонная емкость цилиндрического конденсатора, одной из обкладок которого служит провод, а другой - экран.

Иногда будет удобно проводить минимизацию энергии (13), предварительно исключив из выражения для нее один из неизвестных зарядов (пусть это будет заряд $\lambda_0^{(1)}$) с помощью условия (14). После такого преобразования функционал энергии (13) примет вид

$$W_N = \frac{1}{2}\vec{\lambda}_0^{(2)} \cdot \hat{B} \cdot \vec{\lambda}_0^{(2)} + \lambda_0 \vec{b} \cdot \vec{\lambda}_0^{(2)} + \frac{1}{2} B \lambda_0^2\,, \qquad (23)$$

где

$$\vec{\lambda}_0^{(2)} = (\lambda_0^{(2)}; \lambda_0^{(3)}; \ldots \lambda_0^{(N)})\,;\ B = A_{11}\,;\ b_i = A_{1i} - A_{11}\,;\ B_{ij} = A_{ij} - A_{1i} - A_{1j} + A_{11}\,;\ i, j = 2,3 \ldots N\,. \qquad (24)$$

Минимизация правой части соотношения (23) по $\vec{\lambda}_0^{(2)}$ приводит к следующему

$$\vec{\lambda}_0^{(2)} = -\lambda_0 \hat{B}^{-1} \cdot \vec{b}\,;\ \min W_N = \frac{1}{2}\lambda_0^2 (B - \vec{b} \cdot \hat{B}^{-1} \cdot \vec{b})\,. \qquad (25)$$

Для значения емкости провода относительно экрана будем иметь неравенство

$$C > (B - \vec{b} \cdot \hat{B}^{-1} \cdot \vec{b})^{-1}\,. \qquad (26)$$

Качество аппроксимации истинного поля полями точечных зарядов можно оценивать по сходимости ряда $\min W_N$, однако надежно погрешность аппроксимации можно оценивать, определяя наряду с оценками снизу для истинного значения энергии W_0 и оценки сверху. Такие оценки могут быть получены с помощью неравенств

$$-L(\psi) = U\lambda_0 - W(\psi) < W_0 < W(\varphi) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_S (\nabla\varphi)^2 dS\,. \qquad (27)$$

Правое неравенство выражает вариационный принцип Дирихле, согласно которому к допустимым пробным потенциалам следует отнести непрерывные кусочно-гладкие функции, принимающие на поверхности провода постоянное значение, а на экране нулевые значения

$$\varphi\big|_{\partial S_n} = U\,;\ \varphi\big|_{\partial S} = 0\,. \qquad (28)$$

Левое неравенство (27) соответствует немного измененному вариационному принципу Гаусса, согласно которому ψ - это действительный потенциал экранированных зарядов, распределенных по поверхности провода. Выбирая, в частности, ψ как реальную часть комплексного потенциала (12), φ постоянной внутри провода, а вне провода

$$\varphi = \psi + \Phi\,;\ \Phi\big|_{\partial S_n} = U - \psi\big|_{\partial S_n}\,, \qquad (29)$$

найдем из неравенств (27)

$$\frac{U^2}{2}\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e} < W_0 < \frac{U^2}{2}\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e} + W(\Phi)\,. \tag{30}$$

Если удастся каким-либо образом определить $W(\Phi)$, то погрешности оценки емкости Δ и аппроксимации электрического поля провода, заряженного до потенциала U, δ могут быть вычислены по формулам

$$\Delta = W(\Phi)(W(\Phi) + \vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e})^{-1}\,;\ \delta = \sqrt{\Delta}\,. \tag{31}$$

Задача аппроксимации электрического поля экранированного провода, находящегося во внешнем поле экранированных зарядов, может быть решена аналогичным образом. Пусть $\pi(z)$ - комплексный потенциал внешнего поля некоторой системы экранированных зарядов. Если заряд провода постоянен и равен λ_0, то истинному электрическому потенциалу $\Pi(z)$ наведенных внешним полем экранированных зарядов провода будет отвечать минимум функционала

$$W = \frac{1}{2}\left\|\Pi(z)\right\|^2 + (\Pi(z),\pi(z))\,, \tag{32}$$

определяемый при условии постоянства полного заряда провода. При выборе аппроксимирующего потенциала в виде (12)

$$\left\|\Pi(z)\right\|^2 = \vec{\lambda}_0\cdot\hat{A}\cdot\vec{\lambda}_0\,;\ (\Pi(z),\pi(z)) = \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{N}\lambda_0^{(i)}\pi(z_i) = \vec{a}\cdot\vec{\lambda}_0\,. \tag{33}$$

Условие постоянства полного заряда провода, как и раньше, представим в форме (14). Минимизация функционала (32) при условии (14) приводит к

$$\vec{\lambda}_0 = -\hat{A}^{-1}\cdot\vec{a} + \frac{\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{a}+\lambda_0}{\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e}}\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e}\,;\ \min W = -\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{a} + \frac{(\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{a}+\lambda_0)^2}{2\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e}}\,. \tag{34}$$

Отметим, что величина

$$U = \frac{\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{a}+\lambda_0}{\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{e}} \tag{35}$$

аппроксимирует значение постоянного потенциала провода, а величина

$$\lambda_0 = -\vec{e}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\vec{a} \tag{36}$$

- значение полного заряда провода, при котором его потенциал равен нулю, то есть при котором провод сам является частью экрана.

Электрическое поле и ёмкость круга, экранированного в полосе

Пусть круг $|z| \le a$ экранирован в полосе $|\mathrm{Re}\,z| < D/2$. Заметим, что эта задача, по сути дела, о проводе кругового сечения, заключённом между двумя параллельными ему заземлёнными проводящими плоскостями.

Функция Грина полосы $|\mathrm{Re}\,z| < D/2$ может быть выражена через функцию

$$G(z,\breve{z},\breve{z}^*) = \frac{2D}{\pi}\cos\xi(\breve{z}+\breve{z}^*)\frac{\sin\xi(z-\breve{z})}{\cos\xi(z+\breve{z}^*)}\,;\ \xi = \frac{\pi}{2D}\,, \tag{37}$$

конформно отображающую область $|\mathrm{Re}\,z| < D/2$ на круг радиусом

$$a(\breve{z},\breve{z}^*) = \frac{2D}{\pi}\cos(2\xi\ \mathrm{Re}\,\breve{z}^*)\,, \tag{38}$$

с помощью формулы (5)

$$\Gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sin\xi(z-\breve{z})}{\cos\xi(z+\breve{z}^*)}\right). \tag{39}$$

Причем $P(\breve{z},\breve{z}^*)=0$;

$$\varGamma_0(z,\breve{z})=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-\breve{z}}{R}\right);\ \gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R\sin\xi(z-\breve{z})}{(z-\breve{z})\cos\xi(z+\breve{z}^*)}\right). \tag{40}$$

Функция Грина для круга $(|z|<a)$ может быть выражена через функцию

$$G(z,\breve{z},\breve{z}^*)=(|z|^2-a^2)\frac{z-\breve{z}}{z\breve{z}^*-a^2}, \tag{41}$$

конформно отображающую круг $(|z|<a)$ на круг радиуса

$$a(\breve{z},\breve{z}^*)=\frac{a^2-|\breve{z}|^2}{a} \tag{42}$$

по формуле (5)

$$\varGamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a(z-\breve{z})}{a^2-z\breve{z}^*}\right). \tag{43}$$

Причем

$$\varGamma_0(z,\breve{z})=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-\breve{z}}{R}\right);\ \gamma(z,\breve{z},\breve{z}^*)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a^2-z\breve{z}^*}{aR}\right);\ P(\breve{z},\breve{z}^*)=0\,. \tag{44}$$

Аналитические формулы, числовые оценки для ёмкости круга, экранированного в полосе

Аппроксимация электрического поля экранированного провода полем одного экранированного точечного заряда представляет собой простейший вариант рассмотренной выше вариационной схемы, описанной формулами (11) - (22). В этом случае качество аппроксимации будет тем лучше, чем больше будет величина оценки емкости провода относительно экрана снизу (22)

$$C_i=2\pi\varepsilon_0\Big/\ln\frac{a(z_1,z_1^*)}{a_n(z_1,z_1^*)}. \tag{45}$$

Напомним, что $a_n(z_1,z_1^*)$ и $a(z_1,z_1^*)$ - это внутренние конформные радиусы провода и экрана относительно точки расположения заряда z_1. Изменяя положение заряда, можно добиться того, что величина C_i (положительная и ограниченная сверху) будет максимальной. Для кругового провода $|z|\le a$, экранированного в полосе $|\mathrm{Re}\,z|<D/2$, формула (45) в согласии с выражениями (38) и (42) для внутренних конформных радиусов полосы и круга приводит к соотношению

$$C_i=2\pi\varepsilon_0\Big/\ln\left(\frac{2D}{\pi a}\right). \tag{46}$$

В работе [6] проведен численный расчет значений емкости C такой системы. В табл. 1 даны для сравнения значения $C_i/2\pi\varepsilon_0$, найденные по формуле (46), соответствующие значениям и $C/2\pi\varepsilon_0$, полученным в работе [6]. Как показывают приведенные в табл. 1 данные, погрешность расчета емкости провода относительно экрана здесь не превосходит 0,5 %, когда расстояние от оси провода до экрана $D/2>2{,}5a$.

Таблица 1

a/D	0,05	0,1	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$C_i/2\pi\varepsilon_0$	0,393	0,540	0,864	1,070	1,329	1,672	2,151
$C/2\pi\varepsilon_0$	0,393	0,540	0,865	1,076	1,350	1,737	2,366

Аппроксимация электрического поля заряженного экранированного провода полем двух экранированных точечных зарядов представляет собой так же, как и аппроксимация полем одного экранированного заряда, относительно простой вариант рассмотренной выше вариационной схемы, описанной формулами (11) - (22).

И опять качество аппроксимации будет тем лучше, чем больше будет величина оценки емкости провода относительно экрана снизу (22)

$$C_i = \frac{A_{11} + A_{22} - 2A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{1}{A_{11}}\left(1 + \frac{(A_{11} - A_{12})^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\right), \tag{47}$$

где, напомним,

$$A_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a(z_1, z_1^*)}{a_n(z_1, z_1^*)};\; A_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a(z_2, z_2^*)}{a_n(z_2, z_2^*)};$$

$$A_{12} = \mathrm{Re}(\Gamma(z_1, z_2, z_2^*) - \Gamma_n(z_1, z_2, z_2^*));\; z_1, z_2 \in S_n. \tag{48}$$

Второе равенство (47) приведено с тем, чтобы факт улучшения второй вариационной оценкой первой был очевиден. Оценка (47) зависит, разумеется, от расположения точечных зарядов, то есть от точек z_1 и z_2, и может быть по этим положениям оптимизирована.

Для кругового провода $|z - x_0| < a$, экранированного в полосе $|\mathrm{Re}\, z| < D/2$, точки z_1 и z_2, как это видно из симметрии задачи, следует располагать на оси x. Тогда в согласии с выражениями для внутренних конформных радиусов полосы (38) и круга (42) находим

$$A_{ii} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a\cos 2\xi x_i}{\xi(a^2 - (x_i - x_0)^2)}\right);\; \xi = \frac{\pi}{2D};\; i = 1{,}2. \tag{49}$$

Используя выражения для функций Грина круга (43) и полосы (39), получаем

$$A_{12} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sin\xi(x_2 - x_1)}{\cos\xi(x_2 + x_1)}\frac{(a^2 - (x_1 - x_0)(x_2 - x_0))}{a(x_2 - x_1)}\right). \tag{50}$$

В качестве x_1 и x_2, по-видимому, целесообразно будет взять величины

$$x_1 = x_0 + \frac{a^2}{D/2 - x_0 + \sqrt{(D/2 - x_0)^2 - a^2}};\quad x_2 = x_0 - \frac{a^2}{D/2 + x_0 + \sqrt{(D/2 + x_0)^2 - a^2}} \tag{51}$$

соответствующие точным решениям задач о проводящем круге, экранированном
прямыми $\mathrm{Re}\, z = D/2$ и $\mathrm{Re}\, z = -D/2$.

Оценка (47) упрощается, когда центр экранированного круга лежит на середине полосы. В этом случае $x_0 = 0$; $x_1 = -x_2 = b$; $A_{11} = A_{22}$ и

$$C_i = \frac{2}{A_{11} + A_{12}} = 4\pi\varepsilon_0\left(\ln\left(\frac{2a^2 b\,ctg 2\xi b}{\xi(a^4 - b^4)}\right)\right)^{-1} \tag{52}$$

При $b \to 0$ эта оценка переходит в рассмотренную ранее оценку (46). Можно выбрать b в соответствии с формулами (51)

$$b = \frac{a^2}{D/2 + \sqrt{(D/2)^2 - a^2}}, \tag{53}$$

а можно находить его значение, определяя максимум правой части оценки (47) с помощью уравнения для соответствующего максимуму значения b, а именно:

$$\frac{1}{b} + \frac{3b^3}{a^4 - b^4} - \frac{2\xi}{\sin 2\xi b} = 0. \tag{54}$$

В табл. 2 приведены значения C_i, рассчитанные по формуле (46), C_{i1}, найденные по формулам (52) и (53), C_{i2}, полученные по формуле (52) с оптимизацией ее по параметру b, а также значения b_1 и b_2, соответствующие оценкам C_{i1} и C_{i2}. В последней строке таблицы даны значения C, найденные в работе [6] путем численного расчета. Из таблицы, в частности, видно, что аппроксимация с помощью двух экранированных зарядов в рассмотренной задаче не только позволяет оценить емкость экранированного провода с точностью не менее 0,017 %, но аппроксимировать электрическое поле экранированного провода со средней квадратичной погрешностью не более, чем 1,3 %.

Таблица 2

a/D	0,05	0,1	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$C_i/2\pi\varepsilon_0$	0,3931	0,5402	0,8637	1,0698	1,3291	1,6716	2,15129
$C_{i1}/2\pi\varepsilon_0$	0,3931	0,5403	0,8651	1,0754	1,3481	1,7329	2,3565
b_1/D	0,00251	0,0101	0,0417	0,0670	0,1	0,143	0,2
$C_{i2}/2\pi\varepsilon_0$	0,3931	0,5403	0,8653	1,0761	1,3498	1,7369	2,3652
b_2/D	0,00291	0,0130	0,0515	0,0810	0,118	0,164	0,221
$C/2\pi\varepsilon_0$	0,3931	0,5403	0,8653	1,0761	1,3498	1,7369	2,3656

Аппроксимация электрического поля заряженного экранированного провода полем трех экранированных точечных зарядов может быть использована, когда приближение полем двух экранированных зарядов не дает требуемой точности. Как обычно, качество аппроксимации будет тем лучше, чем больше будет величина оценки емкости провода относительно экрана снизу, определяемая по формулам (22) или (26). Здесь нам удобнее для представления оценок в аналитической форме воспользоваться соотношением (26), с помощью которого можно записать

$$\frac{1}{C_i}=A_{11}-\frac{B_{33}b_2^2+B_{22}b_3^2-2B_{23}b_2b_3}{B_{22}B_{33}-B_{23}^2}=A_{11}-\frac{b_2^2}{B_{22}}-\frac{(B_{22}b_3-B_{23}b_2)^2}{B_{22}(B_{22}B_{33}-B_{23}^2)}, \tag{55}$$

где

$$b_2=A_{12}-A_{11};\ b_3=A_{13}-A_{11};\ B_{22}=A_{11}+A_{22}-2A_{12};$$
$$B_{23}=B_{32}=A_{11}+A_{23}-A_{12}-A_{13};\ B_{33}=A_{11}+A_{33}-2A_{13}. \tag{56}$$

Во втором равенстве (55), по сути дела, записана последовательность оценок C_i, отвечающих аппроксимации электрического поля полями различного числа экранированных точечных зарядов. Так,

$$C_i=\frac{1}{A_{11}};\ C_i=\left(A_{11}-\frac{b_2^2}{B_{22}}\right)^{-1} \tag{57}$$

- это оценки, представленные в формулах (45) и (47). Второе равенство (55) делает очевидным факт последовательного уточнения оценок в вариационной схеме аппроксимации поля экранированного проводника полями экранированных точечных зарядов, находящихся внутри проводника. Для вычисления матричных элементов энергетической матрицы $\widehat{A}$ здесь, как и ранее, следует использовать выражения (16) и (21).

Продолжим уточнение оценок для емкости кругового провода $|z-z_0|<a$, находящегося между двумя проводящими параллельными плоскостями $|\mathrm{Re}\,z|<D/2$. Для этой цели к точечным зарядам $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(2)}$, расположенным в точках z_1 и z_2, координаты которых определены формулами (51), добавим заряд $\lambda_0^{(3)}$, поместив его на оси провода, то есть в точке $z_3=z_0$. Выражения для элементов энергетической матрицы находим по формулам (16) и (21). Учитывая, что элементы с индексами "1" и "2" были определены ранее, запишем

$$A_{33}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\cos\xi x_0}{\xi a}\right);\ A_{3i}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sin\xi(x_0-x_i)a}{\cos\xi(x_0+x_i)(x_0-x_i)}\right). \tag{58}$$

Здесь $i=1,2\ldots$; $\xi=\pi/2D$.

При симметричном расположении провода относительно экранирующих плоскостей $\mathrm{Re}\,z_0=0$, $A_{11}=A_{22}$, $A_{13}=A_{23}$. Оценка (55) в этом случае довольно просто может быть записана через элементы матрицы $\widehat{A}$

$$\frac{1}{C_i}=\frac{1}{2}(A_{11}+A_{12})-\frac{(A_{11}+A_{12}-2A_{13})^2}{2(A_{11}+A_{12}+2A_{33}-4A_{13})}. \tag{59}$$

Подставляя в эту оценку выражения для матричных элементов из формул (49), (50) и (58), получим

$$\frac{C_i}{2\pi\varepsilon_0} = 2\left(\ln\left(\frac{2a^2bctg2\xi b}{\xi(a^4-b^4)}\right) - \ln^2\left(\frac{2a^4ctg2\xi btg^2\xi b}{\xi b(a^4-b^4)}\right)/\ln\left(\frac{2a^4ctg2\xi btg^4\xi b}{\xi^3b^3(a^4-b^4)}\right)\right)^{-1} \quad (60)$$

Соотношение (60) позволяет, например, улучшить оценку, приведенную в последнем столбце и пятой строке табл. 2. Действительно, принимая $a = 0{,}4D$, значение $b = 0{,}2D$ находим по формуле (53). Подставляя эти величины в (60), получаем

$$\frac{C_i}{2\pi\varepsilon_0} = 2{,}3657389. \quad (61)$$

Найденная оценка снизу для емкости экранированного провода дает возможность утверждать, что результаты автора [6] (последний столбец и последняя строка табл. 2) не вполне соответствуют точности, заявленной им. Отметим, что для остальных значений a/D, приведенных в табл. 2, величины оценок емкости, рассчитанные по формуле (55), совпадают с величинами, данными в работе [6]. Можно предположить, что при численных расчетах [6] возникли трудности при a/D, близких к 0,5. Оценку же (60) можно использовать совместно с выражением для b (53) при любых $a/D < 0{,}5$.

Если погрешность оценок емкости такова, что погрешность аппроксимации электрического поля полями точечных экранированных зарядов оказывается приемлемой, то величины аппроксимирующих зарядов могут быть найдены как

$$\lambda_0^{(2)} = -\frac{B_{33}b_2 - B_{23}b_3}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}\lambda_0;\ \lambda_0^{(3)} = -\frac{B_{22}b_3 - B_{23}b_2}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}\lambda_0. \quad (62)$$

При симметричном расположении экранированного проводящего круга в полосе из этих формул получаем

$$\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = \frac{A_{33} - A_{13}}{A_{11} + A_{12} + 2A_{33} - 4A_{13}}\lambda_0;\ \lambda_0^{(3)} = \frac{A_{11} + A_{12} - 2A_{13}}{A_{11} + A_{12} + 2A_{33} - 4A_{13}}\lambda_0; \quad (63)$$

$$A_{33} - A_{13} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{tg\xi b}{\xi b}\right);\ A_{11} + A_{12} - 2A_{13} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2a^4ctg2\xi btg^2\xi b}{\xi b(a^4-b^4)}\right);$$

$$A_{11} + A_{12} + 2A_{33} - 4A_{13} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2a^4ctg2\xi btg^4\xi b}{\xi^3b^3(a^4-b^4)}\right).$$

При решении задачи об аппроксимации электрического поля симметрично расположенного экранированного в полосе проводящего круга табл. 3 следует дополнить таблицей, в которой приведены величины аппроксимирующих точечных зарядов.

Таблица 3

a/D	0,05	0,1	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$\lambda_0^{(3)}/\lambda_0$	0,81838	0,80640	0,76224	0,73244	0,69904	0,66278	0,62366
$\lambda_0^{(3)}/\lambda_0$	-0,63676	-0,61280	-0,52448	-0,46487	-0,39807	-0,32555	-0,24732

Аппроксимация электрического поля заряженного экранированного провода полями нескольких экранированных точечных зарядов должна быть использована, если точность приведённых выше оценок оказывается недостаточной, а также для того, чтобы оценить скорость сходимости этих оценок.

В табл. 4 приведены оптимизированные по положениям аппроксимирующих зарядов значения оценок ёмкости, соответствующие этим значениям величины аппроксимирующих зарядов, а также координаты этих зарядов для чисел аппроксимирующих зарядов. Элементы энергетической матрицы находили с помощью формул (49) и (50), в последнюю из которых вместо индексов "1" и "2" подставляли индексы "i" и "j". При проведении расчётов все линейные параметры были выражены в единицах радиуса провода a. Оптимальные положения зарядов $\vec{b}$ определяли численным методом градиентного спуска. Из симметрии задачи очевидно, что вместе с аппроксимирующим зарядом λ_i с координатой b_i должен присутствовать заряд такой же величины с координатой $-b_i$, поэтому в табл. 4 приведены только положительные значения b_i. Точность расчётов оценивали по сходимости оптимизирующей последовательности "в себе" при числе зарядов $n \geq 2$. Поскольку при $n = 1$ число значащих цифр оценки, совпадающих с цифрами истинного значения ёмкости, неизвестно, то в этом случае приведены все цифры, полученные в результате расчётов оценки. Расчеты были проведены в системе Maple с мантиссой из 20 цифр. Из табл. 4, например, видно, что даже для "очень плохого" случая, когда расстояние между экраном и проводником мало, предлагаемая расчетная схема позволяет получать весьма и весьма удовлетворительную точность при достаточно малом числе пробных зарядов. Более того, из сравнения аппроксимаций проведённых с помощью трёх и пяти зарядов видно, что электрическое поле экранированного круга может быть аппроксимировано полями трёх зарядов с средней квадратичной погрешностью порядка 0,1 % во всём интервале приведённых в таблице геометрических параметров.

Таблица 4

D/a	n	$C_i/2\pi\varepsilon_0$	$\vec{b}/a$	$\vec{\lambda}/\lambda_0$
2,001	1	4,1311328938379485139	0	1
2,001	2	62,62067154759577	0,96944251692056	0,5
2,001	3	62,68637185092983	0 0,96884982824739	0,00943535451276 0,50471767725638
2,001	5	62,686442203431989038	0 0,34472344299243327817 0,96887264824183409511	-0,01265098996750584877 0,00183947234634864768 0,50448602263740427671
2,01	1	4,0559392417629380016	0	1
2,01	2	19,4071040160763984	0,9093740732506073	0,5
2,01	3	19,44743194566115018	0 0,90465883744590280	0,03096197376306119 0,51548098688153059
2,01	5	19,447466718308337780	0 0,36691622413080885542 0,90486659077378949329	-0,00392397480075417515 0,00517162599085380542 0,51444824801291707032
2,5	1	2,1518888049972913193	0	1
2,5	2	2,3651992412331555778	0,5531737739841143290	0,5
2,5	3	2,36573925520156815	0 0,49845900535583496	-0,2552262650201304 0,62761313251006521
2,5	5	2,3657394371074123	0 0,40218813488115974326 0,48977608211439202567	-0,22907553011141098479 -0,10904853293849691455 0,72358629799420240694
3	1	1,5455243866566449270	0	1
3	2	1,59012860279002900	0,44170528451601664	0,5
3	3	1,590189259569637	0 0,383648490905762	0,338387777280176 0,669193888640088
3	5	1,590193559542891	0 0,40366476740766767331 0,45608737538111446909	-0,29938980883951559717 0,81320811268567314987 -0,16351320826591535129

В заключение отметим, что использование комплексной формы записи электростатических соотношений позволило здесь компактно описать вариационную схему аппроксимации электрических полей проводников полями экранированных точечных зарядов. Вариационные принципы, лежащие в основе предложенных методов расчета, в свою очередь позволили распространить хорошо известный метод "изображений" на довольно сложные электростатические задачи. Существенно, что развитые методы, в эффективности которых убеждают рассмотренные примеры, дают возможность получать не только численные результаты, но и аналитические формулы, пригодные в широких пределах изменения геометрических параметров задачи. Нет сомнения, что широкий класс электростатических задач может быть решён на основе предложенной вариационной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батыгин В.В. Сборник задач по электродинамике/ В.В. Батыгин, И.К.Топтыгин - М.: Наука, 1970.- С.31.
2. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред/ Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц - М.: Наука, 1982.- С.532.
3. Казанцев В.П. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Ёмкости уединённого проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы/ В.П.Казанцев, О.А.Золотов, М.В.Долгополова // Вестник Красноярского университета.- 2005. – №1, С.32.
4. Казанцев В.П. Вариационные неравенства в задачах о ёмкости тел вращения // В.П.Казанцев, О.А.Золотов, М.В.Долгополова/ Препринт 23 -2004.- Красноярск: КГУ, 2004.- С.23.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат - М.: Наука, 1965.- С.716.
6. Knight R.C. The potential of circular cylinder between the infinite planes/ R.C. Knight - Proc. of London Math, Soc., 1935, v. 39, ser. 2, P. 272 - 281.

ELECTROSTATICS ON A PLANE. GREEN'S FUNCTIONS. VARIATIONAL PRINCIPLES. APPROXIMATION OF ELECTRIC FIELDS OF CONDUCTORS BY FIELDS OF DOT CHARGES. CALCULATIONS OF CAPACITY SCREENING A CONDUCTOR.

V.P.Kazantsev, M.V.Dolgopolova, O.A.Zolotov

It is offered to approximate an electric field of conductors fields of the charges distributed{allocated} on a surface of conductors and creating outside of conductors the same electric field, as well as the dot charges located in various points of areas of conductors. The offered approach is realized on the basis of a variational principle.