

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ДВУХЗВЕНЬЕВОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКЕ¹**Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин, В.В. Исакова***

Исследованы симметричные формы прогиба гибкой двухзвеньеовой стержневой системы под действием поперечной сосредоточенной нагрузки. Для формы профиля изогнутой конструкции получены точные аналитические выражения в эллиптических функциях и интегралах. Эти решения зависят только от одного параметра – модуля эллиптических функций, определяемого внешней нагрузкой.

В настоящее время проблема получения точных аналитических решений нелинейных задач изгиба упругих систем актуальна в различных областях науки и техники. Задачи разработки устройств микромеханики требуют поиска точных формул для форм изгиба стержневых конструкций при различных видах закрепления и способах приложения нагрузки. Особое значение имеют исследования, связанные с изучением сложных структур с нелинейными свойствами и задачи поведения конструкций под воздействием ударных нагрузок, поскольку ударные разрушения относятся к наиболее тяжким последствиям природных и техногенных катастроф. В этом случае необходим точный анализ изогнутых форм составных конструкций – ферм и рам, которые относятся к распространенным элементам в строительных и авиационных системах. При различных условиях опирания и способах приложения нагрузки могут возникать сложные изогнутые формы конструкций.

Такие задачи изгиба составных систем крайне важны как в теоретическом, так и практическом отношении, однако точные решения их получить весьма сложно.

Исследование устойчивости составных стержневых конструкций проводилось в работах многих авторов [1–5]. Традиционно задачи об изгибе упругих систем решаются для геометрически линейных уравнений для прогибов с использованием сложных пробных функций для напряжений [6]. При этом необходимо применять сложные приближенные расчетные методы (метод Бубнова–Галеркина, теорию возмущений и т.д.) [7]. Имеется ряд работ, где проведен подробный численный анализ форм прогиба тонких стержней в геометрически нелинейном случае методом стрельбы, см., например, работу [8].

Настоящая работа посвящена решению задачи об исследовании устойчивости симметричных форм прогиба тонкой гибкой двухзвеньеовой стержневой системы под действием поперечной сосредоточенной нагрузки в случае геометрической нелинейности задачи. Двухзвеньеовая стержневая система рассмотрена при шарнирном, жестком и упругом закреплении в основании конструкции и при различных начальных углах наклона стержня.

1. Изгиб двухзвеньеовой стержневой системы на упругом основании. Рассмотрим двухзвеньеовую стержневую систему, состоящую из двух шарнирно соединенных тонких гибких нерастяжимых стержней, под действием поперечной сосредоточенной нагрузки на упругом основании. Схема конструкции приведена на рис. 1.

¹ При поддержке ВВП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 4418.

* © Ю.В. Захаров, Сибирский государственный технологический университет; Красноярский государственный университет; К.Г. Охоткин, Сибирский государственный аэрокосмический университет; E-mail: okg2000@mail.ru; В.В. Исакова, Сибирский государственный аэрокосмический университет, 2005. E-mail: isakova_varvara@mail.ru

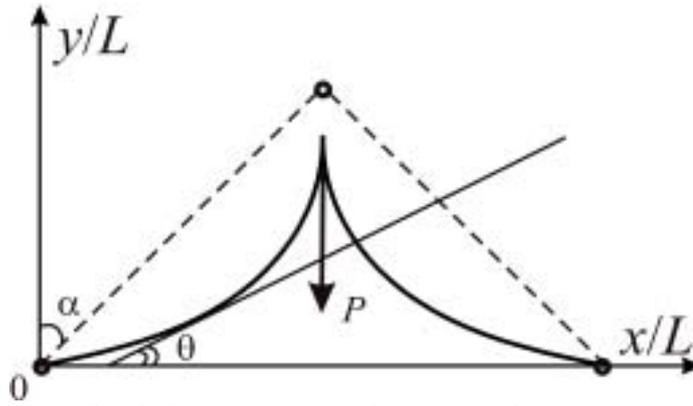


Рис. 1. Схема двухзвеньевой стержневой системы

Введем обозначения: α – начальный угол наклона стержня к оси OY , P – поперечная сосредоточенная нагрузка, l – координата точки, отложенная вдоль изогнутой линии стержня, L – полная длина стержня, $\theta = \theta(l)$ – угол наклона касательной в текущей точке к линии стержня. Декартовы координаты точек изогнутой линии стержня связаны с криволинейной координатой параметрическими соотношениями:

$$x(l) = \int_0^l \cos\theta(l)dl, \quad y(l) = \int_0^l \sin\theta(l)dl.$$

Стержни в конструкции двухзвеньевой стержневой системы имеют одинаковые геометрические и физические параметры. Исследуем симметричные формы прогиба двухзвеньевой стержневой системы. В данной задаче пренебрегаем деформациями растяжения, сжатия и будем рассматривать только деформации чистого изгиба.

В основе расчета двухзвеньевой стержневой системы лежит задача об изгибе стержня. В работах авторов [9, 10] была развита геометрически нелинейная теория изгиба тонких гибких стержней. В этих работах применялся статический критерий устойчивости стержней, исходя из уравнения равновесия типа нелинейного маятника. Были найдены точно аналитически и систематизированы формы изгиба стержня при различных нагрузках постоянного направления и способах закрепления концов стержня. Решения были выражены в удобной параметрической форме через эллиптические интегралы и функции Якоби. Эти решения зависят от одного внешнего параметра – модуля эллиптических функций, определяемого граничными условиями и внешней действующей силой, в отличие от работы [11]. Где решения уравнения равновесия стержня, выражены через эллиптические интегралы и зависят от трех параметров, неявным образом связанных с граничными условиями и действующей нагрузкой. Далее будем следовать методике, приведенной в работе [9].

Уравнение равновесия тонкого гибкого стержня в геометрически нелинейном случае для больших изгибов хорошо известно в литературе, см., например, работы [1, 8, 9, 11]. Запишем нелинейное уравнение равновесия для каждого стержня в конструкции двухзвеньевой стержневой системы

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + q^2 \sin\gamma = 0, \tag{1}$$

где угол $\gamma(t) = \theta(t) + \varphi$ – неизвестная функция, $t = l/L$ – безразмерная криволинейная координата точки на изогнутой линии стержня, $q^2 = PL^2/EI$ – параметр, определяемый внешней нагрузкой P , EI – изгибная жесткость стержня. Угол наклона силы P к оси OX $\varphi = \pi/2$ для нашего случая поперечной нагрузки. Уравнение равновесия тонкого гибкого стержня (1) является уравнением типа нелинейного маятника.

Точное аналитическое решение уравнения (1) записано в эллиптических функциях Якоби:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(qt + F_0, k)], \\ \gamma'(t) &= 2 kq \operatorname{cn}(qt + F_0, k). \end{aligned} \tag{2}$$

Поставим граничные условия к уравнению равновесия (1). Упругое закрепление стержня в основании конструкции двухзвеньевой стержневой системы требует, чтобы

$$\gamma(0) - h\gamma'(0) = \pi - \alpha, \tag{3}$$

где h^{-1} – жесткость закрепления стержней в основании конструкции.

Граничное условие упругого закрепления (3) имеет два предельных случая. При $h \rightarrow 0$ это условие переходит в граничное условие для двухзвеньевой стержневой системы на жестком основании, а при больших

значениях параметра h условие (3) переходит в граничное условие для двухзвеньевой стержневой системы при шарнирном закреплении в основании.

Условие соединения частей двухзвеньевой стержневой системы при симметричном изгибе имеет следующий вид:

$$x/L = \sin \alpha \quad \text{при} \quad t = 1, \quad (4)$$

т.е. точка соединения стержней перемещается по вертикали. Применим граничные условия (3, 4) к решению (2) уравнения (1) и получим систему двух трансцендентных уравнений для определения зависимости собственного числа $q(k)$ и параметра F_0 :

$$\begin{cases} \arcsin [k \operatorname{sn}(F_0, k)] - h k q \operatorname{cn}(F_0, k) = (\pi - \alpha)/2, \\ \operatorname{cn}(F_0, k) - \operatorname{cn}(q + F_0, k) = q \sin \alpha / 2k. \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (5) не имеет аналитического решения. С помощью пакета Maple можно получить численное решение этой системы и найти зависимость собственного числа q от модуля эллиптических функций k , которая определяет систему порогов внешней нагрузки.

Величина нагрузки связана с собственным числом q формулой $P = q^2 EI/L^2$. Используя выражение для эйлеровой критической силы $P_c = (\pi/2)^2 EI/L^2$, получим связь собственного числа q и приведенной нагрузки в виде $q = (\pi/2)(P/P_c)^{1/2}$.

В соответствии с численным решением системы (5) построим зависимость приведенной нагрузки P/P_c от модуля эллиптических функций k для начального угла наклона $\alpha = \pi/4$ и трех значений параметра h , показанную на рис. 2.

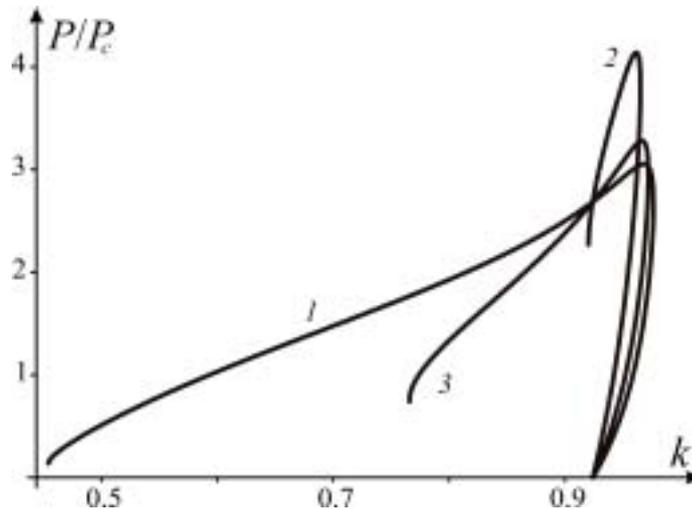


Рис. 2. Зависимость приведенной нагрузки P/P_c от модуля k для $\alpha = \pi/4$.

Кривые: 1 – $h = 10$ (шарнирное закрепление); 2 – $h = 0.1$ (жесткое закрепление); 3 – $h = 1$ (упругое закрепление)

Двухзвеньевая стержневая система рассматривалась при разных значениях начального угла наклона стержня α , начиная от близкого к $\pi/2$ (случай пологой стержневой системы) и заканчивая углом $\alpha = \pi/12$ (случай острой стержневой системы). Параметр h варьировали от 0.01 до 100, чтобы получить два предельных случая закрепления стержня в основании конструкции двухзвеньевой стержневой системы: жесткое и шарнирное закрепление.

Из рис. 2 видно, что одному значению нагрузки соответствуют два значения модуля k , т.е. две формы изогнутой конструкции. В следующих пунктах статьи будет дано подробное описание поведения конструкции в этих случаях и будут найдены области значения модуля k .

На рис. 2 имеется точка, в которой для любых значений угла α и параметра h в указанных диапазонах получаем пересечение кривых зависимости приведенной нагрузки от модуля эллиптических функций. На данном рисунке показаны три кривые, соответствующие шарнирному закреплению ($h = 10$), конструкции на жестком основании ($h = 0.1$) и упругому закреплению стержня в основании конструкции ($h = 1$).

Согласно работе [9], форма изогнутой линии стержня в параметрическом виде с параметром t , приведенной криволинейной длиной стержня, определяется выражениями

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \frac{2k}{q} [\operatorname{cn}(F_0, k) - \operatorname{cn}(u, k)], \\ \frac{y}{L} &= -t + \frac{2}{q} [E(\operatorname{am} u, k) - E(\operatorname{am} F_0, k)], \end{aligned} \quad (6)$$

где аргумент функций $u = qt + F_0$.

Эти аналитические решения определяют форму профиля левого стержня изогнутой двухзвеньевой стержневой системы. Они точно выражены через эллиптические интегралы и функции Якоби. Здесь $E(\operatorname{am} u, k)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби. Формы прогиба второго, правого стержня системы получаются симметричным отражением форм прогиба левого стержня относительно вертикальной прямой $x/L = \sin \alpha$.

На рис. 3 показаны последовательные формы прогиба изогнутой двухзвеньевой стержневой системы на упругом основании под действием поперечной сосредоточенной нагрузки для угла наклона $\alpha = \pi/4$ и параметра $h = 1$, исходя из точных аналитических решений (6). На рисунке изображены формы прогиба конструкции для следующих значений внешней нагрузки: $P_1 = 2.90P_c$, $P_2 = 2.82P_c$, $P_3 = 0.74P_c$.

На рис. 4 представлена для двухзвеньевой стержневой системы зависимость прогиба в точке приложения силы от приведенной нагрузки P/P_c для угла наклона $\alpha = \pi/4$ при значении параметра $h = 1$.

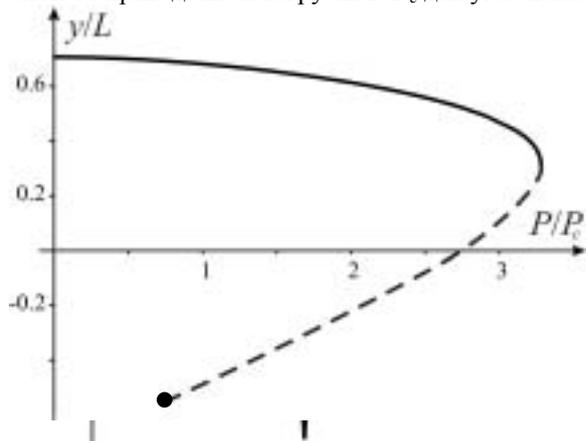


Рис. 3. Последовательные формы изгиба стержневой системы при $h = 1$ для $\alpha = \pi/4$.
Соответствующие нагрузки
 $P_1 = 2.90P_c$, $P_2 = 2.82P_c$, $P_3 = 0.74P_c$

Рис. 4. Зависимость прогиба стержневой системы от приведенной нагрузки P/P_c при $h = 1$ для $\alpha = \pi/4$

Форма изгиба двухзвеньевой стержневой системы, найденная точно аналитически для значения приложенной нагрузки P_3 (нижняя кривая на рис. 3), соответствует крайней нижней (жирной) точке, лежащей на пунктирной кривой рис. 4. Точка, соответствующая максимальному значению нагрузки – точка бифуркации системы. Нами была сделана попытка описания дальнейшего поведения конструкции после достижения системой точки бифуркации. Состояния, показанные пунктирной линией на рис. 4, после точки бифуркации, на практике не будут устойчивыми состояниями реальных физических систем и могут описывать промежуточные формы изгиба, которые, возможно, система будет последовательно проскакивать при прощелкивании конструкции в нижнюю полуплоскость. Таким образом, это прощелкивание может рассматриваться как катастрофа типа сборки. Однако исследования такого рода выходят за рамки данной работы.

Рассмотрим в следующих пунктах работы два частных предельных случая: двухзвеньевую стержневую систему с жестко защемленными под углом α концами и такую систему при шарнирных закреплениях в основании конструкции.

2. Изгиб двухзвеньевой стержневой системы с жестким защемлением концов. Рассмотрим двухзвеньевую стержневую систему под действием поперечной сосредоточенной нагрузки на жестком основании ($h \rightarrow 0$). Жесткое закрепление стержня в основании конструкции требует

$$\gamma(0) = \theta(0) + \pi/2 = \pi/2 - \alpha + \pi/2 = \pi - \alpha. \quad (7)$$

Второе граничное условие – условие соединения частей двухзвеньевой стержневой системы (4).

Применяя первое граничное условие (7) к решению (2), получим, что

$$F_0 = nF\left(\arcsin\left(\frac{1}{k} \cos \frac{\alpha}{2}\right), k\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

$$\operatorname{cn}(F_0, k) = \sqrt{1 - \frac{\cos^2(\alpha/2)}{k^2}},$$

где $F(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода, n – номер моды решения.

Соответственно, модуль k изменяется в пределах, определяемых начальным углом наклона стержня α

$$\cos(\alpha/2) < k < 1.$$

Применяя второе граничное условие (4), получим трансцендентное уравнение для нахождения спектра собственных значений $q_n(k)$

$$\operatorname{cn}(F_0, k) - \operatorname{cn}(q + F_0, k) - \frac{q \sin \alpha}{2k} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является предельным случаем системы (5) при $h \rightarrow 0$. Случай $k = \cos(\alpha/2)$ будет соответствовать двум положениям двухзвеньевой стержневой системы: первоначальному неизогнутому положению фермы в верхней полуплоскости, при нагрузке $P/P_c = 0$, и предельному изогнутому положению в нижней полуплоскости, при $P/P_c \approx P_{пред}$. Значение нагрузки $P_{пред}$ для предельного изогнутого состояния двухзвеньевой стержневой системы в нижней полуплоскости находится из трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{P_{пред}}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{P_{пред}}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{P_{пред}}.$$

На рис. 5 показана зависимость прогиба двухзвеньевой стержневой системы в точке приложения силы от нагрузки P/P_c для случая острой двухзвеньевой стержневой системы. Значение $P_{пред}$ показано на рис. 5 жирной точкой.

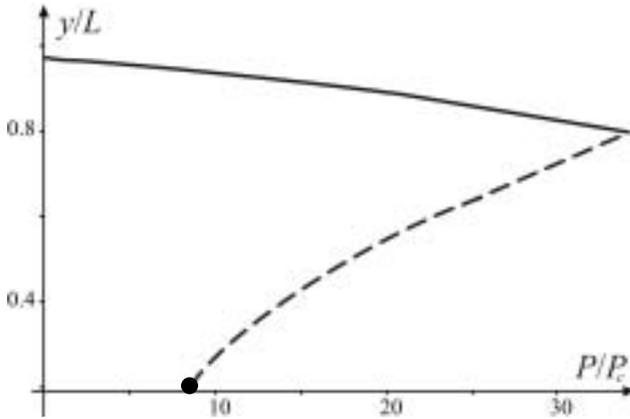


Рис. 5. Зависимость прогиба жестко закрепленной стержневой системы от нагрузки P/P_c для $\alpha = \pi/12$

Форма изогнутой линии стержня в параметрическом виде определяется выражениями, аналогичными (6). При этом значения F_0 берутся по формуле (8), а параметр k находится с помощью численного решения уравнения (9).

Таким образом, каждому значению внешней силы P будет соответствовать своя форма прогиба двухзвеньевой стержневой системы, задаваемая одним параметром – модулем эллиптических функций k , который определяется внешней действующей нагрузкой P .

3. Изгиб двухзвеньевой стержневой системы при шарнирном закреплении в основании. Рассмотрим теперь двухзвеньевую стержневую систему под действием поперечной сосредоточенной нагрузки при шарнирном закреплении в основании ($h \rightarrow \infty$).

Запишем граничные условия к уравнению (1) для шарнирного закреплении в основании конструкции. Из условия (3) в результате предельного перехода $h \rightarrow \infty$ получаем

$$d\gamma(0)/dt = 0, \quad (10)$$

т.е. в этом случае изгибающий момент обращается в ноль. Условие соединения частей двухзвеньевой стержневой системы (4) остается прежним.

Применяя первое условие (10) к решению (2), получим, что $\operatorname{sn}(F_0, k) = 0$, следовательно,

$$F_0 = (2n - 1)K(k), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Применяя второе условие (4), получим трансцендентное уравнение для определения зависимости собственного числа q от модуля эллиптических функций k и угла α

$$2k \operatorname{cn}(q + (2n - 1)K(k), k) + q \sin \alpha = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) является предельным случаем системы (5) при $h \rightarrow \infty$. Трансцендентное уравнение (12) не имеет точных аналитических решений, поэтому для нахождения спектра собственных значений $q_n(k)$, который в свою очередь определяет систему порогов внешней нагрузки, будем использовать численные методы. Найдем область изменения модуля эллиптических функций k . Для этого функцию $\text{cn}(q + K(k), k)$ разложим в ряд Тейлора при малом аргументе $q \rightarrow 0$

$$\text{cn}(q + K(k), k) \approx -\sqrt{1-k^2} q + \dots$$

Полученное выражение подставляем в трансцендентное уравнение (12)

$$-2k_0 \sqrt{1-k_0^2} q + q \sin \alpha = 0, \text{ или}$$

$$2k_0 \sqrt{1-k_0^2} = \sin \alpha.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$k_{01} = \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad k_{02} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда получим, что область значений модуля k при $q = 0$ имеет ограничения (рис. 6)

$$\sin(\alpha/2) \leq k \leq \cos(\alpha/2).$$

Случай $k = \sin(\alpha/2)$ будет соответствовать первоначальному неизогнутому положению двухзвеньевого стержневой системы в верхней полуплоскости, при нагрузке $P/P_c = 0$. А случай $k = \cos(\alpha/2)$ будет соответствовать предельному положению двухзвеньевого стержневой системы в нижней полуплоскости, после прощелкивания, при $P/P_c = 0$. В соответствии с численным решением уравнения (12) на рис. 6 приведем зависимость нагрузки P/P_c от модуля k и начального угла наклона стержня α .

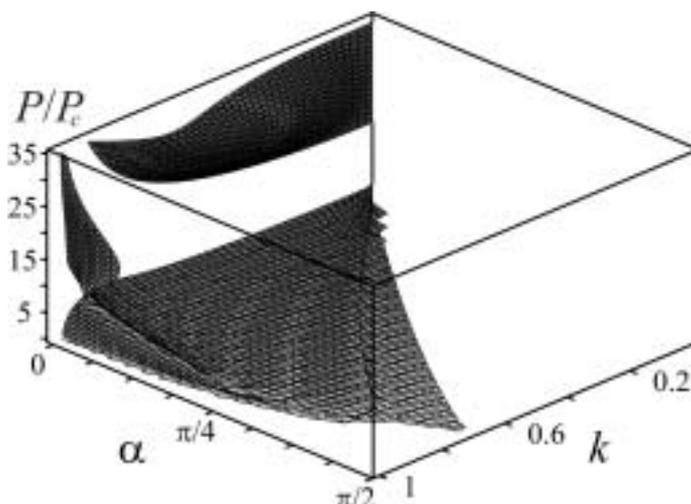


Рис. 6. Спектр собственных значений нелинейного уравнения равновесия для стержневой системы при шарнирном закреплении

На рис. 6 показаны две отдельные области, в которых одному значению модуля k соответствуют разные значения нагрузки P/P_c . Нижняя поверхность соответствует первому собственному числу – первой статической моде нагружения. Верхняя поверхность соответствует второму собственному числу – динамической моде нагружения.

Статический порог нагрузки для однородного стержня при $n = 1$ равен эйлеровой силе. Пороги при $n > 1$ были названы М.А. Лаврентьевым и А.Ю. Ишлинским динамическими порогами потери устойчивости, которые могут быть достигнуты при ударном приложении нагрузки [12], когда время нарастания импульса меньше времени релаксации системы. В данной работе проводятся исследования только для статической моды нагружения.

Форма изогнутой линии стержня в параметрическом виде определяется выражениями, следующими из (6), с учетом соотношения (11):

$$\frac{x}{L} = -\frac{2k}{q} \operatorname{cn}(u, k),$$

$$\frac{y}{L} = -t + \frac{2}{q} [E(\operatorname{am} u, k) - E(k)],$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. При этом значения F_0 определяются по формуле (11), а параметр k находится с помощью численного решения уравнения (12).

На рис. 7 изображен прогиб шарнирно закрепленной двухзвеньевой стержневой системы в точке приложения силы в зависимости от нагрузки P/P_c , полученный с помощью выражений (6) и численного решения уравнения (12).

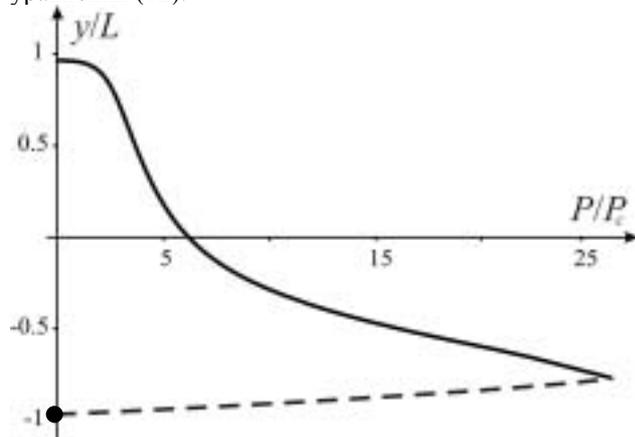


Рис. 7. Зависимость прогиба шарнирно закрепленной стержневой системы от нагрузки P/P_c для $\alpha = \pi/12$

На рис. 5 и рис. 7 так же, как и на рис. 4, точка, соответствующая максимальному значению нагрузки – точка бифуркации. Последующие значения прогиба тонкой гибкой двухзвеньевой стержневой системы, найденные точно аналитически и показанные пунктирной линией, не соответствуют устойчивым состояниям в реальных физических системах и требуют дальнейшего изучения. Предельный прогиб двухзвеньевой стержневой системы после прощелкивания в нижнюю полуплоскость отмечен на рис. 7 жирной точкой.

На рис. 5 и рис. 7 видно, что для острых начальных углов наклона стержня ($\alpha = \pi/12$), при увеличении нагрузки ($P/P_c \rightarrow \infty$) наступает состояние «насыщения» и обнаруживается механический гистерезис системы. Чтобы образовалась вторая часть петли гистерезиса, необходимо направить действующую силу в противоположную сторону, после того как произойдет прощелкивание. Для этого случая форма прогиба конструкции показана на рис. 3 в нижней полуплоскости, при нагрузке P_3 .

Заключение. Проведено исследование устойчивости симметричных форм прогиба гибкой двухзвеньевой стержневой системы при упругом, жестком и шарнирном закреплении в основании конструкции под действием поперечной сосредоточенной нагрузки в случае геометрической нелинейности задачи.

Найдены аналитические выражения для формы профиля изогнутой двухзвеньевой стержневой системы, записанные через эллиптические интегралы и функции Якоби. Эти решения являются более алгоритмичными, чем известные ранее, и зависят от одного внешнего параметра – модуля эллиптических функций, определяемого внешней действующей силой. Такое представление решений позволяет находить формы профиля изогнутой конструкции при любом числе точек перегиба и для любой моды решения.

Для случая острой двухзвеньевой стержневой системы, при жестком и шарнирном закреплении в основании конструкции, обнаружен механический гистерезис системы.

Рассмотренная составная стержневая система, подобная конструкции фермы Мизеса с упругим шарнирным закреплением, может позволить сопоставить эффекты прощелкивания в механической системе с эффектами, связанными с поведением водородных связей в кристаллах. Это требует отдельного исследования.

Полученные результаты можно использовать в качестве тестовых примеров при разработке численных методов решения нелинейных задач изгиба составных стержневых конструкций.

Авторы благодарят Л.И. Шкутина и Р.Г. Хлебопруса за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
3. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

4. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
5. Лебедев Л.П. К термодинамике и устойчивости фермы Мизеса / Л.П. Лебедев // Изв. АН СССР. – Механика тв. тела. – 1991. – №2. – С. 177–178.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
8. Шкутин Л.И. Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней / Л.И. Шкутин // ПМТФ. – 2001. – Т.42. – №2. – С. 141-147.
9. Захаров Ю.В. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин // ПМТФ. – 2002. – Т.43. – №5. – С. 124-131.
10. Захаров Ю.В. Эллиптические функции и задачи изгиба тонких стержней и пластин / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин // Вестник КрасГУ. – Красноярск: КрасГУ. – 2004. – №3. – С. 44-52.
11. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
12. Лаврентьев М.А. Динамические формы потери устойчивости упругих систем / М.А. Лаврентьев, А.Ю. Ишлинский // ДАН СССР. – 1949. – Т.64. – №6. – С. 779-782.

NONLINEAR BENDING OF THE TWO-LINKS GIRDER UNDER A TRANSVERSE LOAD

Yu.V. Zakharov, K.G. Okhotkin, V.V. Isakova

Symmetrical forms of an elastic two-links girder deflection under a transverse load have been investigated. The exact analytical solutions are written in parametric form and expressed in terms of elliptic functions and integrals. These solutions depend on a single parameter – modulus of elliptic functions, determined by the external load.