

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.95

РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С ПОМОЩЬЮ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ СЕЧЕНИЯ¹

А.А.Шлапунов *

Пусть X – C^∞ -многообразие размерности n и пусть $\{A_i, E_i\}$ – эллиптический дифференциальный комплекс на X , где E_i суть C -векторное расслоение над X ранга k_i , а A_i – дифференциальный оператор типа $E_i \rightarrow E_{i+1}$ порядка $m_i \geq 1$ на X . Пусть D – относительно компактная область в X с границей $\partial D \in C^\infty$ и $H^s(D, E_i)$ обозначает пространство Соболева, состоящее из сечений-распределений расслоения E_i , имеющих слабые производные в пространстве Лебега $L^2(X, E)$ до порядка $s \in \mathbb{N}$ включительно. Используя понятия касательной и нормальной составляющей сечений расслоения E_i относительно комплекса $\{A_i, E_i\}$, в работе строится разложение пространства Соболева в прямую сумму двух замкнутых подпространств, элементы которых и представляют касательную и нормальную составляющие соответственно. Аналогичные разложения построены и в пространствах распределений.

Введение

Задача Коши для эллиптических комплексов является естественным обобщением некорректной задачи Коши для эллиптических систем (см., например, [1], [2] и библиографию к ним). Ей было посвящено немало работ в XX столетии. Она тесно связана с такими важными проблемами анализа и дифференциальных уравнений, как изучение условий ацикличности эллиптических комплексов, описание двойственностей для пространств решений дифференциальных уравнений и др.

Как известно, различные постановки задачи Коши для комплексов требуют изучения свойств так называемых касательной и нормальной составляющих сечений относительно комплекса в разных классах функций. В настоящей работе решается один технический вопрос о разложении пространств Соболева в сумму подпространств, элементы которых и представляют касательную и нормальную составляющие соответственно. Аналогичные разложения построены и в пространствах распределений.

1 Касательная и нормальная составляющие сечения

Пусть X – C^∞ -многообразие размерности n и пусть $\{A_i, E_i\}$ – эллиптический дифференциальный комплекс на X , где E_i суть C -векторное расслоение над X ранга k_i , а A_i – дифференциальный оператор типа $E_i \rightarrow E_{i+1}$ порядка $m_i \geq 1$ на X .

Далее, пусть E_i^* – дуальное расслоение E_i и пусть $(\cdot, \cdot)_{x,i}$ – эрмитова метрика в слоях E_i . Тогда отображение $*_{E_i} : E_i \rightarrow E_i^*$ определено равенством $\langle *_{E_i} v, u \rangle_{x,i} = (u, v)_{x,i}$ (где u, v – сечения расслоения E_i , а $\langle v, u \rangle_{x,i}$ – естественное спаривание $E_i^* \otimes E_i \rightarrow \mathbb{C}$, которое локально задается как $\sum_{j=1}^k v_j(x) u_j(x)$).

Пусть $\text{Diff}_{m_i}(E_i \rightarrow E_{i+1})$ будет векторное пространство линейных дифференциальных операторов (с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами), порядок которых не превосходит m_i , между расслоениями E_i и E_{i+1} . Обозначим через ${}^t A_i \in \text{Diff}_{m_i}(E_{i+1}^* \rightarrow E_i^*)$ (или через A'_i , когда это более удобно) транспонированный оператор, а через $A_i^* = (*_E^{-1} A'_i *_{E_{i+1}}) \in \text{Diff}_{m_i}(E_{i+1} \rightarrow E_i)$ – (формально) сопряженный оператор для $A \in \text{Diff}_{m_i}(E_i \rightarrow E_{i+1})$.

Предположим, что порядки операторов A_i и A_{i-1} совпадают и равны m . Так как комплекс $\{A_i, E_i\}$ эллиптивен, то при этом условии (главный) символ оператора $\mathfrak{A}_i = A_i + A_{i-1}^* \in \text{Diff}_m(E_i \rightarrow E_{i+1} \oplus E_{i-1})$ инъективен, а значит, лапласиан $\Delta_i = A_i^* A_i + A_{i-1} A_{i-1}^* \in \text{Diff}_{2m}(E_i \rightarrow E_i)$ (сильно) эллиптивен.

Пусть Λ^r будет расслоение комплекснозначных внешних дифференциальных форм степени r ($r = 0, 1, \dots$) на X , а dx – обычная форма объема X .

¹Работа выполнена при поддержке Красноярского краевого фонда науки, грант 12F0063C.

* ©А.А. Шлапунов, Красноярский государственный университет, e-mail: shlapuno@lan.krasu.ru, 2005.

Пусть D – относительно компактная область в X с границей $\partial D \in C^\infty$. Обозначим через $L^2(D, E_i)$ пространство Лебега сечений расслоения E_i над D со скалярным произведением $\int_D (u, v)_{x,i} dx$, а через $H^s(D, E_i)$ обозначим соответствующее пространство Соболева, состоящее из распределений сечений расслоения E_i , имеющих слабые производные в пространстве Лебега $L^2(D, E)$ до порядка $s \in \mathbb{N}$ включительно. Обозначим также через $H_0^s(D, E_i)$ замыкание в пространстве $H^s(D, E_i)$ гладких сечений с компактным носителем в D .

Обозначим через $G_{A_i}(\cdot, \cdot)$ оператор Грина для дифференциального оператора A_i , т.е. такой дифференциальный оператор типа $(E_{i+1}^*, E_i) \rightarrow \Lambda^{n-1}$ и порядка $m-1$, что

$$dG_{A_i}(g, v) = \langle g, Av_i \rangle_x dx - \langle A'_i g, v \rangle_x dx$$

для всех $g \in C^\infty(E_{i+1}^*)$, $v \in C^\infty(E_i)$.

Как отмечается, например, в [1, предложение 9.4], для $A \in \text{Diff}_m(E \rightarrow E_1)$ всегда существует оператор Грина.

Если пространство $\mathfrak{C}(D, E_i)$ содержится в $H^{m_i}(D, E_i)$, то говорят, что данные Коши $\tau_i(u)$ сечения $u \in \mathfrak{C}(D, E_i)$ относительно оператора A_i равны нулю на ∂D , если

$$\int_{\partial D} G_{A_i}(v, u) = 0$$

для всех $v \in C_0^\infty(X, E_{i+1}^*)$. Множество элементов пространства $\mathfrak{C}(D, E_i)$ с нулевыми данными Коши на ∂D относительно $\{A_i, E_i\}$ обозначим через $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}(D, E_i), \tau)$. Элементы фактор-пространства $\mathcal{C}(\mathfrak{C}(D, E_i), \tau) = \frac{\mathfrak{C}(D, E_i)}{\mathfrak{F}(\mathfrak{C}(D, E_i), \tau)}$ естественно трактовать как данные Коши τ_i на Γ для A_i над пространством $\mathfrak{C}(D, E_i)$ (ср. [1]). Аналогичные обозначения и понятия введем и для комплекса $\{A_i^*, E_i\}$, формально сопряженного комплексу $\{A_i, E_i\}$. При этом данные Коши $\tau_{i-1}^{(*)}(u)$ сечения $u \in \mathfrak{C}(D, E_i)$ относительно оператора A_{i-1}^* будем обозначать через $\nu_i(u)$. Составляющие $\tau(u)$ и $\nu(u)$ часто называют касательной и нормальной частью сечения $u \in \mathfrak{C}(D, E_i)$ (ср. [1, с. 105] для комплексов первого порядка и [1, с. 117–121] для произвольных комплексов над пространствами гладких функций). Для комплекса Де Рама касательная и нормальная составляющие сечения расслоения E_i суть касательная и нормальная части дифференциальной формы степени i соответственно. Аналогично, для комплекса Дольбо касательная и нормальная составляющие сечения расслоения E_i суть комплексные касательная и нормальная части дифференциальной формы бистепени (p, i) соответственно (см. [3]).

Пусть $\text{PsDiff}_{m_i}(E_i \rightarrow E_{i+1})$ будет векторное пространство линейных псевдодифференциальных операторов, порядок которых не превосходит m_i , между расслоениями E_i и E_{i+1} . Пусть $\Phi_i \in \text{PsDiff}_{-2m}(E_i \rightarrow E_i)$ – параметрикс для оператора Δ_i , т.е. такой оператор, для которого

$$\Delta_i \Phi_i = I - S_R^{(i)} \text{ на } C_0^\infty(X),$$

$$\Phi_i \Delta_i = I - S_L^{(i)} \text{ на } C_0^\infty(X),$$

с некоторыми сглаживающими операторами $S_{R,i}, S_{L,i} \in \text{PsDiff}_{-\infty}$. Кроме того, дополнительно предположим, что Φ_i обладает свойством трансмиссии (как показывают [2, пример 2.4.9, следствие 2.2.12], параметрикс с такими свойствами всегда существует в нашей ситуации). Согласно [2, следствие 2.2.16], $\Phi_i : \mathcal{D}(X, E_i) \rightarrow \mathcal{D}'(X, E_i)$ продолжается до непрерывного отображения $\Phi_i : \mathcal{E}'(X, E_i) \rightarrow \mathcal{D}'(X, E_i)$. Для классических комплексов Де Рама и Дольбо в качестве Φ_i можно взять стандартное фундаментальное решение оператора Лапласа, умноженное на единичную матрицу соответственной размерности.

Для заданного сечения $g \in \mathcal{E}'(X, E_i)$ положим

$$(T^{(i)}g)(x) = \Phi_i \mathfrak{A}_i g \quad (1)$$

для $x \in X \setminus \partial D$. Выражения такого типа будем называть объемными потенциалами.

Для $g \in L^2(D, E_{i+1})$ распределение $T^{(i)}g$ в формуле (1) превращается в "интеграл"

$$(T_D^{(i)}g)(x) = \Phi_i \mathfrak{A}_i \chi_D g = \int_D \langle K_{\Phi_i \mathfrak{A}_i}(x, y), g(y) \rangle_y dy. \quad (2)$$

Хотя "интеграл" в правой части (2) суть формальный символ, его иногда можно понимать как абсолютно сходящийся несобственный интеграл. Пользуясь теоремой об ограниченности псевдодифференциальных

операторов (см., например, [2, §§2.4.3-2.4.8]), заключаем, что интеграл (2) определяет ограниченный линейный оператор $T_D^{(i)} : L^2(D, E_{i+1}) \rightarrow H^m(D, E_i)$.

Обозначим через $E_i \boxtimes E_{i+1}$ внешнее тензорное произведение расслоений E_i и E_{i+1} (т.е. дифференцируемое $\mathbb{C}$ -векторное расслоение над $X \times X$, слой которого над точкой (x, y) суть $(E_i)_x \otimes (E_{i+1})_y$, а матрицы перехода есть тензорные произведения матриц перехода для E_i и E_{i+1}). Сечения $K_L(x, y) \in \mathcal{D}'(E_i \boxtimes E_{i+1}^*)$ называются ядрами типа $E_{i+1} \rightarrow E_i$ на $X \times X$. Каждое такое ядро определяет непрерывный линейный оператор $L : \mathcal{D}(E_{i+1}) \rightarrow \mathcal{D}'(E_i)$.

Для заданного дифференциального оператора $A \in \text{Diff}_m(E \rightarrow E_1)$ и заданной ориентированной гиперповерхности $\Gamma \subset X$ обозначим через $[\Gamma]^A$ ядро над $X \times X$, определенное равенством

$$\langle [\Gamma]^A, g \otimes u \rangle_{X \times X} = \int_{\Gamma} G_A(g, u)$$

для всех $g \in C^\infty(E_1^*)$ и $u \in C^\infty(E)$, носители которых пересекаются по компактному множеству. Носитель ядра $[\Gamma]^A$ сосредоточен на гиперповерхности Γ (см., например, [1, с. 83]).

Для заданного сечения $u \in H^m(D, E_i)$ положим:

$$(\mathcal{G}^{(i,1)}u)(x) = -(\Phi_i A_i) ([\partial D]^{A_i} u) = - \int_{\partial D} G_{A_i}(K_{\Phi_i A_i}(x, y), u(y)), \quad x \in X \setminus \partial D, \quad (3)$$

$$(\mathcal{G}^{(i,2)}u)(x) = -(\Phi_i A_{i-1}^*) ([\partial D]^{A_{i-1}^*} u) = - \int_{\partial D} G_{A_{i-1}^*}(K_{\Phi_i A_{i-1}^*}(x, y), u(y)), \quad x \in X \setminus \partial D. \quad (4)$$

Как известно, интегралы $\mathcal{G}^{(i,\cdot)}$ определяют ограниченные линейные операторы

$$\mathcal{G}^{(i,\cdot)} : H^m(D, E_i) \rightarrow H^m(D, E_i),$$

(см., например, [2, §§2.4.3-2.4.8]).

Для комплекса Дольбо, взяв в качестве Φ_i стандартное фундаментальное решение оператора Лапласа, умноженное на единичную матрицу соответственной размерности, получим, что потенциалы $\mathcal{T}_D^{(i)}$ и $\mathcal{G}^{(i,\cdot)}$ есть ничто иное, как слагаемые формуле Мартинелли-Бохнера-Кошпельмана (см. [3]).

2 Разложение в пространствах Соболева

Обозначим теперь через $S^{m_i}(\Delta_i, D)$ множество слабых решений оператора Δ_i в области D , принадлежащих пространству $H^{m_i}(D, E_i)$.

Кроме того, зафиксируем какие-нибудь векторные расслоения $E_i^{(j)}$, $j = 0, 1 \dots m_i - 1$, над окрестностью U множества ∂D в X и обозначим через $H^{m_i-j-1/2}(\partial D, E_i^{(j)})$ те пространства Соболева, которые определены с помощью стандартной процедуры интерполяции (ср., например, [2]).

Теорема 1 Пусть порядки операторов A_i и A_{i-1} совпадают и равны m . Если оператор Δ_i удовлетворяет условию единственности в малом в некоторой окрестности $\overline{D}$, то

$$\begin{aligned} H^m(D, E_i) &\cong H_0^m(D, E_i) \oplus \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \tau) \oplus \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \nu), \\ \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial D, E_i^{(j)}) &\cong \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \tau) \oplus \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \nu), \end{aligned} \quad (5)$$

а соответствующие "проекторы" непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству [1, следствие 13.15]. Ключевую роль в нем играет лемма о скачке потенциалов двойного и простого слоя ([1, теорема 13.14]).

Обозначим теперь через $\mathfrak{P}_i^{(D)}$ интеграл Пуассона задачи Дирихле для оператора Δ_i в области D , $\mathfrak{P}_i^{(D)} : \oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial D, E_i^{(j)}) \rightarrow S^m(\Delta_i, D)$ (см., например, [4, теорема 4.1 и леммы 4.3, с. 142-143]). Тогда согласно [1, теорема 13.14] для всякого сечения $u \in H^m(D, E_i)$ справедливо, что $u = U_1 + U_2 + U_3$, где

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathfrak{P}_i^{(D)} [t_i(\mathcal{G}^{(i,1)}u)^- - \mathfrak{P}_i^{(D)} [t_i(\mathcal{G}^{(i,1)}u)^+] \in \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \nu), \\ U_2 &= \mathfrak{P}_i^{(D)} [t_i(\mathcal{G}^{(i,2)}u)^- - \mathfrak{P}_i^{(D)} [t_i(\mathcal{G}^{(i,2)}u)^+] \in \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \tau), \end{aligned}$$

$$U_3 = \mathfrak{P}_i^{(D)} t_i(\mathcal{T}_D^{(i)} \mathfrak{A}_i u + S_L^{(i)} u)^- - \mathfrak{P}_i^{(D)} t_i(\mathcal{T}_D^{(i)} \mathfrak{A}_i u)^+ + S_i^{(i)} u \in \mathring{H}^m(D, E_i).$$

А формула (5) следует из того факта, что

$$\oplus_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial D, E_i^{(j)}) \cong \frac{H^m(D, E_i)}{\mathring{H}^m(D, E_i)}$$

(см., например, [2]).

Ясно, что $\tau \circ \nu = 0$, $\tau \circ \nu = 0$. Кроме того, так как задача Дирихле для сильно эллиптических операторов фредгольмова в пространствах Соболева (см., например, [4]), то "проекторы"

$$\tau : H^m(D, E_i) \rightarrow \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \nu),$$

$$\nu : H^m(D, E_i) \rightarrow \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \tau)$$

непрерывны как операторы в $H^m(D, E_i)$, если рассматривать

$$\mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \nu), \quad \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \tau)$$

как замкнутые подпространства в $H^m(D, E_i)$. □

3 Разложение в пространствах решений конечного порядка роста

Обозначим через $S_F(\Delta_i, D)$ множество слабых решений оператора Δ_i в области D , имеющих конечный порядок роста вблизи ∂D (см., например, [2]).

Как мы уже отмечали, если комплекс $\{A_i, E_i\}$ состоит из операторов одного и того же порядка, то лапласианы Δ_i эллиптичны и $\Delta_{i+1} A_i = A_i \Delta_i$, $\Delta_{i-1} A_{i-1}^* = A_{i-1}^* \Delta_i$. Поэтому мы имеем комплексы:

$$0 \longrightarrow S_F(\Delta_0, D) \xrightarrow{A_0} S_F(\Delta_1, D) \xrightarrow{A_1} \dots \xrightarrow{A_N} S_F(\Delta_{N+1}, D) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longleftarrow S_F(\Delta_0, D) \xleftarrow{A_0^*} S_F(\Delta_1, D) \xleftarrow{A_1^*} \dots \xleftarrow{A_N^*} S_F(\Delta_{N+1}, D) \longleftarrow 0.$$

Будем говорить, что данные Коши $\tau_i(u)$ сечения $u \in H_{loc}^m(D, E_i)$ относительно оператора A_i равны нулю на ∂D , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i}(v, u) = 0$$

для всех $v \in \mathcal{D}(X, E_{i+1}^*)$ (ср. §2).

Аналогично, будем говорить, что данные Коши $\nu_i(u)$ сечения $u \in H_{loc}^m(D, E_i)$ относительно оператора A_{i-1}^* равны нулю на Γ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_{i-1}^*}(w, u) = 0$$

для всех $w \in \mathcal{D}(X, E_{i-1}^*)$.

Лемма 1 Пусть порядки операторов A_i и A_{i-1} совпадают и равны m . Для всякого сечения $u \in S_F(\Delta_i, D)$ и для всех $w \in \mathcal{D}(X, E_{i+1}^*)$, $v \in \mathcal{D}(X, E_{i-1}^*)$ существуют (конечные) пределы:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i}(w, u), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_{i-1}^*}(v, u).$$

Доказательство. Зафиксируем какие-нибудь системы Дирихле $t_i = \{B_j^{(i)}\}_{j=0}^{m-1}$ порядка $(m-1)$ на ∂D , представляющие данные Коши для $\mathfrak{A}_i$. Тогда, согласно результатам [2, §9.4], существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j^{(i)} W, B_j^{(i)} u \rangle_x ds(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{\mathfrak{A}_i}(W, u)$$

для всех $W \in \mathcal{D}(X, E_{i+1}^* \otimes E_{i-1}^*)$.

В частности, для всех $w \in \mathcal{D}(X, E_{i+1}^*)$, сечение $W = (w, 0)$ принадлежит $\mathcal{D}(X, E_{i+1}^* \otimes E_{i-1}^*)$ и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{\mathfrak{A}_i}(W, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i}(w, u).$$

Существование второго доказывается аналогично, что и требовалось. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \tau)$ множество элементов в $S_F(\Delta_i, D)$ с нулевыми данными Коши относительно A_i на ∂ . Если оператор Δ_i удовлетворяет условию единственности в малом в некоторой окрестности $\overline{D}$, то, как известно (см., например, [5, теорема 2.32]),

$$S_F(\Delta_i, D) \cong \oplus_{j=0}^{m-1} \mathcal{D}'(\partial D, E_i^{(j)}), \quad (6)$$

причем этот изоморфизм является топологическим. В частности, это означает, что подпространство $\mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \tau)$ замкнуто в $S_F(\Delta_i, D)$.

Более того, формула (6) подсказывает, что элементы фактор-пространства

$$\mathfrak{C}(S_F(\Delta_i, D), \tau) = \frac{S_F(\Delta_i, D)}{\mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \tau)}$$

естественно трактовать как данные Коши на Γ относительно A_i для элементов пространства $S_F(\Delta_i, D)$.

Теорема 2 Пусть порядки операторов A_i и A_{i-1} совпадают и равны m , а оператор Δ_i удовлетворяет условию единственности в малом в некоторой окрестности $\overline{D}$. Тогда

$$S_F(\Delta_i, D) \cong \mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \tau) \oplus \mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \nu),$$

$$\oplus_{j=0}^{m-1} \mathcal{D}'(\partial D, E_i^{(j)}) \cong \mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \tau) \oplus \mathfrak{F}(S_F(\Delta_i, D), \nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 1. При этом вместо потенциалов (3), (4) нужно использовать следующие потенциалы:

$$(\mathcal{G}^{(i,1)}u)(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i}(K_{\Phi_i A_i^*}(x, y), u(y)), \quad x \in X \setminus \partial D, \quad (7)$$

$$(\mathcal{G}^{(i,2)}u)(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_{i-1}^*}(K_{\Phi_i A_{i-1}^*}(x, y), u(y)), \quad x \in X \setminus \partial D. \quad (8)$$

Как известно, интегралы $\mathcal{G}^{(i,\cdot)}$ определяют ограниченные линейные операторы

$$\mathcal{G}^{(i,\cdot)} : S_F(\Delta_i, D) \rightarrow S_F(\Delta_i, D),$$

(см., например, [6]). Вместо интеграла Пуассона в пространствах Соболева нужно использовать интеграл Пуассона в пространствах распределений (см., например, [5, следствие 2.31]). $\square$

Список литературы

- [1] Тарханов Н.Н. Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов / Н.Н. Тарханов. – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.
- [2] TARKHANOV N.N. *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations* / N.N. Tarkhanov. – Berlin: Akademie-Verlag, 1995. – 478 pp.
- [3] АЙЗЕНБЕРГ Л.А. *Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства* / Л.А. Айзенберг, Ш.А. Даутов. – Новосибирск: Наука, 1975. – 114 с.
- [4] SCHULZE B.-W. *Green integrals on manifolds with cracks* / B.-W. Schulze, A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov // *Annals of Global Analysis and Geometry*. – 2003. – Vol. 24. – P. 131–160.
- [5] SHLAPUNOV A.A. *Duality by reproducing kernels* / A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov // *International Jour. of Math. and Math. Sc.* – 2003. – V. 2003, N. 6. – P. 327–395.

- [6] SHLAPUNOV A.A. *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols* / A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov // Proc. London Math. Soc. – 1995. – V. 71, N. 3. – P. 1–52.

DECOMPOSITION IN SOBOLEV SPACES WITH THE USE OF TANGENTIAL AND NORMAL PART OF SECTION

A.A. Shlapunov

Let X be a C^∞ -manifold of dimension n and let $\{A_i, E_i\}$ be an elliptic differential complex on X , where E_i are C -vector bundle of rang k_i over X and A_i are differential operators of type $E_i \rightarrow E_{i+1}$ and order $m_i \geq 1$ on X . Let D be relatively compact domain in X with boundary $\partial D \in C^\infty$ and $H^s(D, E_i)$ be Sobolev space of distribution sections of the bundle E_i with weak derivatives up to order $s \in \mathbb{N}$ from the Lebesgue space $L^2(X, E)$. Using notions of tangential and normal part of sections of the bundle E_i with respect to the complex $\{A_i, E_i\}$ we construct a decomposition of the Sobolev space into a direct sum of two closed subspaces; elements of these subspaces represent the normal and tangential parts respectively. Also we obtain similar decomposition in spaces of distributions.