ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12: 531.51

МОДЕЛЬ ЗАРЯЖЕННОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО ЖИДКОГО ШАРА

А.М.Баранов, З.В.Власов*

В рамках общей теории относительности рассматривается модельный подход к описанию сферически симметричных статических жидких гравитирующих шаров, обладающих электрическим зарядом. Метрический интервал записывается в координатах Бонди, тензор энергии-импульса выбирается как сумма тензора энергии-импульса идеальной паскалевой жидкости нейтральной материи и тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Получено точное решение уравнений Эйнштейна-Максвелла, обобщающее аналогичное решение с параболическим распределением плотности массы.

Проблема нахождения точных решений уравнений Эйнштейна в рамках общей теории относительности не теряет актуальности по сей день. Особый интерес, несмотря на некоторую экзотичность, представляют модели электрически заряженных звезд, поскольку электрический заряд — одна из немногих величин, не исчезающая при коллапсе звезды. Основные трудности расчета подобных моделей заключены в нелинейности системы уравнений Эйнштейна, их недостаточности для описания системы. Другая трудность связана с решением самосогласованной системы уравнений Эйнштейна-Максвелла. Подобный подход реализован в [1], где найдено точное решение для заряженной паскалевой идеальной жидкости с параболическим распределением плотности массы нейтральной компоненты жидкости, но без введения конкретного уравнения состояния.

В данной работе рассматривается обобщение этой модели, связанное с изменением закона распределения плотности массы нейтральной жидкости. Оказывается, что для другого поведения плотности массы и нового распределения плотности заряда, "растворенного"в жидкости, можно получить точное статическое сферически симметричное внутреннее решение. При этом внешнее гравитационное поле должно описываться решением Райснера-Нордстрема (см., например, [2]) как обобщение решения Шварцшильда для заряженного сферически-симметричного тела.

Предполагается, что модель статическая, т.е. метрические функции не зависят от временной переменной, и обладает сферической симметрией, что снимает зависимость от угловых переменных. Модель рассматривается без вращения и излучения.

1. Основные математические соотношения

Для записи метрического интервала выбраны радиационные координаты Бонди

$$ds^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)dtdr - r^2(d\theta^2 + sin\theta^2 d\varphi^2), \tag{1}$$

где величины $F = F(r)$ и $L = L(r)$ суть метрические функции радиальной переменной r; t — временная координата; θ и φ — угловые переменные; скорость света здесь выбрана равной единице, так же как и ньютоновская гравитационная постоянная $G_N = 1$. Определитель ковариантного метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, отвечающий выражению (1), равен $det(g_{\alpha\beta}) \equiv g = -L^2 r^4 sin^2\theta$.

Исходя из заданной метрики (1), введем следующие тетрады (ортонормированный 4-базис в касательном пространстве времени):

$$g_{(0)\mu} = \delta^0_\mu; \quad g_{(1)\mu} = L\delta^1_\mu + \frac{1}{2}F\ \delta^0_\mu; \tag{2}$$

$$g_{(2)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu + i\,sin\theta\ \delta^3_\mu); \quad g_{(3)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu - i\,sin\theta\ \delta^3_\mu); \tag{3}$$

$$g^\mu_{(0)} = L^{-1}\ \delta^\mu_1; \quad g^\mu_{(1)} = \delta^\mu_0 + \frac{1}{2}FL^{-1}\ \delta^\mu_1; \tag{4}$$

*© А.М.Баранов, Красноярский государственный университет, e-mail: bam@lan.krasu.ru; З.В.Власов, Красноярский государственный университет, e-mail: raven_z@freemail.ru., 2005.

$$g^{\mu}_{(2)} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta^{\mu}_{2} + \frac{i}{sin\theta}\ \delta^{\mu}_{3}); \quad g^{\mu}_{(3)} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta^{\mu}_{2} - \frac{i}{sin\theta}\ \delta^{\mu}_{3}), \tag{5}$$

где i — мнимая единица, а греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$.

Определим базисные дифференциальные 1-формы с помощью этих тетрад как свертку

$$\Theta^{(\alpha)} = g^{(\alpha)}_{\mu} dx^{\mu}, \tag{6}$$

или, расписывая по компонентам, получим:

$$\Theta^{(0)} = \frac{1}{2}Fdt + Ldr; \quad \Theta^{(1)} = dt; \tag{7}$$

$$\Theta^{(2)} = \frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta - i\ sin\theta\ d\varphi); \quad \Theta^{(3)} = \frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta + i\ sin\theta\ d\varphi). \tag{8}$$

Тогда квадрат интервала в касательном пространстве примет вид

$$ds^2 = g_{(\alpha)(\beta)}\Theta^{(\alpha)}\Theta^{(\beta)}, \tag{9}$$

где $g_{(\alpha)(\beta)}$ — тетрадная метрика, которая в матричном представлении записывается как

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g^{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Первые уравнения структуры Картана

$$\mathbf{d}\,\Theta^{(\alpha)} = -\omega^{(\alpha)}{}_{(\beta)} \wedge \Theta^{(\beta)}, \tag{11}$$

где $\mathbf{d}$ — внешний дифференциал, а операция $\wedge$ обозначает внешнее произведение, позволяют находить отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности:

$$\omega_{(1)(0)} = \frac{1}{2}F'L^{-1}\Theta^{(1)}; \quad \omega_{(0)(2)} = (Lr)^{-1}\Theta^{(3)}; \tag{12}$$

$$\omega_{(0)(3)} = (Lr)^{-1}\Theta^{(2)}; \quad \omega_{(1)(2)} = -\frac{1}{2}F(Lr)^{-1}\Theta^{(3)}; \tag{13}$$

$$\omega_{(1)(3)} = -\frac{1}{2}F(Lr)^{-1}\Theta^{(2)}; \quad \omega_{(3)(2)} = \frac{1}{r\sqrt{2}}cot\theta(\Theta^{(2)} - \Theta^{(3)}), \tag{14}$$

штрихом обозначена производная по радиальной переменной r.

Вообще говоря, для произвольной тетрадной метрики справедливо соотношение $\mathbf{d}\,g_{(\alpha)(\beta)} = \omega_{(\alpha)(\beta)} + \omega_{(\beta)(\alpha)}$, левая часть которого в рассматриваемом случае из-за постоянства тетрадной метрики (10) равна нулю, т.е. 1-формы связности обладают свойством антисимметричности

$$\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\beta)(\alpha)}, \tag{15}$$

позволяющим уменьшить число независимых 1-форм связности.

Далее воспользуемся вторыми уравнениями структуры Картана:

$$\Omega^{(\alpha)}{}_{(\beta)} = \frac{1}{2}R^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\delta)}\Theta^{(\gamma)} \wedge \Theta^{(\delta)} = \mathbf{d}\,\omega^{(\alpha)}{}_{(\beta)} + \omega^{(\alpha)}{}_{(\sigma)} \wedge \omega^{(\sigma)}{}_{(\beta)}, \tag{16}$$

где $\Omega_{(\alpha)(\beta)} = -\Omega_{(\alpha)(\beta)}$ — 2-форма кривизны; $R^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\delta)}$ — тензор кривизны Римана-Кристоффеля в тетрадных обозначениях, отличные от нуля компоненты которого находятся из (16) и равны:

$$R_{(1)(0)(1)(0)} = -\frac{F''}{2L^2} + \frac{F'L'}{2L^3}; \quad R_{(1)(2)(1)(2)} = -\frac{F^2L'}{4rL^3}; \tag{17}$$

$$R_{(0)(2)(0)(3)} = -\frac{L'}{rL^3}; \quad R_{(0)(2)(1)(3)} = \frac{FL'}{2rL^3} - \frac{F'}{2rL^2}; \tag{18}$$

$$R_{(3)(2)(3)(2)} = \frac{1}{r^2} - \frac{F}{r^2L^2}; \quad R_{(0)(3)(1)(2)} = R_{(0)(2)(1)(3)}. \tag{19}$$

Согласно определению тензора Риччи, $R_{(\alpha)(\beta)} = R^{(\gamma)}{}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)} = g^{(\gamma)(\sigma)}R_{(\sigma)(\alpha)(\beta)(\gamma)}$, запишем его ненулевые тетрадные компоненты:

$$R_{(0)(0)} = -\frac{2}{rL^2}\frac{L'}{L}; \quad R_{(0)(1)} = \frac{FL'}{rL^3} - \frac{F''}{2L^2} + \frac{F'L'}{2L^3} - \frac{F'}{rL^2}; \tag{20}$$

$$R_{(1)(1)} = -\frac{F^2}{2rL^2}\frac{L'}{L}; \quad R_{(2)(3)} = -\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{F}{L^2} - \frac{rF'}{L^2} + \frac{rF}{L^2}\frac{L'}{L}\right). \tag{21}$$

2. Уравнения Эйнштейна-Максвелла для заряженной идеальной жидкости

Уравнения Эйнштейна в тетрадных обозначениях с источником в форме тензора энергии-импульса (ТЭИ) записывают в виде

$$G_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}R = -æT_{(\alpha)(\beta)}, \tag{22}$$

где $G_{(\alpha)(\beta)}$ — тензор Эйнштейна; $R_{(\alpha)(\beta)}$ — тензор Риччи; $R = R^{(\alpha)}{}_{(\alpha)}$ — скалярная кривизна; $æ = 8\pi$ — постоянная Эйнштейна в выбранной нами системе единиц. Результирующий ТЭИ материи $T_{(\alpha)(\beta)}$ взят в виде прямой суммы ТЭИ идеальной паскалевой жидкости нейтральной материи и ТЭИ электромагнитного поля:

$$T_{(\alpha)(\beta)} = T^{fluid}_{(\alpha)(\beta)} + T^{el-mag}_{(\alpha)(\beta)}, \tag{23}$$

где

$$T^{fluid}_{(\alpha)(\beta)} = (\mu + p)u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - pg_{(\alpha)(\beta)} \equiv \mu u_{(\alpha)}u_{(\beta)} + pb_{(\alpha)(\beta)}; \tag{24}$$

$$T^{el-mag}_{(\alpha)(\beta)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{(\alpha)(\sigma)}F^{(\sigma)}_{(\beta)} + \frac{1}{4}g_{(\alpha)(\beta)}F_{(\sigma)(\tau)}F^{(\sigma)(\tau)}\right); \tag{25}$$

$\mu(r)$ — плотность массы-энергии; $p(r)$ — давление идеальной паскалевой жидкости; $u_{(\alpha)} = g_{(\alpha)\mu}\dfrac{dx^\mu}{ds}$ — 4-скорость в тетрадных обозначениях; $b_{(\alpha)(\beta)} = u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - g_{(\alpha)(\beta)}$ — 3-проектор на пространственноподобную гиперповерхность (или 3-метрика), ортогональный 4-скорости, $b_{(\alpha)(\beta)}u^{(\alpha)} = 0$; $F_{(\alpha)(\beta)}$ — тензор электромагнитного поля, причем $F_{(\alpha)(\beta)} = -F_{(\alpha)(\beta)}$; все функции зависят только от радиальной переменной.

Воспользовавшись тем, что из гравитационных уравнений можно легко получить связь между скалярной кривизной и следом тензора энергии-импульса $R = æT$, перепишем уравнения Эйнштейна (22) в виде, позволяющем использовать свойства тензора энергии-импульса:

$$R_{(\alpha)(\beta)} = -æ\left(T_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}T\right). \tag{26}$$

Тогда эта система уравнений с учетом сферической симметрии задачи эквивалентна следующим четырем уравнениям, записанным относительно безразмерной радиальной переменной $x = r/R_0$, изменяющейся от нуля до единицы (R_0 — внешний радиус шара):

$$\frac{2}{xL^2}(\ln L)' = \chi T_{(0)(0)}; \tag{27}$$

$$\frac{F^2}{2xL^2}(\ln L)' = \chi T_{(1)(1)}; \tag{28}$$

$$\frac{F}{xL^2}(\ln L)' - \frac{1}{2L^2}\left(F'' + \frac{2}{x}F' - F'(\ln L)'\right) = -\chi\left(T_{(0)(1)} - \frac{1}{2}T\right); \tag{29}$$

$$\frac{1}{x^2}\left(-1 + \frac{F}{L^2} + \frac{xF'}{L^2} - x\frac{F}{L^2}(\ln L)'\right) = -\chi\left(T_{(2)(3)} + \frac{1}{2}T\right), \tag{30}$$

где все производные берутся относительно переменной x и $\dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{\partial}{R_0 \partial x}$, а новая постоянная $\chi = æR_0^2 = 8\pi R_0^2$.

Теперь дополним полученную систему (27)-(30) уравнениями Максвелла. Вторая пара уравнений Максвелла при учете поля тяготения и заряженной среды запишется как

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu} = -4\pi\, j^\mu, \tag{31}$$

где j^μ— плотность электрического тока, а точка с запятой обозначает ковариантную производную. Тензор электромагнитного поля определен обычным образом через альтернацию производных 4-потенциала A_μ как $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Здесь отличной от нуля будет лишь одна компонента тензора электромагнитного поля $F_{01} = -A_{0,1} = -R_0\, A_0'$ и от системы уравнений Максвелла, принимая во внимание выражение для определителя ковариантной метрики, останется одно уравнение:

$$\frac{1}{x^2 L}(x^2 L F^{01})' = -4\pi\, R_0\, j^0. \tag{32}$$

Введем неподвижную сопутствующую систему отсчета, задаваемую 4-вектором скорости, компоненты которого в статическом случае равны

$$u^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}} \equiv \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{F(r)}}; \quad u_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}} \equiv \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{F(r)}}. \tag{33}$$

Физически наблюдаемые величины соответственно запишутся в следующем виде:

$$\mu_{phys} = T^{fluid}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \mu(x); \quad \rho_{phys} \equiv \rho(x) = j^\mu u_\mu = j^0 \sqrt{g_{00}} \equiv j^0 \sqrt{F(x)}; \tag{34}$$

$$E^{phys}_\nu = -F_{\nu\mu} u^\mu = -F_{\nu\mu}\frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{F_{0\nu}}{\sqrt{F(x)}}; \quad E_{phys} \equiv E_1 = \frac{F_{01}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{E}{\sqrt{F(x)}}; \tag{35}$$

$$W_{el} = T^{el-mag}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{E^2}{8\pi L^2}, \tag{36}$$

где μ_{phys} — наблюдаемая плотность массы-энергии; ρ_{phys} — наблюдаемая плотность электрического заряда; E^{phys}_ν — физически наблюдаемый 3-вектор напряженности электрического поля; $E_{phys} \equiv E_1$ — радиальная компонента наблюдаемой напряженности электрического поля; W_{el} — наблюдаемая плотность энергии электрического поля.

Тогда уравнение Максвелла (32)переписывается в виде, пригодном для дальнейшего применения:

$$\left(\frac{x^2 E}{L}\right)' = 4\pi\rho(x) R_0 \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{37}$$

где введена новая функция $\varepsilon = \dfrac{F}{L^2}$.

Распишем результирующий ТЭИ в тетрадных компонентах явно:

$$T_{(0)(0)} = \frac{1}{F}(\mu + p); \quad T_{(1)(1)} = \frac{1}{4}F(\mu + p); \tag{38}$$

$$T_{(0)(1)} = \frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el}; \quad T_{(2)(3)} = T_{(3)(2)} = p + W_{el}. \tag{39}$$

3. Преобразование уравнений Эйнштейна

Путем подстановки в правую часть системы гравитационных уравнений (27)-(30) выражений (38)-(39) преобразуем систему к виду:

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \frac{\chi}{2}(\mu + p); \tag{40}$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{F''}{F} + \frac{2}{x}(\ln F)' - (\ln F)'(\ln L)'\right) = -\chi\,(p + W_{el})\,; \tag{41}$$

$$-\frac{1}{x^2}(1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{x}\left(\ln\frac{F}{L}\right)' = -\chi\left(\frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el}\right). \tag{42}$$

Далее, исключая плотность массы-энергии и давление, получаем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами на функцию $G(x)$:

$$G'' + f(x)G' + g(x)G = 0, \tag{43}$$

где $G = \sqrt{F}$, $f(x) = (\ln\varphi)'$, $\varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}/x$, а коэффициент $g(x)$ равен

$$g(x) = \frac{2(1-\varepsilon) + x\varepsilon'}{2x^2\varepsilon} - \frac{2\chi}{\varepsilon}W_{el}. \tag{44}$$

Здесь через функции $\varepsilon(x)$, и $W_{el}(x)$, входящие в приведенное здесь гравитационное уравнение, явно проявляется влияние электромагнитного поля.

Определение новой переменной $\zeta = \zeta(x)$, согласно соотношению

$$d\zeta = \frac{x dx}{\sqrt{\varepsilon(x)}}, \tag{45}$$

превращает (43) в уравнение для нелинейного пространственного осциллятора

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta(x))G = 0, \tag{46}$$

относительно переменной ζ. Так как выражение (45), вообще говоря, не может быть проинтегрировано в элементарных функциях, то квадрат "частоты" Ω^2 проще использовать при вычислениях в следующей записи:

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy}\left(\frac{\Phi}{y}\right) - \frac{2\chi}{y}W_{el}, \tag{47}$$

где $y = x^2$, а функция Φ является аналогом ньютоновского гравитационного потенциала внутри жидкого заряженного шара и выражается из гравитационных уравнений через функцию ε как

$$\Phi = 1 - \varepsilon = \frac{\chi}{x}\int(\mu(x) + W_{el}(x))x^2 dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}}\int(\mu(y) + W_{el}(y))\sqrt{y}dy. \tag{48}$$

Кроме того, из системы гравитационных уравнений (40)-(42) нетрудно найти соотношение для давления:

$$\chi p = \chi W_{el} - \frac{\Phi}{x^2} + \frac{1}{x}(1-\Phi)(\ln F)'. \tag{49}$$

4. Граничные условия

На поверхности шара ($r = R_0$) внутреннее решение должно быть гладко сшито с внешним решением Райснера-Нордстрема [2], метрический элемент для которого записывается в том же виде, как и выражение (1), но функции g_{00} и g_{01} в пространстве-времени вне звезды определяются следующим образом:

$$g_{00} = F_{R-N}(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}; \quad g_{01} = L_{R-N} = 1, \tag{50}$$

где m и Q — соответственно, интегральная масса и интегральный электрический заряд жидкого шара, вычисляемые бесконечно удаленным наблюдателем.

Вводя параметр компактности $\eta = \dfrac{2m}{R_0}$, характеризующий степень сжатия звезды, получим на поверхности для функций $F(x) = G^2(x)$ и $\varepsilon(x)$ выражения:

$$F_{(x=1)} = G^2_{(x=1)} = \varepsilon_{(x=1)} = 1 - \eta + \frac{Q^2}{R_0^2} = 1 - \eta^*, \tag{51}$$

где $\eta^* = \eta - \dfrac{Q^2}{R_0^2}$ — эффективная компактность. Следует подчеркнуть, что $\eta^* \leq \eta$.

Исходя из определения функции ε, видим, что на границе $r = R_0$ функция L автоматически оказывается непрерывной, а $\Phi_{(x=1)} = \eta^*$.

Требуя непрерывности производной функции $F(x)$ на поверхности шара, приходим к

$$(F_{(x=1)})' = 2(G_{(x=1)})' G_{(x=1)} = 2\eta^* - \eta, \tag{52}$$

следовательно,

$$(G_{(x=1)})' = \frac{2\eta^* - \eta}{2\sqrt{1 - \eta^*}}. \tag{53}$$

Возвращаясь к соотношению для давления (49) внутри шара и требуя, чтобы на поверхности отсутствовало давление, так как во внешней области нет жидкой среды, при учете полученных граничных условий приходим к уравнению на параметры:

$$\chi W_{el} = \eta - \eta^* = \frac{Q^2}{R_0^2}, \tag{54}$$

которое превращается в тождество в отсутствие электрических зарядов ($\eta = \eta^*$).

5. Решение уравнений Эйнштейна-Максвелла

В отличие от работы [1], где плотность массы нейтральной жидкости имеет параболический закон распределения внутри шара (рис.1)

$$\mu(x) = \mu_0(1 - b\,x^2), \tag{55}$$

рассмотрим поведение системы для более общего распределения плотности массы нейтрального вещества (рис.2):

$$\mu(x) = \mu_0(1 - b\,x^2)^3. \tag{56}$$

Рис. 1: Поведение параболического распределения плотности массы как функции безразмерной радиальной переменной для $b = 63/80$

Рис. 2: Поведение распределения плотности массы как функции безразмерной радиальной переменной на основе параболического поведения плотности для $b = 63/80$

Обобщим запись плотности энергии электрического поля W_{el}, сохраняя требование, чтобы при переходе к плоскому случаю (без учета гравитационного взаимодействия, т.е. $G_N \to 0$) выражение для W_{el} совпадало с записью плотности электрической энергии для равномерно заряженного шара ($\rho \to \rho_0 = const$):

$$W_{el} = \frac{\lambda_0\, x^2}{8\pi}, \tag{57}$$

где $\lambda_0 = const$.

Поэтому, исходя из приведенных соображений, определим по сравнению с [1] плотность энергии электрического поля как

$$W_{el} = \frac{1}{8\pi} \lambda^2(x)\, x^2, \tag{58}$$

а запись плотности электрического заряда также обобщим, требуя соответствия с работой [1] при $a = 0$:

$$\rho = \rho^* \sqrt{\varepsilon(x)} = \rho_0(1 - ax^2)\sqrt{\varepsilon(x)}. \tag{59}$$

Тогда из уравнения Максвелла (37) сразу находим

$$\lambda(x) = \frac{4\pi\rho_0 R_0}{3}\left(1 - \frac{3a}{5}x^2\right). \tag{60}$$

Подставляя в (58), получаем окончательное выражение для плотности энергии электрического поля:

$$\chi W_{el} = \left(\frac{4\pi R_0^2}{3}\right)^2 \rho_0^2 \left(1 - \frac{3a}{5}x^2\right)^2 x^2. \tag{61}$$

Воспользовавшись этим выражением, получим из условия (54) для давления на поверхности шара ограничение на область изменения параметра $a : 0 < a \leq 5/3$. Однако неотрицательность поведения плотности электрического заряда (59) еще больше ограничивает область допустимых значений параметра: $0 < a \leq 1$. Необходимо добавить, что знак электрического заряда определяется параметром ρ_0.

Кроме того, исходя из граничных условий $\rho(x = 0) \equiv \rho(0) = \rho_0\sqrt{\varepsilon(0)}$; $\rho(x = 1) \equiv \rho(1) = \rho_0(1-a)\sqrt{\varepsilon(1)}$ приходим к выражению:

$$a = 1 - \frac{\rho(1)}{\rho(0)}\frac{\sqrt{\varepsilon(0)}}{\sqrt{\varepsilon(1)}}. \tag{62}$$

Если при этом связать параметры a и b соотношением $a = 80/63b$, то получим условие постоянства квадрата "частоты" $\Omega_0^2 = const$, что, в свою очередь, позволяет переписать (46) как уравнение для гармонического пространственного осциллятора

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega_0^2 G = 0, \tag{63}$$

где после использования соотношения между параметрами a и b величина Ω_0^2 может быть представлена как

$$\Omega_0^2 = \frac{\chi}{60^2}(1701\mu_0 a - 1760\pi\rho_0^2 R_0^2). \tag{64}$$

Для такого уравнения при условии положительности Ω_0^2 общее решение сразу выписывается в виде гармонической осциллирующей функции:

$$G(\zeta(x)) = G_0 cos(\Omega_0 \cdot \zeta(x) + \alpha_0). \tag{65}$$

где α_0 — сдвиг фазы.

Общее выражение для метрической функции $g_{00} = F = G^2$ принимает вид

$$F(x) = G_0^2\, cos^2(\Omega_0 \cdot \zeta(x) + \alpha_0), \tag{66}$$

а функция $g_{01} = L$ легко определяется из соотношения $L = \sqrt{\dfrac{F}{\varepsilon}}$.

Из граничных условий (51) и (52) нетрудно найти постоянные G_0 и α_0, выражаемые через уже известные параметры:

$$G_0 = \left(1 - \eta^* + \frac{2\eta^* - \eta}{2\Omega_0}\right)^{1/2}; \tag{67}$$

$$\tan(\Omega_0\, \zeta(x = 1) + \alpha_0) = -\frac{2\eta^* - \eta}{2\Omega_0\sqrt{1 - \eta^*}}. \tag{68}$$

В заключение необходимо отметить, что в работе продемонстрирован метод сведения уравнений Эйнштейна-Максвелла, записанных в радиационных координатах Бонди и с источником в виде идеальной заряженной жидкости, для статического сферически-симметричного случая к уравнению нелинейного пространственного осциллятора. В предположении о поведении плотностей массы-энергии и энергии электрического поля внутри заряженного жидкого гравитирующего шара найдено точное решение, как решение уравнения для пространственного одномерного гармонического осциллятора для конкретного соотношения между физическими параметрами, входящими в рассматриваемую задачу. Данное решение является обобщением ранее полученного в работе [1].

Список литературы

[1] Баранов А.М. *Осцилляторный подход к описанию статической звезды с нейтральной и заряженной идеальной жидкостью*/ А.М.Баранов //Вестник Красноярского государственного университета. Физические и математические науки. – 2002. – №1. – С. 5-12.

[2] Эддингтон А.С. *Математическая теория относительности* / А.С.Эддингтон. – Харьков-Киев: Гос. научно-тех. изд-во, 1933. – С. 265-267.

MODEL OF THE CHARGED GRAVITATING FLUID BALL

A.M.Baranov, Z.V.Vlasov

Within the framework of General Relativity the model approach to a description of spherical gravitating static fluid balls with an electric charge is considered. The metric interval is written in Bondi's coordinates. The total energy-momentum tensor as a sum of the perfect Pascal fluid energy-momentum tensor and the energy-momentum tensor of an electromagnetic field is chosen. The exact solution of the Einstein-Maxwell equations extending similar solution with parabolic distribution of mass density is found.