УДК 517.55

О ФОРМУЛАХ НАХОЖДЕНИЯ СТЕПЕННЫХ СУММ КОРНЕЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, И НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ*

Т.И.Качаева, С.Г.Мысливец*

Получены формулы для нахождения степенных сумм отрицательной степени для корней (и полюсов) систем уравнений, состоящих из некоторых видов целых, и мероморфных функций многих комплексных переменных. Эти формулы выражают степенные суммы через коэффициенты разложения Тейлора функций, входящих в систему. В качестве приложения описан метод исключения переменных из данных систем уравнений.

Рассмотрим систему функций $f_1(z),\ f_2(z),\dots,f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$ $(z=(z_1,z_2,\dots,z_n))$ и имеющих следующий вид:

$$f_j(z)=z^{\beta^j}R_j(z)+Q_j(z),\quad j=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

где $\beta^j=(\beta^j_1,\beta^j_2,\dots,\beta^j_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j}=z_1^{\beta^j_1}\cdot z_2^{\beta^j_2}\cdots z_n^{\beta^j_n}$ и $\|\beta^j\|=\beta^j_1+\beta^j_2+\ldots+\beta^j_n=k_j$, $j=1,2,\dots,n$.

Однородные многочлены $R_j(z)$ имеют вид

$$R_j(z)=z_j^{l_j}+\sum_{s=1}^{j-1}z_s\varphi_{sj}(z),\quad j=1,\dots,n,$$

а $\varphi_{sj}(z)$ — однородные многочлены степени (по совокупности переменных) l_j-1.

Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z)=\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}a^j_\alpha z^\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$; $\alpha_j\geqslant 0$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}$; $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$.

В дальнейшем будем считать, что степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в Q_j, строго больше, чем k_j+l_j, $j=1,2,\dots,n$ ($\|\alpha\|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>k_j+l_j$).

Обозначим также $S_j(z)=f_j(z)-z^{\beta^j}\cdot z_j^{l_j}$, $j=1,\dots,n$.

Ясно, что система однородных уравнений

$$R_1(z)=0,\dots,R_n(z)=0$$

имеет только один общий корень — начало координат.

Рассмотрим циклы $\gamma(r)=\gamma(r_1,r_2,\dots,r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r)=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_s|=r_s,s=1,2,\dots,n\},\quad r_1>0,\dots,r_n>0.$$

При достаточно малых r_j циклы $\gamma(r)$ лежат в области голоморфности функций f_j, поэтому ряды

$$\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}|a^j_\alpha|r_1^{\alpha_1}\cdots r_n^{\alpha_n}$$

сходятся, $j=1,2,\dots,n$. Тогда на цикле $\gamma(tr)=\gamma(tr_1,tr_2,\dots,tr_n)$, $t>0$, имеем

$$|z|^{\beta^j}=t^{k_j}\cdot r_1^{\beta^j_1}\cdot r_2^{\beta^j_2}\cdots r_n^{\beta^j_n}=t^{k_j}\cdot r^{\beta^j},$$

*Первый автор поддержан грантом Президента РФ для ведущих научных школ, НШ 1212-2003.1; второй автор — грантом Красноярского краевого фонда науки, є 12F0063C.

а

$$|Q_j(z)| = \left|\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0} a^j_\alpha z^\alpha\right| \leqslant \sum_{\|\alpha\|\geqslant 0} t^{\|\alpha\|}|a^j_\alpha|r^\alpha \leqslant t^{k_j+l_j+1}\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}|a^j_\alpha|r^\alpha.$$

Поэтому при достаточно малых положительных t на цикле $\gamma(tr)$ выполняются неравенства

$$|z|^{\beta^j}|z_j|^{l_j} > |Q_j(z)|, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Покажем, что числа $r_1, \ldots, r_n$ можно выбрать достаточно малыми и такими, что на $\gamma(r)$ будут справедливы неравенства

$$|z_j|^{l_j} > \left|\sum_{s=1}^{j-1} z_s\varphi_{sj}(z)\right|, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Действительно, сначала подберем r так, чтобы на множестве $\{z : |z_1| \leqslant r_1, \ldots, |z_{n-1}| \leqslant r_{n-1}, |z_n| = r_n\}$ выполнялось неравенство

$$|z_n|^{l_n} > \left|\sum_{s=1}^{n-1} z_s\varphi_{sn}(z)\right|.$$

Этого можно добиться, фиксируя r_n, уменьшая $r_1, \ldots, r_{n-1}$ и пользуясь компактностью заданного множества.

Затем, уже зафиксировав r_n и r_{n-1}, уменьшаем остальные r_j так, чтобы выполнялось неравенство

$$|z_{n-1}|^{l_{n-1}} > \left|\sum_{s=1}^{n-2} z_s\varphi_{s(n-1)}(z)\right|$$

на множестве $\{z : |z_1| \leqslant r_1, \ldots, |z_{n-2}| \leqslant r_{n-2}, |z_{n-1}| \leqslant r_{n-1}, |z_n| = r_n\}$.

И т.д. В конце концов найдем такие достаточно малые r_j, чтобы на $\gamma(r)$ выполнялись неравенства (4). Тогда такие же неравенства будут выполняться (в силу однородности $R_j(z)$) и на остовах $\gamma(tr)$ при всех положительных t.

Таким образом, из (3), (4) следует, что существуют циклы $\gamma(tr)$, $0 < t \leqslant 1$, для которых

$$|z^{\beta_j} \cdot z_j^{l_j}| > |S_j(z)|, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

в частности,

$$f_j(z) \neq 0 \quad \text{на} \quad \gamma(tr), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из (5) следует, что на этих остовах $\gamma(r)$ определены интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \int\limits_{\gamma(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \cdots z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0, \ldots, \beta_n \geqslant 0$, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, $I = (1, 1, \ldots, 1)$. По теореме Коши-Пуанкаре, эти интегралы не зависят от $(r_1, \ldots, r_n)$. Обозначим их через

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f}.$$

Наша цель состоит в следующем:

1) в вычислении этого интеграла через коэффициенты функций $S_j(z)$ (теорема 1);

2) при дополнительных условиях на функции f_j (если f_j — целые или мероморфные функции) в выяснении его связи со степенными суммами корней (и полюсов) системы

$$f_1(z) = 0, f_2(z) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots f_n(z) = 0 \tag{6}$$

(теоремы 2 и 3).

Если f_j — полиномы (т.е. система (6) есть система алгебраических уравнений), то известны формулы для вычисления степенных сумм корней этой системы через коэффициенты f_j (см., например, [1, 2]). На этих формулах основан модифицированный метод исключения неизвестных, предложенный Л.А.Айзенбергом ([1]) и развитый затем в [3]. Его компьютерная реализация дана в [4, 5].

В этих работах рассматривались степенные суммы корней в положительной степени. Если в качестве f_j взять целые (или мероморфные) функции, то система (6) может иметь бесконечное число корней (или полюсов), следовательно, степенные суммы в положительной степени могут быть не определены. В данной работе предлагается рассмотреть степенные суммы корней в отрицательной степени (т.е. степенные суммы от величин, обратных корням системы) и для них получить конечные формулы для их нахождения. В случае, когда $R_j(z) = 0,\ j = 1, \ldots, n$, такие формулы были получены в [6].

1 Основные результаты

Пусть для системы (6) выполнены условия предыдущего параграфа. Обозначим мультииндексы $\delta^j = \beta^j + l_j e^j\ (j = 1, \ldots, n)$, где $e^1 = (1, 0, \ldots, n)$, …, $e^n = (0, \ldots, 0, 1)$. Первое утверждение имеет следующий вид.

Theorem 1 *При сделанных предположениях для функции f_j вида (1), (2) справедлива формула:*

$$J_\beta = \sum_{\alpha \in M} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta \cdot S^\alpha}{z^{\beta + (\alpha_1+1)\delta^1 + \ldots + (\alpha_n+1)\delta^n}}\right],$$

где Δ — якобиан системы (6); $S^\alpha = S_1^{\alpha_1} \cdot S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n}$; $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член. И наконец, параллелепипед M определяется неравенствами:

$$M = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \|\beta\| + n, 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \beta_1 + l_1(\|\beta\| + n + 1), \ldots,$$

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_{n-1} + l_{n-1}(\beta_{n-2} + 1) + l_{n-1} l_{n-2}(\beta_{n-3} + 1) + \ldots + l_{n-1} \cdots l_1(\|\beta\| + n + 1)\}.$$

Proof Поскольку на $\gamma(r)$ выполнены неравенства (5), то

$$\frac{1}{f_j} = \frac{1}{z^{\delta^j} + S_j(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(S_j(z))^s}{z^{(s+1)\delta^j}}.$$

Причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\gamma(r)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, поэтому

$$\frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \frac{\Delta\, dz}{z^{\beta+I}(z^{\delta^1} + S_1)(z^{\delta^2} + S_2) \cdots (z^{\delta^n} + S_n)} =$$

$$= \frac{\Delta\, dz}{z^{\beta+I}} \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} (-1)^{\|\alpha\|} \frac{S_1^{\alpha_1} \cdot S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n}}{z^{(\alpha_1+1)\delta^1 + \ldots + (\alpha_n+1)\delta^n}},$$

где $\Delta = \det \left\| \dfrac{\partial f_j}{\partial z_k} \right\|_{j,k=1}^n$ — якобиан системы (6); $dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n$.

Следовательно, на $\gamma(r)$ получаем:

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{(-1)^{\|\alpha\|} \Delta\, dz}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{S^\alpha}{z^{(\alpha_1+1)\delta^1 + \ldots + (\alpha_n+1)\delta^n}} = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{(-1)^{\|\alpha\|} \Delta\, dz}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{Q_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n}}{z^{(\alpha_1+1)\delta^1 + \ldots + (\alpha_n+1)\delta^n}}.$$

Покажем, что в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Для этого подсчитаем степени мономов, входящих в числитель и знаменатель подынтегрального выражения по разным группам переменных. Оценим сначала число ненулевых слагаемых по общей степени. Степень мономов, входящих в Δ ($\deg \Delta$), не меньше, чем $\|\beta^1\| + \ldots + \|\beta^n\| + l_1 + \ldots + l_n - n = k_1 + \ldots + k_n + l_1 + \ldots + l_n - n$.

Для степени мономов, входящих в $Q_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n}$, получаем оценку

$$\deg(Q_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}\cdots S_n^{\alpha_n}) \geqslant \alpha_1(1+\|\beta^1\|+l_1)+\alpha_2(\|\beta^2\|+l_2)+\ldots+\alpha_n(\|\beta^n\|+l_n) =$$
$$= \alpha_1(1+k_1+l_1)+\alpha_2(k_2+l_2)+\ldots+\alpha_n(k_n+l_n).$$

Поэтому степень числителя не меньше

$$k_1+l_1+\ldots+k_n+l_n-n+\alpha_1(1+k_1+l_1)+\alpha_2(k_2+l_2)+\ldots+\alpha_n(k_n+l_n).$$

Степень знаменателя равна

$$\|\beta\|+n+(\alpha_1+1)(k_1+l_1)+\ldots+(\alpha_n+1)(k_n+l_n).$$

Поэтому в сумме (7) все слагаемые, для которых степень числителя больше степени знаменателя на n, равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$k_1+l_1+\ldots+k_n+l_n-n+\alpha_1(1+k_1+l_1)+\alpha_2(k_2+l_2)+\ldots+\alpha_n(k_n+l_n) \leqslant$$
$$\leqslant \|\beta\|+(\alpha_1+1)(k_1+l_1)+\ldots+(\alpha_n+1)(k_n+l_n).$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\alpha_1 \leqslant \|\beta\|+n.$$

Найдем оценку для α_2. Рассмотрим одно из слагаемых в (7)

$$\int\limits_{\gamma(r)} \frac{(-1)^{\|\alpha\|}\Delta\, dz}{z^{\beta+I+\delta^1+\ldots+\delta^n}} \left(\frac{Q_1}{z^{\beta^1}z_1^{l_1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z^{\beta^2}z_1\varphi_{12}+Q_2}{z^{\beta^2}z_2^{l_2}}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{z^{\beta^n}(z_1\varphi_{1n}+\ldots+z_{n-1}\varphi_{(n-1)n})+Q_n}{z^{\beta^n}z_n^{l_n}}\right)^{\alpha_n}.$$

Сравнивая степени по переменному z_1 в числителе и знаменателе и придавая α_1 наибольшее значение $\|\beta\|+n$, получим, что $\alpha_2 \leqslant \beta_1+l_1(\|\beta\|+n+1)$. Затем то же самое сделаем со степенями по $z_2,\ldots,z_n$ и получим требуемый параллелепипед M. □

Наша дальнейшая цель — связать рассмотренные интегралы со степенными суммами корней системы (6). Для этого нужно сузить класс функций f_j. Сначала возьмем в качестве функций Q_j $(j=1,2,\ldots,n)$ многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha\in M_j} a_\alpha^j z^\alpha,$$

где M_j — некоторые конечные множества мультииндексов.

Сделаем замену $z_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j=1,2,\ldots,n$. Будем предполагать в дальнейшем, что многочлены f_j $(j = 1,\ldots,n)$ таковы, что найдутся мультииндексы $\gamma^1,\ldots,\gamma^n$, для которых $f_j(z)$ перейдут после данной замены в выражения следующего вида:

$$\frac{w_1^{s_1}+\tilde{Q}_1(w)}{c_1w^{\gamma^1}},\quad \frac{w_2^{s_2}+w_1\tilde{\varphi}_{12}(w)+\tilde{Q}_2(w)}{c_2w^{\gamma^2}},\ldots,\frac{w_n^{s_n}+w_1\tilde{\varphi}_{1n}(w)+\ldots+w_{n-1}\tilde{\varphi}_{(n-1)n}(w)+\tilde{Q}_n(w)}{c_nw^{\gamma^n}},$$

где $c_1,\ldots,c_n$ — некоторые константы; $\tilde{Q}_j$, $\tilde{\varphi}_{sj}$ — некоторые многочлены от $w=(w_1,\ldots,w_n)$. Обозначим числители в этих выражениях через $\tilde{f}_j(w)$, разности $\tilde{f}_j(w)-w_j^{s_j}$ через $\tilde{S}_j(w)$ и

$$\tilde{R}_j(w) = w_j^{s_j}+\sum_{m=1}^{j-1}\tilde{\varphi}_{mj}(w),\quad j=1,\ldots,n.$$

Т.е.

$$\tilde{f}_j(w) = w_j^{s_j}+\sum_{m=1}^{j-1}\tilde{\varphi}_{mj}(w)+\tilde{Q}_j(w) = \tilde{R}_j(w)+\tilde{Q}_j(w),\quad j=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Причем степень (по совокупности переменных) многочленов $\tilde{Q}_j(w)$ строго меньше, чем s_j, а многочлены $\tilde{\varphi}_{mj}(w)$ являются однородными и их степени равны s_j-1.

Существование мультииндексов γ^j с заданными свойствами накладывает ограничения на многочлены $f_j(z)$. Например, для существования мультииндекса γ^1 достаточно потребовать, чтобы степень многочлена Q_1 по первой переменной z_1 была больше, чем $\beta_1^1 + l_1$ ($\deg_1 Q_1 > \beta_1^1 + l_1$) и $\deg_j Q_1 \leqslant \beta_j^1$, $j \geqslant 2$. Тогда можно взять $\gamma^1 = (\deg_1 Q_1, \beta_2^1, \ldots, \beta_n^1)$.

Для существования мультииндекса γ^2 достаточно потребовать, чтобы $\deg_2 Q_2 > \deg_2 \varphi_{12} + \beta_2^2$, $\beta_1^2 + 1 + \deg_1 \varphi_{12} \geqslant \deg_1 Q_2$, $\beta_j^2 + \deg_j \varphi_{12} \geqslant \deg_j Q_2$ при $j \geqslant 3$.

Кроме того, существует единственный моном в φ_{12} вида

$$c_2 z_1^{\deg_1 \varphi_{12}} \cdots z_n^{deg_n \varphi_{12}},$$

а все остальные мономы, входящие в φ_{12}, имеют степени по z_1 строго меньшие, чем в данном мономе.

Тогда в качестве γ^2 можно взять мультииндекс

$$\gamma^2 = (\beta_1^2 + 1 + \deg_1 \varphi_{12}, \max(\beta_2^2 + l_2, \deg_2 Q_2), \beta_3^2 + \deg_3 \varphi_{12}, \ldots, \beta_n^2 + \deg_n \varphi_{12}).$$

И т.д.

По теореме Безу, система нелинейных алгебраических уравнений

$$\tilde{f}_j(w) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

имеет конечное число корней, равное (с учетом их кратностей) $s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$, и не имеет корней на бесконечной гиперплоскости $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$, поскольку старшие однородные части этих многочленов, т.е. многочлены

$$w_j^{s_j} + \sum_{m=1}^{j-1} \tilde{\varphi}_{mj}(w), \quad j = 1, \ldots, n,$$

имеют только один общий нуль — начало координат. Обозначим корни системы (9), не лежащие на координатных плоскостях и с учетом их кратностей, через $w_{(k)} = (w_{1(k)}, w_{2(k)}, \ldots, w_{n(k)})$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $0 < N \leqslant s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$.

Тогда точки $z_{(k)} = \left(\frac{1}{w_{1(k)}}, \frac{1}{w_{2(k)}}, \ldots, \frac{1}{w_{n(k)}}\right)$ и только они являются корнями системы (6), не лежащими на координатных плоскостях. Таким образом, справедливо утверждение.

Lemma 1 *Система (6) с многочленами f_j вида (1), удовлетворяющими вышеперечисленным условиям, имеет конечное число корней (с учетом их кратностей) $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(N)}$, не лежащих на координатных плоскостях $\{z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \ldots, n$.*

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \ldots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}}.$$

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы (6), но в отрицательной степени (либо степенной суммой от обратных величин корней).

Theorem 2 *Для системы (6) с многочленами f_j вида (1), удовлетворяющими вышеперечисленным условиям, справедлива формула*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

т.е.

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{\alpha \in M)} (-1)^{\|\alpha\|} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta \cdot S^\alpha}{z^{\beta + (\alpha_1+1)\delta^1 + \ldots + (\alpha_n+1)\delta^n}}\right]. \tag{10}$$

Proof Сделаем в интеграле J_β замену переменных $z_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При такой замене цикл $\gamma(r)$ перейдет в цикл $(-1)^n \gamma\left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}\right) = (-1)^n \gamma(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ (с учетом изменения ориентации при данной замене).

Тогда

$$\frac{df_j\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\ldots,\frac{1}{w_n}\right)}{f_j\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\ldots,\frac{1}{w_n}\right)}=\frac{d\dfrac{\widetilde{f}_j(w)}{w^{\gamma^j}}}{\dfrac{\widetilde{f}_j(w)}{w^{\gamma^j}}}=\frac{d\widetilde{f}_j(w)}{\widetilde{f}_j(w)}-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^j\cdot\frac{dw_k}{w_k}.$$

Поэтому

$$J_\beta=\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(R)}w^{\beta+I}\left(\frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)}-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^1\cdot\frac{dw_k}{w_k}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{d\widetilde{f}_n(w)}{\widetilde{f}_n(w)}-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^n\cdot\frac{dw_k}{w_k}\right).$$

Покажем, что все интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma(R)}w^{\beta+I}\frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)}\wedge\ldots\wedge\frac{d\widetilde{f}_l(w)}{\widetilde{f}_l(w)}\wedge\frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}}\tag{11}$$

равны нулю, если $0\leqslant l<n$ и R_j достаточно велики.

Действительно, числа R_j $(j=1,2,\ldots,n)$ можно выбрать достаточно большими, так, что справедливы неравенства

$$|w_j|^{s_j}>|\tilde{S}_j(w)|\quad\text{на}\quad\gamma(R).$$

Доказательство данного факта проходит как доказательство неравенств (5). Причем R_j можно выбрать и так, чтобы на цикле $\gamma(r)$, где $r_j=\dfrac{1}{R_j}$, выполнялись неравенства (5).

Поэтому

$$\frac{1}{\tilde{f}_j(w)}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\tilde{S}_j^p(w)}{w_j^{(p+1)s_j}},$$

следовательно, интегралы (11) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int\limits_{\gamma(R)}w^{\beta+I}\frac{w^\alpha\,dw_1\wedge dw_2\wedge\ldots\wedge dw_n}{w_1^{(p_1+1)s_1}\cdot w_2^{(p_2+1)s_2}\cdots w_l^{(p_l+1)s_l}\cdot w_{j_1}\cdots w_{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по теореме о вычетах.

Таким образом,

$$J_\beta=\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(R)}w^{\beta+I}\frac{d\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_1(w)}\wedge\ldots\wedge\frac{d\tilde{f}_n(w)}{\tilde{f}_n(w)}.$$

По теореме Южакова (см., например, [1, гл. 1]) о логарифмическом вычете последний интеграл равен сумме значений голоморфной функции $w^{\beta+I}$ во всех корнях системы (9). Но значение функции $w^{\beta+I}$ в корне системы (9), лежащем на координатной плоскости, равно нулю. Поэтому

$$J_\beta=(-1)^n\sigma_{\beta+I}.\qquad\square$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть дана система уравнений:

$$f_1(z)=z_1-az_2^2=0,\quad f_2(z)=z_2-bz_1^2=0.$$

Корнями данной системы, не лежащими на координатных плоскостях, служат три точки $(1/\sqrt[3]{ab^2};1/\sqrt[3]{a^2b})$.

Якобиан данной системы $\Delta=1-4abz_1z_2$. Интегралы

$$J_\beta=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{\alpha_1,\alpha_2\geqslant0}a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}\int\limits_{\gamma(r)}\frac{dz_1\wedge dz_2}{z_1^{\beta_1+\alpha_1-2\alpha_2+2}\cdot z_2^{\beta_2+\alpha_2-2\alpha_1+2}}-$$

$$-\frac{4}{(2\pi i)^2}\sum_{\alpha_1,\alpha_2\geqslant0}a^{\alpha_1+1}b^{\alpha_2+1}\int\limits_{\gamma(r)}\frac{dz_1\wedge dz_2}{z_1^{\beta_1+\alpha_1-2\alpha_2+1}\cdot z_2^{\beta_2+\alpha_2-2\alpha_1+1}}.$$

В первой сумме отличен от нуля интеграл, для которого $\alpha_1 = \dfrac{\beta_1 + 2\beta_2}{3} + 1$, $\alpha_2 = \dfrac{2\beta_1 + \beta_2}{3} + 1$, а во второй сумме отличен от нуля интеграл, для которого $\alpha_1 = \dfrac{\beta_1 + 2\beta_2}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{2\beta_1 + \beta_2}{3}$. В частности, если $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, то $J_{(\beta,\beta)} = -3a^{\beta+1} \cdot b^{\beta+1}$.

Степенная сумма $\sigma_{(\beta+1,\beta+1)} = 3a^{\beta+1} \cdot b^{\beta+1}$.

Разница в знаках объясняется тем, что при замене $z_1 = 1/w_1$, $z_2 = 1/w_2$ заданная система переходит в систему

$$w_2^2 - aw_1 = 0, \quad w_1^2 - bw_2 = 0,$$

следовательно, система координат меняет ориентацию.

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, разлагающиеся в бесконечные произведения (равномерно и абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$),

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $R_j(z) + Q_j(z)$ и удовлетворяет перечисленным условиям.

Для каждого набора индексов $j_1, \ldots, j_n$, где $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \ldots, i_n$, где $i_1, \ldots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \ \ldots, \ f_{nj_n}^{(i_n)}(z) = 0, \tag{13}$$

имеют (согласно лемме 1) конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)}, \ z_{(2)}, \ldots, z_{(l)}, \ldots$. Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{1(l)}| \cdot |z_{2(l)}| \cdots |z_{n(l)}|} \tag{14}$$

сходится.

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}.$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (13), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{js}^{(2)}$; равен -1, если в систему вида (13), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{js}^{(2)}$.

Ряды, определяющие суммы $\sigma_{\beta+I}$, сходятся в силу условия, наложенного на ряд (14).

Для системы (6), составленной из функций вида (12), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами). Модули $|z_{(l)}|$ не могут стремиться к нулю. В противном случае ряд (14) не мог бы сходиться. Следовательно, все функции f_j — голоморфны и не равны нулю вблизи точки 0 и вне координатных плоскостей, поэтому для них определены интегралы J_β.

Theorem 3 *Для системы (6) с функциями вида (12) справедливы равенства*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

Proof Так как

$$d\frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)} = \frac{d\,f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_j^{(2)}(z)}{f_j^{(2)}(z)},$$

то

$$d\frac{f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(2)}(z)} \wedge d\frac{f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(2)}(z)} \wedge \ldots \wedge d\frac{f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(2)}(z)} =$$

$$= \left(\frac{d\,f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_1^{(2)}(z)}{f_1^{(2)}(z)}\right) \wedge \left(\frac{d\,f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_2^{(2)}(z)}{f_2^{(2)}(z)}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{d\,f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_n^{(2)}(z)}{f_n^{(2)}(z)}\right) =$$

$$= \sum (-1)^s \frac{d\,f_1^{(i_1)}(z)}{f_1^{(i_1)}(z)} \wedge \frac{d\,f_2^{(i_2)}(z)}{f_2^{(i_2)}(z)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\,f_n^{(i_n)}(z)}{f_n^{(i_n)}(z)},$$

где s — это число сомножителей, для которых $i_l = 2$, а сумма берется по всевозможным наборам чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$, равных 1 или 2.

Поэтому теорему достаточно доказать для целых функций $f_j(z)$. В этом случае

$$\frac{d\,f_j(z)}{f_j(z)} = \frac{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d\,f_{js}(z)}{f_{js}(z)}.$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно на $\gamma(r)$ для достаточно малых r_j. Таким образом, интеграл J_β равен сумме интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{d\,f_{1s_1}(z)}{f_{1s_1}(z)} \wedge \frac{d\,f_{2s_2}(z)}{f_{2s_2}(z)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\,f_{ns_n}(z)}{f_{ns_n}(z)}.$$

Для каждого из этих интегралов нужная формула доказана (теорема 2). □

Отметим, что если $f_j(z)$ являются целыми функциями, разлагающимися в бесконечные произведения, то они сами имеют вид (1) с функциями $Q_j(z)$ вида (2). Поэтому интегралы J_β вычисляются по теореме 1.

2 Приложения

Теоремы предыдущего пункта могут служить основой метода исключения неизвестных для систем неалгебраических (целых или мероморфных) уравнений. Для его описания нам понадобятся рекуррентные формулы Ньютона и формулы Варинга для целых или мероморфных функций одного комплексного переменного. Формулы Ньютона были получены в [7]. Мы их дополним и приведем соответствующие им формулы Варинга.

Пусть $f(z)$ — целая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ конечного порядка роста $\rho \geqslant 0$. Предположим, что $f(0) \neq 0$ и что a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — нули этой функции и их число бесконечно. По известной теореме Адамара (см., например, [8, с. 259]), справедливо разложение

$$f(z) = e^{Q(z)} h(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p\right), \tag{15}$$

которое сходится равномерно и абсолютно на плоскости $\mathbb{C}$, где

$$E(w,p) = (1-w)e^{w + \frac{w^2}{2} + \ldots + \frac{w^p}{p}}$$

— первичный множитель, $p \leqslant \rho$, а степень многочлена Q не превосходит ρ.

Функция $h(z)$ является каноническим произведением первичных множителей $E\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$, и целое число p называется родом этого произведения.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^k} \tag{16}$$

абсолютно сходится при $k > p$, а значит, и при $k > \rho$ (см., например, [8, с. 258]). На самом деле $p \leqslant \rho_1 \leqslant \rho$, где ρ_1 — показатель сходимости целой функции f (см. [8, с. 258]). Если ρ не целое, то $\rho_1 = \rho$ и $p = [\rho] = [\rho_1]$ (см. [8, с. 258-260]), где $[\rho]$ — целая часть числа ρ. Если ρ_1 — целое, то p равно либо ρ_1, либо $\rho_1 - 1$.

В дальнейшем сумму ряда (16) будем обозначать через s_k.

Числа s_k являются степенными суммами нулей функции f отрицательной степени.

Если $f(z)$ — мероморфная функция порядка ρ и $f(0) \neq 0, \infty$, то верна аналогичная теорема Адамара (см., например, [8, с. 292]). А именно, справедливо разложение

$$f(z) = e^{Q(z)} \frac{h(z)}{u(z)},$$

где

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p\right), \quad u(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_n}, q\right).$$

Данные разложения сходятся абсолютно и равномерно в $\mathbb{C}$, целые числа $p, q \leqslant \rho$, степень многочлена Q не превосходит ρ, а числа b_n являются полюсами мероморфной функции f.

Для мероморфной функции f обозначим через s_k сумму ряда

$$s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^k}.$$

Как известно, данный ряд сходится, если $k > \max(p, q)$ и, следовательно, если $k > \rho$.

Пусть функция $f(z)$ имеет следующее разложения Тейлора в окрестности начала координат:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{17}$$

а многочлен $Q(z)$ имеет вид

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{[\rho]} q_n z^n.$$

Справедливо утверждение (аналог рекуррентных формул Ньютона для многочленов)

Theorem 4 *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ вида (15), которая имеет разложение Тейлора (17) и для которой $p = [\rho]$, тогда справедливы следующие рекуррентные формулы:*

$$kc_k = \sum_{j=0}^{k-1} c_j (k-j) q_{k-j} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant p, \tag{18}$$

и

$$kc_k + \sum_{j=0}^{k-p-1} c_j s_{k-j} = \sum_{j=k-p}^{k-1} c_j (k-j) q_{k-j} \quad \text{при} \quad k > p. \tag{19}$$

Формула (19) доказана в [7], а формула (18) доказывается тем же способом.

Если f — мероморфная функция конечного порядка ρ, для которой $p = q = [\rho]$, то для нее справедливы такие же формулы (см. [7]).

Следствие 1 *В условиях теоремы 4 справедливы аналоги формул Варинга*

$$s_k = \frac{(-1)^k}{c_0^k} \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ kc_k & c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \dots & c_1 \end{vmatrix} \quad \text{при} \quad k > p$$

и

$$c_k = \frac{(-1)^k c_0}{k!} \begin{vmatrix} -q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2q_2 & -q_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -pq_p & -(p-1)q_{p-1} & \dots & -q_1 & p & \dots & 0 \\ s_{p+1} & -pq_p & -(p-1)q_{p-1} & \dots & -q_1 & p+1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & -pq_p & \dots & -q_1 \end{vmatrix}$$

при $k \geqslant 1$.

Доказательство следствия вытекает из формул Ньютона (18), (19) и обычных свойств определителей.

Вернемся к многомерным системам, удовлетворяющим условиям теорем 2 и 3.

Зафиксируем мультииндекс β. Поскольку в ряде для $\sigma_{\beta+I}$ знак ε_l равен ± 1, то этот ряд представляется в виде

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{u_j} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w_j},$$

где u_j есть произведение координат корня вида

$$z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1},$$

в который входит четное число функций $f_{js}^{(2)}$, а w_j есть произведение того же вида, в которое входит нечетное число функций $f_{js}^{(2)}$. Конечно, нумерация корней отличается от нумерации чисел c_j и w_j.

Из условия, наложенного на ряд (14), следует, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|u_j|} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|w_j|} \tag{20}$$

также сходятся.

Определим бесконечные произведения

$$h(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_j}\right), \quad u(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_j}\right).$$

В этих бесконечных произведениях не исключаются случаи, когда одно из данных произведений конечно или вообще отсутствует.

В силу условия, наложенного на ряды (20), данные произведения сходятся абсолютно и равномерно на комплексной плоскости, поэтому они определяют целые функции. Отношение этих функций определяет тогда мероморфную функцию одного комплексного переменного

$$F(z) = \frac{h(z)}{u(z)}.$$

Нулями и полюсами данной функции являются числа u_j и w_j соответственно.

Рассмотрим для мероморфной функции $F(z)$ степенные суммы вида

$$s_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_j^u} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w_j^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда очевидно, что $s_1 = \sigma_{\beta+I}$, а остальные степенные суммы

$$s_k = \sigma_{\beta(k)+I},$$

где мультииндекс $\beta(k) = ((\beta_1+1)^k - 1, (\beta_2+1)^k - 1, \ldots, (\beta_n+1)^k - 1)$.

По теореме 3 можно найти все эти степенные суммы, не находя самих корней системы (6) с функциями вида (12).

Остается найти саму мероморфную функцию $F(z)$. Поскольку $F(0) = 1$, то разложение данной функции по формуле Тейлора в окрестности нуля можно записать в виде

$$F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \tag{21}$$

Для нахождения коэффициентов c_k можно применить рекуррентные формулы Ньютона для мероморфных функций из теоремы 4 или формулы Варинга из следствия 1. В этих формулах $p = 0$, а все $q_j = 0$.

Таким образом доказано утверждение

Theorem 5 *По теореме 3 для системы (6) с функциями вида (12) находятся степенные суммы s_k. Затем по формулам (19) находятся коэффициенты Тейлора мероморфной функции (21). Корнями и полюсами полученной мероморфной функции являются выражения корней системы (6) вида $z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}$, тем самым произведено исключение неизвестных из системы (6).*

Список литературы

[1] Айзенберг Л.А. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*/ Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков. – Новосибирск: Наука, 1979. – 329 с.

[2] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения* / А.К.Цих. – Новосибирск: Наука, 1989. – 240 с.

[3] Быков В.И. *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов* / В.И.Быков, А.М.Кытманов, М.З.Лазман. – Новосибирск: Наука, 1991. – 234 с.

[4] Быков В.И. *Компьютерная алгебра многочленов. Модифицированный метод исключения* / В.И.Быков, А.М.Кытманов, Т.А.Осетрова // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350. – №4. – С. 443–445.

[5] Быков В.И. *Применение систем компьютерной алгебры в модифицированном методе исключения неизвестных* / В.И.Быков, А.М.Кытманов, Т.А.Осетрова, З.Е.Потапова // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370. – №4. – С. 439–442.

[6] Кытманов А.М. *Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций* / А.М.Кытманов, З.Е.Потапова // Известия вузов. Математика. 2005. є 5. – С. 52–67.

[7] Качаева Т.И. *О рекуррентных формулах Ньютона для целых и мероморфных функций конечного порядка* / Т.И.Качаева // Вестник КрасГУ. Серия физ.мат науки. – 2004. – Вып. 3. – С. 68–72.

[8] Титчмарш Е. *Теория функций* / Е.Титчмарш. – М.: Наука, 1980. – 463 с.

ON FORMULAS FOR FINDING OF POWER SUMS OF ROOTS OF SYSTEMS OF EQUATIONS FROM MEROMORPHIC FUNCTIONS AND SOME THOSE APPLICATIONS

T.I.Kachaeva, S.G.Myslivets

It is given formulas for finding of power sums in negative power for roots (or poles) of systems of equations, consisting from some types of entire and meromorphic functions in several complex variables. Those formulas represented the power sums throughout Taylor coefficients of functions from system. As an application it is described the method of elimination of variables form those systems.