ЭЛЕКТРОФИЗИКА

УДК 517 : 530.1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ. НОРМИРОВКА ПОТЕНЦИАЛА. ЕМКОСТИ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА И ЛИНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ. КОНФОРМНЫЕ РАДИУСЫ

В.П.Казанцев, О.А.Золотов, М.В.Долгополова *

Показано, как с помощью специфической нормировки электрического потенциала на электростатические задачи на плоскости могут быть распространены в полной мере понятия, характерные для пространственных задач.

Электростатические задачи на плоскости возникают, когда нужно определять электрическое поле, зависящее лишь от двух декартовых координат. Например, для системы параллельных бесконечных проводящих и диэлектрических цилиндров, в которых электрические характеристики системы зависят лишь от двух декартовых координат плоскости, перпендикулярной образующим цилиндров. Самим цилиндрам, моделирующим реальные физические тела, на плоскости будут соответствовать области, представляющие собой пересечения плоскости с цилиндрами. Эти области будут характеризоваться физическими параметрами, характерными для материалов цилиндров и неизменными вдоль цилиндров. Чаще всего далее будем рассматривать проводящие цилиндры. Им будут соответствовать проводящие области на плоскости (плоские проводники).

При определении понятий электростатических характеристик системы проводников в плоских электростатических задачах, в отличие от аналогичной пространственной задачи, возникают трудности вследствие того, что электрический потенциал точечного заряда на плоскости путем выбора произвольной аддитивной постоянной не может быть нормирован так, чтобы его значение в бесконечно удаленной точке было равно нулю. Для преодоления этих трудностей с тем, чтобы электростатические характеристики в плоских задачах сохраняли бы все свои свойства, присущие им в пространственных задачах, приходится прибегать к более сложной процедуре нормировки потенциала, что позволяет, в частности, ввести для электростатики на плоскости понятия о емкостных коэффициентах системы проводников без дополнительного требования их электронейтральности в целом.

1 Нормировка потенциала

Пусть в конечной области плоскости расположена система зарядов $d\lambda(\vec{r})$ с полным зарядом λ. Если $\lambda = 0$, то электрический потенциал системы

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\int \ln|\vec{r}-\vec{r}\,'|\, d\lambda(\vec{r}\,')$$

будет принимать в бесконечно удаленной точке нулевое значение. Нормировать $\varphi(\vec{r})$ на нулевое значение в бесконечно удаленной точке при произвольном λ нужно так, чтобы при этом не нарушились бы физические взаимодействия внутри системы зарядов $d\lambda(\vec{r})$, то есть чтобы внутри нее не изменились бы электрические поля. Таким образом, к потенциалу $\varphi(\vec{r})$ следует добавить потенциал $\Phi(\vec{r})$ другой системы зарядов с полным зарядом $-\lambda$, принимающий в области первоначальной системы зарядов постоянное значение. Таким свойством обладает, в частности, потенциал заряда $-\lambda$, равномерно распределенного по окружности с центром в начале координат, охватывающей рассматриваемую систему зарядов. Обозначим радиус такой окружности R, тогда

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases}\ln R & r \le R\\ \ln r & r \ge R\end{cases}\ .$$

*© В.П.Казанцев, О.А.Золотов, М.В.Долгополова, Красноярский государственный университет, e-mail: zoa@krasu. ru, 2005.

Нормированный таким путем потенциал теперь будет определяться с помощью формулы

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\int \ln\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{R}\,d\lambda(\vec{r}\,') + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases} 0 & r \le R \\ \ln(r/R) & r \ge R \end{cases} . \tag{1}$$

С ним можно будет обращаться в области $r \le R$ как с обычным пространственным потенциалом.

Например, можно найти энергию равномерно заряженного круга так, как обычно [1] находят энергию для равномерно по объему заряженного шара. В результате будем иметь

$$W = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\ln\frac{R}{a} + \frac{1}{4}\right) ,$$

где λ – полный заряд круга; a – его радиус.

Энергия двух равномерно заряженных зарядами λ_1 и λ_2 кругов радиусов a_1 и a_2 с центрами, разнесенными на расстояние d, будет представляться суммой трех слагаемых:

$$W = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\ln\frac{R}{a_1} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda_2^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\ln\frac{R}{a_2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{R}{d} ,$$

из которых два первых представляют собой собственные энергии зарядов кругов, а третье — энергию взаимодействия этих зарядов.

Неудобство предложенной общей схемы для плоских электростатических задач, связанное с появлением в формулах довольно произвольного положительного параметра R, физический смысл которого понятен из описания процедуры нормировки, искупается тем, что теперь все результаты, имеющие место для пространственных задач, могут быть без труда распространены на плоские. Так, матрицы емкостных и потенциальных коэффициентов, хорошо известные для пространственных задач [1], вполне аналогично можно ввести и для плоских, при этом будут сохраняться все свойства этих матриц.

2 Емкость уединенного проводника. Комплексный потенциал. Конформное отображение и внешний конформный радиус

Выбранная описанным способом нормировка для потенциала позволяет теперь ввести понятие о емкости уединенного проводника. Так, емкость круга радиуса a можно будет найти по формуле

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln(R/a)} ,$$

поскольку потенциал окружности $|z| = a$, равномерно заряженной зарядом λ,

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases} \ln(a/R) & r \le a \\ \ln(r/R) & a < r \le R \\ 0 & r \ge R \end{cases} .$$

Значение же емкости произвольной проводящей области плоскости может быть выражено через ее внешний конформный радиус A

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln(R/A)} . \tag{2}$$

С тем чтобы понять связь рассматриваемой электростатической задачи с геометрической задачей конформного отображения, рассмотрим ненормированный комплексный потенциал проводника S, заряженного единичным зарядом:

$$\pi_o(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\int\limits_{\partial S} \ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right) d\lambda_o(\tilde{z}), \tag{3}$$

где $\lambda_o(\tilde{z})$ - распределение единичного заряда по границе проводника ∂S. Реальная часть этого потенциала совпадает с обычным скалярным потенциалом (1) и определена однозначно. Мнимая же часть комплексного потенциала (3) при обходе по любому замкнутому контуру, охватывающему S, получает приращение $-i/\varepsilon_o$.

Функция

$$G(z) = R\exp\big(-2\pi\varepsilon_o\pi_o(z)\big) \tag{4}$$

будет однозначно определенной в области $C - S$, причем постоянный ее модуль будет отвечать эквипотенциали, а постоянный ее аргумент — силовой линии электрического поля проводника. В окрестности бесконечно удаленной точки для $G(z)$ имеет место представление

$$G(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{z^k}. \tag{5}$$

Модуль $G(z)$ принимает минимальное свое значение на границе проводника ∂S. Это значение называют внешним конформным радиусом области S:

$$\min|G(z)| = A.$$

Согласно соотношению (4)

$$\operatorname{Re}\pi_o(z)\bigg|_{z\in\partial S} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{A}{R}. \tag{6}$$

Отсюда и следует формула (2) для емкости уединенного проводника. Предложенная нормировка потенциала позволяет определить энергию заряженного зарядом λ проводника как

$$W = \frac{\lambda^2}{2C} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_o}\ln\frac{R}{A}. \tag{7}$$

Отметим также, что $G(z)$ конформно отображает область $C - S$ на область $|G(z)| > A$, то есть на внешность круга радиуса A. Если, не решая задачи о заряженном проводнике, удается найти конформное отображение $G(z)$ области $C - S$ на внешность круга радиусом A, причем для $G(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки для $G(z)$ имеет место представление (5),то

$$\pi_o(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{G(z)}{R}, \tag{8}$$

а емкость уединенного проводника может быть найдена по формуле (2).

Например, для внешности эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b,$$

согласно [2],

$$G(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2}); \;\; c^2 = a^2 - b^2; \quad A = \frac{a+b}{2}.$$

Соотношения, определяющие внешние конформные радиусы некоторых областей через их геометрические характеристики, можно найти, например, в [3] и [4], причем во второй работе приведены также и выражения для $G(z)$, однако в число областей, рассмотренных в работах [3] и [4], не попал прямоугольник, весьма распространенная геометрическая фигура. Укажем для него способ определения $G(z)$ и внешнего конформного радиуса.

Конформное отображение внешности круга $|G(z)| > A$ на внешность прямоугольника, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям, может быть получено с помощью формулы Шварца [2] и осуществляется функцией

$$z = \int\limits_A^G \frac{\sqrt{(t^2 - A^2e^{2i\alpha})(t^2 - A^2e^{-2i\alpha})}}{t^2}\,dt + \frac{a}{2}, \tag{9}$$

где a - длина стороны прямоугольника, параллельной оси x; $Ae^{i\alpha}$, $-Ae^{i\alpha}$, $Ae^{-i\alpha}$, $-Ae^{-i\alpha}$ -точки окружности $|G(z)| = A$, образами которых при отображении (9) служат вершины прямоугольника.

Поскольку в окрестности бесконечно удаленной точки определяемая в неявной форме соотношением (9) функция $G(z)$ имеет представление (5), то величина A является внешним конформным радиусом прямоугольника. Длины сторон прямоугольника могут быть выражены через A и α, как это следует из (9), по формулам

$$\begin{aligned} \frac{a}{A} &= \pi \cos^2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big((2k-1)!!\big)^2}{2^{2k}(k+1)!k!}\cos^{2k}\alpha; \\ \frac{b}{A} &= \pi \sin^2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big((2k-1)!!\big)^2}{2^{2k}(k+1)!k!}\sin^{2k}\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

в которых принято, что $(-1)!! = 1$. Соотношения (10) служат, по сути, уравнениями для A и α, легко разрешаемыми для квадрата $a = b$, поскольку из симметрии сразу определяем $\alpha = \pi/4$ и

$$A = \frac{2}{\pi} a \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big((2k-1)!!\big)^2}{2^{3k}(k+1)!k!} \right)^{-1}. \tag{11}$$

В заключение этого раздела статьи заметим, что, используя конформное отображение $G(z)$, как показано в работе [5], можно с помощью исключительно алгебраических операций построить полную базисную систему распределений зарядов по поверхности проводника - характеристических мультиполей - источников базисных потенциалов проводника, а также систему отвечающих этим потенциалам энергетических характеристик проводника - высших поляризуемостей.

3 Функции Грина области. Внутренний конформный радиус. Емкость линии относительно точки

Рассмотрим часть комплексной плоскости S, на границе ∂S которой (экране) электрический потенциал постоянен. В присутствии экрана комплексный потенциал единичного точечного заряда, расположенного в точке $\tilde{z}$:

$$\Gamma_o(z,\tilde{z}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right)$$

искажается зарядами, наведенными на границе, так, что суммарный комплексный потенциал всех зарядов

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \Gamma_o(z,\tilde{z}) + \gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) + P(\tilde{z},\tilde{z}^*). \tag{12}$$

Напомним, что функции $\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, $\Gamma_o(z,\tilde{z})$ и $\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ называют функцией Грина, сингулярной и регулярной частями функции Грина. Сингулярная часть функции Грина — это не что иное, как функция Грина всей комплексной плоскости, а регулярная часть представляет собой комплексный потенциал распределенных по границе наведенных зарядов

$$\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \int_{\partial S} \ln\left(\frac{z-z_s}{R}\right) d\lambda(z_s). \tag{13}$$

Чтобы функция Грина была ограничена в бесконечно удаленной точке, необходимо равенство минус единице сосредоточенного на границе ∂S заряда. Принимая во внимание это обстоятельство, можно записать

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \int_{\partial S} \ln\left(\frac{z-z_s}{z-\tilde{z}}\right) d\lambda(z_s) + P(\tilde{z},\tilde{z}^*). \tag{14}$$

Постоянную $P(\tilde{z},\tilde{z}^*)$ выбираем так, чтобы на ∂S реальная часть непрерывного продолжения функции Грина была равна нулю:

$$\operatorname{Re}\Gamma(z_s,\tilde{z},\tilde{z}^*) = 0.$$

С помощью соотношения (14) записываем

$$P(\tilde{z},\tilde{z}^*) = \lim_{z\to z_s} \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \int\limits_{\partial S} \ln\left(\frac{z-z_s}{z-\tilde{z}}\right) d\lambda(z_s) + ip,$$

где p - некоторая действительная постоянная. Отметим, что можно выбрать $P(\tilde{z},\tilde{z}^*) = 0$, когда ∂S — ограниченная стягиваемая область.

В части комплексной плоскости $C - S$ определенная формулой (13)

$$\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right) - P(\tilde{z},\tilde{z}^*),$$

поэтому плотность наведенных на ∂S зарядов, рассчитываемая как разность предельных электрических полей наведенных зарядов в областях S и $C - S$, умноженная на ε_o и скалярно на единичный вектор нормали к ∂S, который проведен из $C - S$ в S, будет равна:

$$\sigma(z_s,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \left(\frac{1}{2\pi(z_s-\tilde{z})} - \varepsilon_o \lim_{z\to z_s} \partial_z\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)\right)\frac{1}{i}\frac{dz}{dl}, \tag{15}$$

где $z(l)$ - естественная параметризация кривых границы ∂S (l возрастает при обходе ∂S так, что $C - S$ остается слева).

Построенная таким образом функция Грина тесно связана с функцией [2]

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = B\exp\big(-2\pi\varepsilon_o\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)\big), \tag{16}$$

отображающей часть комплексной плоскости S на круг радиуса $|B|$. Причем, как видно из формулы (14),

$$G(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*) = 0. \tag{17}$$

Постоянную B принимают либо равной единице [2], либо находят из условия нормировки [6]

$$\partial_z G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)\Big|_{z=\tilde{z}} = 1. \tag{18}$$

В последнем случае величину $a(\tilde{z},\tilde{z}^*) = |B|$ называют внутренним радиусом S, отнесенным к точке $\tilde{z}$. Для определения B полезной может оказаться формула

$$B = R\exp\big(2\pi\varepsilon_o(\gamma(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*) + P(\tilde{z},\tilde{z}^*))\big), \tag{19}$$

следующая непосредственно из условия (18).

Если сначала удается найти $G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, удовлетворяющую условиям (17) и (18), то функцию Грина через нее и внутренний радиус можно выразить как

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)}{a(\tilde{z},\tilde{z}^*)}\right). \tag{20}$$

Зачастую сначала находят функцию $G_o(z)$ и внутренний радиус $a(z_o)$, соответствующую какой-либо одной точке $\tilde{z} = z_o$, после чего определяют $G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ и $a(\tilde{z},\tilde{z}^*)$ по формулам:

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{a^2(z_o) - G_o(\tilde{z})G_o^*(\tilde{z})}{G_o'(\tilde{z})}\frac{G_o(z) - G_o(\tilde{z})}{a^2(z_o) - G_o(z)G_o^*(\tilde{z})}; \tag{21}$$

$$a(\tilde{z},\tilde{z}^*) = \left|\frac{a^2(z_o) - G_o(\tilde{z})G_o^*(\tilde{z})}{G_o'(\tilde{z})a(z_o)}\right|. \tag{22}$$

Нетрудно увидеть из них, что $G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ удовлетворяет условиям нормировки (17) и (18). Заметим, что максимальное значение $|G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)|$ достигается на ∂S и совпадает с величиной внутреннего радиуса $a(\tilde{z},\tilde{z}^*)$.

Через определенную формулой (20) функцию Грина могут быть выражены

$$P(\tilde{z},\tilde{z}^*)=\Gamma(\infty,\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{G(\infty,\tilde{z},\tilde{z}^*)}{a(\tilde{z},\tilde{z}^*)}\right); \tag{23}$$

$$\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)-\Gamma_o(z,\tilde{z})-P(\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)R}{G(\infty,\tilde{z},\tilde{z}^*)(z-\tilde{z})}\right). \tag{24}$$

Когда S — ограниченная область и $\tilde{z}\in S$, $P(\tilde{z},\tilde{z}^*)=0$. В этом случае энергия наведенных единичным точечным зарядом, расположенным в точке $\tilde{z}$, на ∂S может быть определена как

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial S}\sigma(z_s,\tilde{z},\tilde{z}^*)\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)dl(z_s)=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\gamma(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ln\frac{R}{a(\tilde{z},\tilde{z}^*)}=\frac{1}{2C(\tilde{z})}. \tag{25}$$

Здесь были приняты во внимание условия (17) и (18). Величина $C(\tilde{z})$ вполне аналогична величине, введенной в работе [7] для пространственной емкости поверхности относительно точки, поэтому $C(\tilde{z})$ будет естественным назвать емкостью замкнутой линии относительно внутренней точки. Приведем теперь $G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, $\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, $a(\tilde{z},\tilde{z}^*)$ для некоторых областей.

Для полуплоскости ($\operatorname{Re}z>0$)

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=(\tilde{z}+\tilde{z}^*)\frac{z-\tilde{z}}{z+\tilde{z}^*};\;\; a(\tilde{z},\tilde{z}^*)=2\operatorname{Re}\tilde{z};\;\; \Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{z+\tilde{z}^*}\right).$$

Для круга ($|z|<a$)

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=(|\tilde{z}|^2-a^2)\frac{z-\tilde{z}}{z\tilde{z}^*-a^2};\;\; a(\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{a^2-|\tilde{z}|^2}{a};\;\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{a(z-\tilde{z})}{a^2-z\tilde{z}^*}\right).$$

Для внешности круга ($|z|>a$)

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=(|\tilde{z}|^2-a^2)\frac{z-\tilde{z}}{z\tilde{z}^*-a^2};\;\; a(\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{|\tilde{z}|^2-a^2}{a};\;\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{a(z-\tilde{z})}{z\tilde{z}^*-a^2}\right).$$

Для полосы ($|\operatorname{Re}z|<D/2$)

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{2D}{\pi}\cos\xi(\tilde{z}+\tilde{z}^*)\frac{\sin\xi(z-\tilde{z})}{\cos\xi(z+\tilde{z}^*)};\quad \xi=\frac{\pi}{2D};$$

$$a(\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{2D}{\pi}\cos(2\xi\operatorname{Re}\tilde{z}^*);\;\; \Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{\sin\xi(z-\tilde{z})}{\cos\xi(z+\tilde{z}^*)}\right).$$

Функция Грина внешности эллипса, фокусы которого лежат на оси $0x$ на расстоянии c от начала координат, а полусумма большой и малой полуосей (внешний конформный радиус) равна A, может быть выражена через функцию

$$G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{|G_o(\tilde{z})|^2-A^2}{G_o'(\tilde{z})}\,\frac{G_o(z)-G_o(\tilde{z})}{G_o(z)G_o^*(\tilde{z})-A^2},$$

где

$$G_o(z)=\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-c^2}),$$

конформно отображающую внешность эллипса $G_o(z)G_o^*(z)=A^2$ на круг $|G|<a(\tilde{z},\tilde{z}^*)$ с радиусом

$$a(\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{|G_o(\tilde{z})|^2-A^2}{A|G_o'(\tilde{z})|},$$

по формуле (20)

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(A\frac{G_o(z)-G_o(\tilde{z})}{G_o(z)G_o^*(\tilde{z})-A^2}\right).$$

Функция Грина для внутренней области, ограниченной эллипсом, требует для своего описания использования понятий характеристических мультиполей [5] и значительно большего объема текста.

Для прямоугольника из-за ограниченного объема статьи приведем лишь выражение для внутреннего конформного радиуса, отнесенного к центру прямоугольника:

$$\max a(\tilde{z}, \tilde{z}^*) = \frac{2b}{\pi} \operatorname{th} \eta \exp\left(-\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\exp\big(-2(2p-1)\eta\big)}{2p-1} \operatorname{th}(2p-1)\eta \right),$$

где η может быть определено через стороны прямоугольника a и b

$$\eta = \frac{\pi a}{2b}.$$

Этот радиус наибольший из всех внутренних конформных радиусов прямоугольника.

Заключение

Как показано в настоящей работе, с помощью специфической нормировки электрического потенциала на электростатические задачи на плоскости могут быть распространены в полной мере понятия, характерные для пространственных задач.

Анализ основных понятий, таких, как емкость уединенного проводника, функция Грина, приводит к выводу о том, что для электростатики на плоскости адекватным математическим аппаратом служит комплексный анализ. В этом легко убедиться, если перейти от компактной в комплексной форме записи выражений для функций Грина, приведенных в статье, к их действительным аналогам. Подтверждением этого вывода служит также и то обстоятельство, что геометрические понятия конформных радиусов оказались тесно связанными с энергетическими характеристиками электростатических задач.

Укажем также, что конформные радиусы могут быть использованы для оценок снизу значений емкости цилиндрических конденсаторов. Так, в работе [8] для погонной емкости C цилиндрического конденсатора было, в частности, получено неравенство $C > 2\pi\varepsilon_o \Big/ \ln\frac{A_2}{A_1}$, где A_2 и A_1 — внешние конформные радиусы внешней и внутренней обкладок конденсатора. В работе [9] доказано аналогичное неравенство $C > 2\pi\varepsilon_o \Big/ \ln\frac{a_2(\tilde{z},\tilde{z}^*)}{a_1(\tilde{z},\tilde{z}^*)}$, в которое входят конформные радиусы внешней и внутренней обкладок конденсатора относительно одной и той же точки, лежащей в области внутренней обкладки. Например, для кругового провода, лежащего внутри прямоугольной проводящей оболочки, $a_2(\tilde{z}, \tilde{z}^*)$ и $a_1(\tilde{z}, \tilde{z}^*)$ — внутренние конформные радиусы прямоугольника и круга относительно точки, лежащей внутри круга. Таким образом, рассмотренные здесь понятия важны и для приложений.

Список литературы

[1] Батыгин В.В. *Сборник задач по электродинамике* / В.В.Батыгин, И.К.Топтыгин. – М.: Наука, 1970. – С.31.

[2] Лаврентьев М.А. *Методы теории функций комплексного переменного* / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

[3] Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала* / Н.С.Ландкоф. – М.: Наука, 1966. – 516 с.

[4] Казанцев В.П. *Понятие о высших поляризуемостях уединенных проводников в плоских задачах электростатики* / В.П.Казанцев. – Красноярск, 1996. Деп. в ВИНИТИ 2291 – В96.

[5] Казанцев В.П. *Вариационные принципы и высшие поляризуемости уединенных проводников в плоских задачах электростатики* / В.П. Казанцев // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361. – є 4. – С. 489-473.

[6] Полиа Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике* / Г.Полиа, Г.Сеге. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 336 с.

[7] Казанцев В.П. *Емкость поверхности относительно точки и вариационные неравенства* / В.П.Казанцев // Изв. вузов. Физика. – 2001. – є 7. – С. 78-83.

[8] Казанцев В.П. *Характеристические мультиполи и вариационные оценки емкости цилиндрических конденсаторов* / В.П.Казанцев // Докл. РАН. – 2000. – Т. 373. – є 1. – С. 29-32.

[9] Казанцев В.П. *Характеристические мультиполи кривой относительно точки* / В.П.Казанцев // Докл. РАН. – 2001. – Т. 380. – є 6. – С. 749-753.

ELECTROSTATICS ON THE PLANE. NORMALIZATION OF POTENTIAL. CAPACITIES OF A SOLITARY CONDUCTOR AND LINE RELATIVELY TO A POINT. CONFORMAL RADII

V.P.Kazantsev, O.A.Zolotov, M.V.Dolgopolova

Is, as with the help specific normalization electric potencial on electrostatic problems on a plane concepts, characteristic for spatial tasks can be distributed to the full.