УДК 517.55

О НЕШТЕЙНОВЫХ ДОПОЛНЕНИЯХ К ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

О.В.Знаменская*

Описан класс нештейновых дополнений к дивизору в торическом многообразии размерности три. Доказательство основано на гомологических препятствиях к свойству штейновости многообразия.

Торические многообразия характеризуются мономиальностью функций перехода и по своему построению связываются с комбинаторно-геометрической конструкцией веером (коническим полиэдром) Σ, вид которого определяет их свойства [1, 7]. Далее будем рассматривать только торические многообразия $\mathbb{X}$, соответствующие полным симплициальным примитивным веерам. Простыми примерами таких многообразий являются классические пространства комплексного анализа — проективное $\mathbb{CP}_n$ и пространство теории функций $\overline{\mathbb{C}}^n$.

Будем рассматривать дополнения $\mathcal{K} = \mathbb{X} \setminus V$ к гиперповерхностям V в $\mathbb{X}$. Заметим, что в отличие от дополнений к гиперповерхностям в проективном пространстве, которые всегда являются многообразиями Штейна (см. например, [2] и [3, гл. 5, теорема 1 c]), многообразие $\mathcal{K}$ не обязательно обладает этим свойством. Необходимость в изучении условий штейновости $\mathcal{K}$ возникает в связи с задачами теории вычетов мероморфных дифференциальных форм в $\mathbb{X}$. В частности, вычисление гомологий дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{X}$ значительно упрощается в случае, когда рассматриваемое дополнение является многообразием Штейна.

Вопрос о штейновости многообразий вида $\mathcal{K}$ изучался в [4, 5]. Более точно, в [5] было рассмотрено условие штейновости $\mathcal{K}$, для формулирования которого используются (обобщенно) однородные координаты $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{C}^d$ на $\mathbb{X}$ (см. [6]). В них гиперповерхность V задается глобальным уравнением

$$V = \{[\xi] \in \mathbb{X} : \xi \in \mathbb{C}^d, P(\xi) = 0\},$$

где $P(\xi) = 0$ — однородный многочлен переменных ξ. При этом само многообразие $\mathbb{X}$ трактуется как фактор множества $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ по действию некоторой изоморфной тору группы, а через $Z(\Sigma)$ обозначается набор координатных плоскостей разных размерностей в $\mathbb{C}^d$, определяемый по вееру Σ.

Согласно результатам [5] *для штейновости $\mathcal{K}$ достаточно, а в случае двумерного $\mathbb{X}$ и необходимо, чтобы*

$$Z(\Sigma) \subset \{\xi \in \mathbb{C}^d : P(\xi) = 0\}. \tag{1}$$

Там же в виде гипотезы сформулирован критерий штейновости $\mathcal{K}$.

Пусть $\mathbb{X}$ — торическое многообразие, V — гиперповерхность в $\mathbb{X}$, определенная однородным многочленом $P(\xi)$. Тогда условие (1) является необходимым и достаточным для штейновости дополнения $\mathcal{K} = \mathbb{X} \setminus V$.

Целью данной работы является развить примененный в [5] гомологический метод изучения штейновости дополнений к гиперповерхностям в $\mathbb{X}$ и описать с его помощью класс нештейновых дополнений в торических многообразиях размерности 3. Заметим, что для описанного в данной работе класса условие (1) не выполняется, что подтверждает правдоподобность гипотезы о критерии штейновости.

1 Основные утверждения и примеры

Произвольный дивизор (гиперповерхность) V в $\mathbb{X}$ представляет собой объединение замыкания $\widehat{V}$ гиперповерхности $V' \subset \mathbb{T}^n \subset \mathbb{X}$ (торической части V) и нескольких $\mathbb{T}_N$-инвариантных дивизоров D_{i_s},

[1]Работа выполнена при содействии гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ, НШ-1212.2003.1.

являющихся замыканиями $(n-1)$-мерных орбит (см. [7]). Сумма всех $\mathbb{T}_N$-инвариантных дивизоров

$$D = \sum_{i=1}^{d} D_i = \sum_{i=1}^{d} \Big\{ [\xi_i] : \xi_i = 0 \Big\}$$

представляет собой антиканонический дивизор в $\mathbb{X}$. Часть $V' \subset V$ задается в торе $\mathbb{T}^n$ полиномом Лорана $p(z)$:

$$V' = \Big\{ z \in \mathbb{T}^n : p(z) = \sum_{m \in M} C_m z^m = 0 \Big\}.$$

Его гомогенизация

$$\widehat{P}(\xi) = \sum_{m \in M} C_m \xi_1^{<m,v_1>-a_1} \ldots \xi_d^{<m,v_d>-a_d}$$

определяет гиперповерхность $\widehat{V}$ в $\mathbb{X}$. Таким образом, можно считать, что

$$V = \Big\{ [\xi] \in \mathbb{X} : P(\xi) = 0 \Big\}, \quad \text{где} \quad P(\xi) = \widehat{P}(\xi) \cdot \prod_s \xi_{i_s}.$$

Согласно результату В.Батырева и Д.Кокса [8]

$$Z(\Sigma) = \cup \{ \xi_{i_1} = \cdots = \xi_{i_p} = 0 \},$$

где объединение ведется по всем примитивным поднаборам $i_1, \ldots, i_p$, т.е. таким, что векторы $v_{i_1}, \ldots v_{i_p}$ не образуют конуса в Σ, тогда как любой их $(p-1)$-мерный поднабор образует конус в Σ.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\Pi_I = \Pi_{i_1,\ldots,i_n}$ координатную плоскость в $\mathbb{C}^d$, соответствующую векторам $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$. Она задается уравнением $\Pi_I = \{\xi_{i_1} = \cdots = \xi_{i_n} = 0\}$. Пусть $D_k = \{[\xi] : \xi_k = 0\}$ — $\mathbb{T}_N$-инвариантный дивизор в $\mathbb{X}$, соответствующий вектору v_k.

Пусть $\mathbb{X}$ — трехмерное торическое многообразие. Пусть, кроме этого, многообразие $\mathbb{X} = \mathbb{X}_\Sigma$ обладает свойством:

$$\Pi_{ijk} \subset Z(\Sigma) \quad \text{для некоторого мультииндекса} \quad I = \{i, j, k\}. \tag{2}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $P(\xi)$ — полином, определяющий гиперповерхность V в $\mathbb{X}$. Если $P(\xi) \not\equiv 0$ на Π_{ijk}, то дополнение $\mathbb{X} \setminus V$ — нештейново.*

Отметим, что условие теоремы 1 не является необходимым для нештейновости дополнения в многообразиях $\mathbb{X}$ со свойством (2). Рассмотрим в качестве примера "гибрид", подробно изученный в [4]. Веер Σ трехмерного гибрида имеет 7 образующих: $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1), v_4 = (-1,0,0)$, $v_5 = (0,-1,0)$, $v_6 = (0,0,-1)$, $v_7 = (-1,-1,-1)$, а множество $Z(\Sigma)$ имеет следующий вид:

$$Z(\Sigma) = \{\xi_1 = \xi_7 = 0\} \cup \{\xi_2 = \xi_7 = 0\} \cup \{\xi_3 = \xi_7 = 0\} \cup \{\xi_1 = \xi_4 = 0\} \cup$$
$$\cup \{\xi_2 = \xi_5 = 0\} \cup \{\xi_3 = \xi_6 = 0\} \cup \{\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0\}.$$

Рассмотрим в "гибриде" замыкание V гиперплоскости

$$V' = \{z \in \mathbb{T}^3 : p(z) = z_1 + z_2 + z_3 + 1\}.$$

В однородных координатах V задается нулями полинома $P(\xi) = \xi_1\xi_5\xi_6 + \xi_2\xi_4\xi_6 + \xi_3\xi_4\xi_5 + \xi_4\xi_5\xi_6\xi_7$. Очевидно, что $\{\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0\} \subset \{P(z) = 0\}$, тем не менее дополнение $\mathbb{X} \setminus V$ к $V = \{[\xi] : P(\xi) = 0\}$ не будет многообразием Штейна, поскольку содержит компактное подмногообразие, определяемое системой равенств $\xi_5 = 0, \xi_1\xi_6 - \xi_3\xi_4 = 0$.

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на лемму 1, которую мы сформулируем и докажем для случая произвольных торических многообразий.

Пусть $p = p\,(z)$ — полином Лорана переменных $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\Delta_{p\,(z)}$ — многогранник Ньютона для p. Для всякой вершины $\alpha \in \Delta_{p(z)}$ через $\widehat{K}_\alpha$ обозначим двойственный конус к $\Delta_{p\,(z)}$ в этой точке:

$$\widehat{K}_\alpha = \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \langle s, \alpha \rangle = \min_{m \in \Delta_{p\,(z)}} \langle s, m \rangle \right\}.$$

Лемма 1. *Если $\widehat{P}(\xi) \not\equiv 0$ на плоскости Π_I, причем все v_{i_j} линейно независимы, то существует вершина α многогранника Ньютона $\Delta_{p(z)}$, такая, что $v_{i_j} \in \widehat{K}_\alpha$ для всех $i_j \in I$.*

При этом если $\Pi_I \subset Z(\Sigma)$, то пересечение $\widehat{V}$ с дивизором D_s пусто для всех D_s, соответствующих векторам v_s, которые лежат внутри конуса, натянутого на $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$.

Доказательство. 1. Покажем, что $v_{i_j} \in \widehat{K}_\alpha$ для всех $i_j \in I$. По условию леммы $\widehat{P}(\xi) \not\equiv 0$ на Π_I. Поскольку $\widehat{P}(\xi_1, \underset{i_1}{0}, \ldots, \underset{i_n}{0}, \xi_d) \not\equiv 0$, он должен содержать мономы, степени которых по переменным ξ_{i_j}, $j = 1, \ldots, n$ равны нулю. Это означает, что найдется грань α многогранника $\Delta_{p(z)}$, в которой достигаются одновременные минимумы n скалярных произведений $\langle v_{i_j}, \alpha \rangle = a_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n$. В силу линейной независимости векторов v_{i_j} эта грань есть одна из вершин α многогранника $\Delta_{p(z)}$.

2. Пусть теперь $\Pi_I \subset Z(\Sigma)$. В этом случае векторы $v_{i_1}, \ldots v_{i_n}$ не образуют конуса в Σ, тогда как любой их $(n-1)$-мерный поднабор образует конус в Σ. Это означает, что строго внутри n-мерного конуса σ, натянутого на v_{i_j} лежит, по крайней мере один, вектор $v_s \in \Sigma$, для которого также выполняется условие $\langle \alpha, v_s \rangle = a_s$ (рис 1).

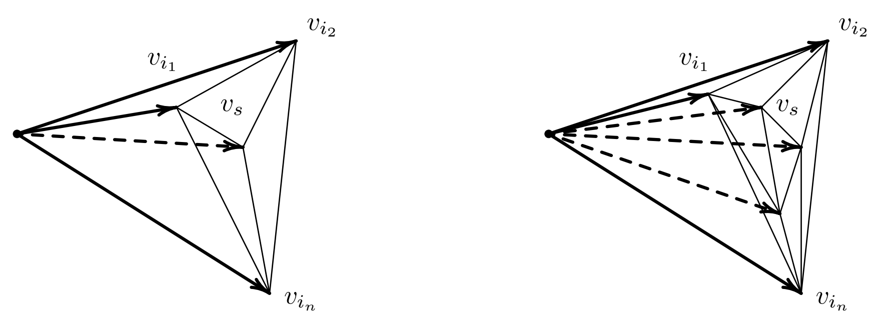

Рис. 1

При этом минимум скалярного произведения $\langle \alpha, v_s \rangle$ для v_s достигается только на α. В противном случае v_s был бы вектором внутренней нормали к одной из граней $\Delta_{p(z)}$, примыкающей к α, но это невозможно, поскольку он лежит строго внутри конуса σ.

Для всех остальных точек $m \in \Delta_{p(z)}$ справедливо неравенство $\langle m, v_s \rangle - a_s > 0$, и значит в $\widehat{P}(\xi)$ имеется только один моном, не содержащий множителей $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}, \xi_s$.

Итак, $\widehat{P}(\xi)|_{\xi_s=0} = C_\alpha \xi^\alpha$. Покажем, что гиперповерхность $\widehat{V}$ не пересекает дивизор D_s. Ясно, что вектор v_s не образует конусов с векторами $v_j \in \Sigma$, отличными от $v_{i_1}, \ldots v_{i_n}$, и значит составляет с v_j примитивный набор. Но тогда моном $\widehat{P}(\xi)|_{\xi_s=0} = C_\alpha \xi^\alpha \neq 0$. Действительно, если $\xi_s = 0$, то соответствующая вектору v_j переменная $\xi_j \neq 0$, а указанный моном зависит только от переменных ξ_j.

□

2 Доказательство теоремы

Напомним, что $\mathcal{K} = \mathbb{X} \setminus V$, где $\mathbb{X}$ — трехмерное торическое многообразие со свойством (2). Для доказательства теоремы 1 рассмотрим дополнение

$$X = \mathcal{K} \setminus \Big(D \setminus (D_i \cup \ D_j \cup D_k) \Big),$$

получающееся удалением из $\mathbb{X}$ множества, в которое входят $\widehat{V}$, а также все дивизоры вида $D_m = \{\xi_m = 0\}$, за исключением D_i, D_j и D_k.

Поскольку удаление дивизора из многообразия сохраняет свойство штейновости (см. [3, гл. 5, теорема 1 c]), $\mathcal{K}$ — нештейново, если таковым будет X.

Докажем нештейновость X. Предположим противное и воспользуемся результатом Андреотти–Френкеля [9] о том, что группы гомологий n-мерного штейнового многообразия тривиальны в размерности, большей n. Согласно этому результату, если X — многообразие Штейна, то

$$H_q(X, \mathbb{Z}) \simeq 0, \qquad q > 3. \tag{3}$$

Чтобы прийти к противоречию с (3), достаточно показать, что $H_5(X)$ нетривиальна.

Лемма 2. *В X существует вещественно 5-мерный, не гомологичный нулю цикл.*

Доказательство. 1. Введем гомоморфизм $\rho : H_5(X) \longrightarrow H_3(\mathbb{T}^3 \setminus V)$.

Рассмотрим пару открытых в X множеств A_1 и A_2, где

$$A_1 = X \setminus \big(D_i \cap D_j\big), \qquad A_2 = X \setminus D_k.$$

Применим к A_1 и A_2 точную гомологическую последовательность Майера-Виеториса [11, 10, с. 246], из которой нас будет интересовать связывающий гомоморфизм

$$\partial^1_* : H_5(A_1 \cup A_2) \longrightarrow H_4(A_1 \cap A_2).$$

Аналогично, для пары открытых множеств B_1 и B_2, где

$$B_1 = X \setminus \big(D_i \cup D_k\big), \qquad B_2 = X \setminus \big(D_j \cup D_k\big),$$

определим

$$\partial^2_* : H_4(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H_3(B_1 \cap B_2).$$

Заметим теперь, что объединение A_1 и A_2 есть все X, а пересечение B_1 и B_2 дает $\mathbb{T}^3 \setminus V$. Кроме того, $A_1 \cap A_2 = B_1 \cup B_2 = X \setminus \big(D_k \cup (D_i \cap D_j)\big)$. Таким образом, имеет место диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & H_5(X) \arrow[d, equal] & & & \\
\ldots \arrow[r] & H_5(A_1 \cup A_2) \arrow[r, "\partial^1_*"] & H_4(A_1 \cap A_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots & \\
 & \ldots \arrow[r] & H_4(B_1 \cup B_2) \arrow[r, "\partial^2_*"] & H_3(B_1 \cap B_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\
 & & & H_3(\mathbb{T}^3 \setminus \widehat{V}) &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Определим ρ как композицию гомоморфизмов из (4):

$$\rho = \partial^1_* \circ \partial^2_* : H_5(X) \longrightarrow H_3(\mathbb{T}^3 \setminus \widehat{V}).$$

Пусть образом цикла $\gamma \in H_5(X)$ при отображении ρ является не гомологичный нулю цикл Γ, лежащий в $\mathbb{T}^3 \setminus V$. Заметим, что из нетривиальности Γ следует нетривиальность γ. В самом деле, конструкция связывающего гомоморфизма $\partial_* : H_p(U_1 \cup U_2) \to H_{p-1}(U_1 \cap U_2)$ в последовательности Майера-Виеториса для U_1 и U_2 такова: n–мерный цикл γ в $U_1 \cup U_2$ представляется в виде суммы цепей $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $|\gamma_i| \subset U_i, i = 1, 2$, после чего полагается $\partial_*[\gamma] = [\partial\gamma_1]$. В нашем случае получим, что $\rho[\gamma] = \partial^1_*\big[\partial^2_*[\gamma]\big] = [\Gamma]$.

2. Зададим γ в $\mathbb{X}$ как сумму трех цепей γ_i, γ_j и γ_k, определенных следующим образом:

$$\gamma_i = \overline{\{|z^{v^i}| = r_1, |z^{v^j}| \leqslant r_2, |z^{v^k}| \leqslant r_3\}},$$

$$\gamma_j = \overline{\{|z^{v^i}| \leqslant r_1, |z^{v^j}| = r_2, |z^{v^k}| \leqslant r_3\}},$$

$$\gamma_k = \overline{\{|z^{v^i}| \leqslant r_1, |z^{v^j}| \leqslant r_2, |z^{v^k}| = r_3\}}$$

(черта сверху означает замыкание в $\mathbb{X}$). Не трудно убедиться, что γ — цикл в $\mathbb{X}$, т.е. что $\partial\gamma = \partial\gamma_i + \partial\gamma_j + \partial\gamma_k = 0$. В самом деле, $\partial\gamma_i = h_{ij} - h_{ik}, \partial\gamma_j = h_{jk} - h_{ij}, \partial\gamma_k = h_{ik} - h_{jk}$, где

$$h_{ij} = \overline{\{|z^{v^i}| = r_1, |z^{v^j}| = r_2, |z^{v^k}| \leqslant r_3\}},$$

$$h_{jk} = \overline{\{|z^{v^i}| \leqslant r_1, |z^{v^j}| = r_2, |z^{v^k}| = r_3\}},$$

$$h_{ik} = \overline{\{|z^{v^i}| = r_1, |z^{v^j}| \leqslant r_2, |z^{v^k}| = r_3\}}.$$

При достаточно малых r_1, r_2 и r_3 цикл γ лежит в X.

Для доказательства заметим, что γ_i, γ_j и γ_k расслаиваются на семейство двупараметрических:

$$\gamma_i = \{z = e^{i\varphi} \cdot r_1^{v_i} \cdot t_1^{v_j} \cdot t_2^{v_k} : |t_1| \leqslant r_2, |t_2| \leqslant r_3\}_{\varphi\in[0,2\pi]},$$

$$\gamma_j = \{z = e^{i\varphi} \cdot r_2^{v_j} \cdot t_1^{v_i} \cdot t_2^{v_k} : |t_1| \leqslant r_1, |t_2| \leqslant r_3\}_{\varphi\in[0,2\pi]},$$

$$\gamma_k = \{z = e^{i\varphi} \cdot r_3^{v_k} \cdot t_1^{v_i} \cdot t_2^{v_j} : |t_1| \leqslant r_1, |t_2| \leqslant r_2\}_{\varphi\in[0,2\pi]}.$$

Согласно конструкции торического многообразия $\mathbb{X}$ сдвинутая двупараметрическая γ_i сходится при $t_1, t_2 \to \infty$ к точкам орбит $O_j \subset D_j$ и $O_k \subset D_k$ [5, 7], следовательно, каждое из двупараметрических семейств γ_i из всех $\mathbb{T}_N$–инвариантных дивизоров пересекает лишь D_j и D_k. Аналогично, γ_j пересекает лишь D_i и D_k, а γ_k — лишь D_i и D_j. Таким образом, из всех D_m, $m = 1, \ldots, d$ цикл γ пересекает лишь D_i, D_j и D_k, лежащие в X.

Осталось показать, что при соответствующем выборе r_1, r_2 и r_3 цикл γ не будет пересекать $\widehat{V}$. Действительно, D_i, D_j и D_k не входят в состав V, значит, к многочлену $F(\xi)$ применима лемма 1, обеспечивающая единственную вершину многогранника Ньютона $\Delta_{p(z)}$, в которой достигается одновременный минимум всех трех скалярных произведений $\langle v_l, \alpha\rangle$, $l = i, j, k$. При этом условии сужение полинома $p(z)$ на γ_i дает

$$\left|p(z)\big|_{\gamma_i}\right| = \left|p(e^{i\varphi} r_1^{v_i} t_1^{v_j} t_2^{v_k})\right| = \left|\sum_m C_m e^{i(k_1+k_2+k_3)\varphi} r_1^{\langle v_i,m\rangle} t_1^{\langle v_j,m\rangle} t_2^{\langle v_k,m\rangle}\right| = A(r_1,t_1,t_2) + o(A(r_1,t_1,t_2)),$$

где $A(r_1,t_1,t_2) = \left|C_\alpha r_1^{\langle v_i,\alpha\rangle} t_1^{\langle v_j,m\rangle} t_2^{\langle v_k,m\rangle}\right|$; o — знак бесконечно малой величины при $r_1 + |t_1| + |t_2| \to 0$. Следовательно, найдутся такие r_1^0, r_2^0, r_3^0, что для всех $r_1 \leqslant r_1^0$, $r_2 \leqslant r_2^0$, $r_3 \leqslant r_3^0$ сужение $p(z)\big|_{\gamma_i} \neq 0$.

3. Пусть γ — определенный выше вещественно 5-мерный цикл с носителем в X. Покажем, что образом $\rho[\gamma]$ является трехмерный цикл Γ, задаваемый в торе $\mathbb{T}^3$ равенством

$$\Gamma = \{|z^{v^i}| = r_1, |z^{v^j}| = r_2, |z^{v^k}| = r_3\},$$

где v^i, v^j, v^k — векторы со свойством $\langle v^s, v_l\rangle = \delta_{sl}$, $s, l \in \{i, j, k\}$.

Представим цикл γ как сумму двух цепей из A_1 и A_2. Из рассуждений, приведенных в предыдущем пункте доказательства, следует, что цепи $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$ не пересекают, соответственно, дивизоров D_i, D_j, D_k. Значит, носитель $|\gamma_k|$ цепи γ_k целиком лежит в $A_2 = X \setminus D_k$. Представим A_1 в виде

$$A_1 = (X \setminus D_i) \cup (X \setminus D_j).$$

Носитель каждой из цепей γ_i и γ_j лежит, соответственно, в $(X \setminus D_i)$ и $(X \setminus D_j)$, следовательно, носитель цепи $\gamma_i + \gamma_j$ лежит в их объединении, т.е. в A_1. Итак, цикл γ можно представить как сумму двух цепей: $(\gamma_i + \gamma_j)$ из A_1 и γ_k из A_2.

Поскольку цепи $(\gamma_i + \gamma_j)$ и γ_k имеют одну границу, по конструкции связывающего гомоморфизма ∂_*^1 полагаем:

$$\partial_*^1[\gamma] = [\partial\gamma_k] = [h_{ik} - h_{jk}].$$

Рассуждая аналогично, заметим, что цикл $h_{ik} - h_{jk}$ есть сумма цепей, первая из которых имеет носитель в B_1, а вторая — в B_2, причем цикл Γ является границей обеих этих цепей. По конструкции ∂_*^2 получаем, что

$$\partial_*^2[h_{ik} - h_{jk}] = [\partial h_{ik}] = [\Gamma].$$

Итак, $\rho[\gamma] = \partial_*^1 \circ \partial_*^2[\gamma] = [\Gamma]$. Носитель $|\Gamma| \subset |\gamma|$, поэтому если $\gamma \in H_5(X)$, то Γ есть цикл в $\mathbb{T}^3 \setminus V$. Очевидно, что Γ нетривиален в $\mathbb{T}^3 \setminus V$ (это следует, например, из теоремы Мкртчяна–Южакова [12]). Лемма 2 доказана. □

Заметим в заключение, что справедливость леммы 2 влечет за собой нештейновость многообразия $X = \mathcal{K} \setminus (D \setminus (D_i \cup\ D_j \cup D_k))$, а значит, и многообразия $\mathcal{K} = \mathbb{X} \setminus V$. Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] Хованский А. Г. *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)*/ А. Г. Хованский // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления). Т. 22. – М.: ВИНИТИ, 1985. – С. 207–239.

[2] Kiselman C.O. *On entire functions of exponential type and undicators of anlytic functionals* / C.O.Kiselman // Acta Math. – 1967. – V. 117. – C. 1–35.

[3] Грауэрт Г. *Теория пространств Штейна:* пер. с нем. / Г. Грауэрт, Р. Реммерт. – М.: Наука, 1989.

[4] Яковлева О.В. *О штейновости дополнения алгебраической гиперповерхности в торическом многообразии* / О.В. Яковлева // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – №3. – С. 703–713.

[5] Знаменская О.В. *Гомологический метод в вопросе штейновости квазиторических многообразий*/ О.В. Знаменская, А.К. Цих / Многомерн. комплексн. анализ: Межвуз. сб. – Красноярск: КрасГУ, 2002. – С. 48–57.

[6] Cox D.A. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety* / D.A.Cox // J. Algebraic Geom. – 1995. – V. 4. – P. 17–50.

[7] Fulton W. *Introduction to toric varieties* / W.Fulton. – Princeton Univ. Press. 1993. – V. 131.

[8] Batyrev V. *On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties* / V.Batyrev, D.Cox // Duke Math. J. – 1994. – V. 45. – No. 2. – P. 293–338.

[9] Andreotti A. *The Lefschetz theorem on hyperplane sections* / A.Andreotti, T.Frankel // Ann. Math. – 1959. – V. 69. – P. 713–717.

[10] Спеньер Э. *Алгебраическая топология* / Э. Спеньер. – М.: Мир, 1971. – 630 с.

[11] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения* / А.К. Цих. – Новосибирск: Наука, 1988. – 241 с.

[12] Мкртчян М.А. *Многогранник Ньютона и ряды Лорана рациональных функций n переменных* / М.А. Мкртчян, А.П. Южаков // Изв. акад. наук. АрмССР. – 1982. – Т. 17. – С. 99–105.

[13] Gelfand I. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants* / I.Gelfand, M.Kapranov, A.Zelevinsky. – Birkhäuser, Boston, 1994.

[14] Forsberg M. *Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas* / M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh // Advances in Mathematics. – 2000. – V. 151. – P. 45–70.

ON NONSTEIN COMPLEMENTS TO THE HYPERSERFACES IN THREE-DIMENSIONAL TORIC MANIFOLDS

O.V.Znamenskaja

A class of nonstein complements to the divisor in three-dimensional manifold is discribed. The proof is based on the homological abstractions for the steiness property of a manifold.