

ПРИБЛИЖЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗЛУЧАЮЩИХ ЗВЕЗД  
С ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

А.М.Баранов<sup>\*</sup>, С.Ф.Тегай<sup>\*\*</sup>

*В рамках общей теории относительности рассматривается метод моделирования излучающих звезд, основанный на шивке Дармуа-Лихнеровича внешнего пространства Вайдья и внутреннего сферически симметричного пространства, заполненного идеальной жидкостью с линейным уравнением состояния. В качестве поверхности шивки выбрана сфера переменного радиуса  $R(u)$ . Скорость поверхности не совпадает со скоростью вещества на поверхности. Приближенное решение соответствующих уравнений Эйнштейна записывается в виде рядов Тейлора по степеням  $r-R(u)$ . Коэффициенты рядов находятся методом Коши-Ковалевской из условий шивки и уравнений Эйнштейна, взятых на поверхности. Рассматриваются задачи с граничным условием на заданной поверхности шивки и с начальными условиями при неопределенной поверхности соединения. В последнем случае при однородных начальных условиях приближенно найдена эволюция массы и радиуса звезды. Показано, что при достаточно малых компактных рассматриваемые модели не превращаются в черную дыру, а сгорают полностью.*

Уравнения Эйнштейна, являющиеся основными уравнениями общей теории относительности, не дают однозначного описания эволюции звезд. Дело в том, что только левая часть уравнений может быть записана по строго определенным правилам. Правая же часть, содержащая тензор энергии-импульса звездной материи, существенно зависит от наших знаний о природе вещества, составляющего ту или иную звезду. В частности, одной из наиболее сложных проблем оказывается выбор реалистичного **уравнения состояния** – соотношения между такими макроскопическими характеристиками звезд, как давление, плотность и энтропия; соотношения, которое определяется, тем не менее, микроскопическими свойствами вещества.

К сложности в интерпретации правой части уравнений Эйнштейна добавляется нелинейность левой. В общем случае система нелинейных уравнений гравитационного поля содержит шесть независимых функций (десять компонент метрического тензора, четыре из которых не являются независимыми из-за свободы выбора координат, описывающих четырехмерное пространство-время). Общая задача чрезвычайно сложна, и не решена даже для вакуума. Таким образом, кроме предположения о тензоре энергии-импульса, описывающего источник гравитационного поля, необходимо сделать еще и некоторые упрощающие предположения.

В первую очередь, мы ограничиваемся только сферически симметричными моделями. Это означает, что мы представляем звезду в виде невращающегося шара. Этим предположением количество переменных, от которых зависят характеристики звезды, сокращается с четырех до двух. Количество независимых компонент метрического тензора также уменьшается.

Интенсивное изучение сферически симметричных астрофизических моделей берет свое начало еще с модели гравитационного коллапса Оппенгеймера и Снайдера в 1939 г. [1]. В работе этих авторов использовано самое простое из уравнений состояния с давлением вещества, всюду равным нулю.

Впрочем, для более реалистичных уравнений состояния получить точное решение не так просто. Поэтому для поиска точных решений зачастую используют следующий подход. Вместо уравнения состояния, обычно лишь усложняющего систему, задают другое дополнительное предположение, не только замыкающее, но и упрощающее систему уравнений Эйнштейна. Так, методы, предложенные в [2] и [3], сводят уравнения к виду, совпадающему со статическим, что позволяет получать нестатические решения из известных статических. Другие встречающиеся в литературе допущения – бессдвиговая жидкость (см., например, [4] и ссылки в ней) и конформно плоская метрика (например, [5]).

Отдельно необходимо отметить подход, связанный с усилением симметрии модели. В общей теории относительности Эйнштейна симметрии пространства-времени описываются так называемыми векторами Киллинга [6]. Сферически симметричная модель уже имеет два вектора Киллинга, связанных с вращениями. Если потребовать существование еще одного вектора Киллинга, то гравитационное поле будет определяться не уравнениями в частных производных, а обыкновенными дифференциальными уравнениями. Наличие временноподобного вектора Киллинга приводит к статической модели. Другим важным примером решений с дополнительным векторным полем служат автомодельные решения. Эти решения интенсивно изучались в последнее время в связи с критическими явлениями гравитационного коллапса и образованием голых сингулярностей (см. обзор в [7] и классификацию в [8-9]). Такой интерес связан с тем, что автомодельные пространства могут возникать в процессе эволюции более сложных пространств (см. одну из последних работ

<sup>\*</sup> © А.М.Баранов, 2004; Красноярский госуниверситет (Россия); E-mail: bam@lan.krasu.ru.

<sup>\*\*</sup> © С.Ф.Тегай, 2004; Красноярский госуниверситет (Россия); E-mail: tegai\_s\_f@inbox.ru.

по этой теме и ссылки в [10]) или служить критическим решением в задаче об образовании черных дыр (см. [11] и ссылки в ней).

Помимо поиска внутреннего решения построение полной модели требует еще правильной его сшивки с внешним решением. Основное отличие сшивки в общей теории относительности от стандартных краевых задач математической физики состоит в том, что условия соединения должны быть записаны в **ковариантном** виде, то есть не должны зависеть от выбора координат. Впервые математический аппарат такого соединения был разработан Дармуа в 1927 г. [12]. Однако эта работа, по-видимому, долгое время была малоизвестной. По крайней мере, ранние работы по астрофизике не используют формализма Дармуа, а в 1952 г. О'Брайен и Синг предложили другой метод соединения [13], так же как и Лихнерович в 1955 г. [14]. В 1966 г. Израэль обобщил условия сшивки Дармуа на случай тонких оболочек в [15], и на текущий момент большинство авторов пользуется формализмом сшивки в виде, предложенном в этой работе. В 1981 г. Боннор и Вickers доказали эквивалентность условий Дармуа и Лихнеровича [16]. Наконец, в [17] показано, что условия сшивки О'Брайена-Синга следуют из условий Дармуа-Лихнеровича.

Именно условия сшивки Дармуа-Лихнеровича являются основой метода построения приближенных внутренних решений, рассматриваемого в данной работе. Отличительной чертой этого метода является то, что дополнительные предположения, которые мы делаем для построения модели, связаны в первую очередь с выбором уравнения состояния, а не с геометрическими характеристиками модели. Начальная попытка такого подхода была предпринята в [18].

Все вычисления производятся в общепринятой системе единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны единице.

### **Внешнее пространство звезды**

В данной работе в качестве внешнего выбрано **решение Вайдья** [4], описываемое в излучательных координатах Бонди  $(u, r, \theta, \varphi)$  метрикой

$$ds^{(+2)} = g_{\rho\sigma}^{(+)} dx^\rho dx^\sigma = \left(1 - \frac{2M(u)}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

и тензором энергии-импульса (ТЭИ) высокочастотного неполяризованного излучения

$$T_{\rho\sigma}^{(rad)} = -\frac{\dot{M}}{4\pi r^2} l_\rho l_\sigma, \quad (2)$$

где  $u, r, \theta, \varphi$  суть соответственно временная, радиальная и угловые координаты;  $M(u)$  – масса звезды; а  $l_\rho = \delta_\rho^0$  – **светоподобный геодезический вектор**,

$$l_\rho l^\sigma = 0, \quad l_{\rho;\sigma} l^\sigma = 0. \quad (3)$$

Точкой здесь и далее обозначается производная по временной переменной  $u$ , а точкой с запятой – ковариантная производная; скорость света и ньютоновская постоянная приняты равными единице (геометрическая система единиц). Для массы  $M$ , не зависящей от времени, метрика (1) превращается в метрику внешнего решения Шварцшильда. Так как след ТЭИ (2) равен нулю, его можно интерпретировать как ТЭИ некоторого чистого излучения, а само решение Вайдья в этом случае описывает внешнее поле излучающего острого астрофизического объекта.

### **Внутреннее пространство звезды**

В качестве внутреннего пространства-времени выберем сферически симметричное пространство с метрикой

$$ds^{(-2)} = g_{\rho\sigma}^{(-)} dx^\rho dx^\sigma = e^{2\beta(u,r)} \left(1 - \frac{2m(u,r)}{r}\right) du^2 + 2e^{\beta(u,r)} dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4)$$

обладающей двумя неизвестными функциями  $\beta(u,r)$  и  $m(u,r)$ , которые будем искать в виде рядов по степеням разности  $r-R(u)$ , где  $R(u)$  – радиус звезды. Тензор энергии-импульса зададим в приближении идеальной жидкости

$$T_{\rho\sigma} = (\mu + p)u_\rho u_\sigma - p \cdot g_{\rho\sigma}^{(-)}, \quad (5)$$

где  $\mu = \mu(u, r)$  – плотность энергии;  $p(u, r)$  – давление;  $u^\sigma = dx^\sigma/ds$  – 4-скорость. Мы не используем сопутствующую систему отсчета, поэтому 4-скорость имеет вид

$$u = \frac{e^{-\beta(u,r)}}{\sqrt{2w(u,r) + 1 - 2m(u,r)/r}} \left( \frac{\partial}{\partial u} + v(u,r) \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (6)$$

где 3-скорость жидкости  $v(u, r) \equiv w(u, r) \exp(\beta(u, r))$  не равна нулю, а подкоренное выражение удобно в дальнейшем обозначать как

$$2w + 1 - \frac{2m}{r} = U_w. \quad (7)$$

При таком подходе к описанию звездного вещества система уравнений Эйнштейна состоит из четырех уравнений на пять неизвестных функций  $m(u, r)$ ,  $\beta(u, r)$ ,  $\mu(u, r)$ ,  $p(u, r)$  и  $w(u, r)$ . Таким образом, количество неизвестных превышает число уравнений всего лишь на единицу, что исправляется подходящим выбором уравнения состояния.

Реальные уравнения состояния звездной материи чрезвычайно сложны. Поэтому обычно рассматривается политропное уравнение состояния

$$p = K(S)\rho^\gamma, \quad (8)$$

где  $S$  – удельная энтропия, а  $\rho = m_B n$  – плотность массы покоя жидкости, пропорциональная концентрации  $n$  барионов, каждый из которых имеет массу  $m_B$ . Плотность энергии  $\mu$  связана с  $\rho$  соотношением

$$\mu = \rho(1 + \omega), \quad (9)$$

где  $\omega$  – это удельная внутренняя энергия. Величина  $\omega$  содержит энергию взаимодействия частиц газа между собой. Из-за гравитационного взаимодействия она отлична от нуля даже для идеального газа при нулевой температуре.

Так как число барионов сохраняется, то плотность массы покоя  $\rho$  должна удовлетворять уравнению непрерывности  $\mathcal{J}^\sigma_{;\sigma} \equiv (\rho u^\sigma)_{;\sigma} = \rho_{;\sigma} u^\sigma + \rho u^\sigma_{;\sigma} = 0$ , где вектор  $\mathcal{J}^\sigma \equiv \rho u^\sigma$  имеет смысл вектора потока барионов. Выразим из этого уравнения расширение жидкости  $u^\sigma_{;\sigma}$ , и подставим в закон сохранения энергии, спроецированный на временноподобное направление:

$$u^\rho T_{\rho;\sigma} = \mu_{;\sigma} u^\sigma + (\mu + p)u^\sigma_{;\sigma} = 0. \quad (10)$$

В результате находим

$$(\mu_{;\sigma} - \frac{\mu + p}{\rho} \rho_{;\sigma}) u^\sigma = 0. \quad (11)$$

Сравним это выражение с первым законом термодинамики

$$d\mu = (\mu + p) \frac{dn}{n} + nTdS, \quad (12)$$

где  $T$  – температура, а  $dS$  – изменение удельной энтропии. Учитывая, что по определению  $\rho = m_B n$ , найдем  $S_{;\sigma} u^\sigma = 0$ , то есть удельная энтропия не меняется вдоль мировых линий элементов объема идеальной жидкости. Иными словами, течение идеальной жидкости всегда изоэнтропическое.

Интегрируя первый закон термодинамики (12) с давлением, заданным политропным уравнением состояния (8), при постоянной энтропии  $dS = 0$ , найдем

$$p = K\rho^\gamma = (\gamma - 1)\rho(\omega + C), \quad (13)$$

где  $C$  – константа интегрирования. При  $C = 0$  получим уравнение состояния так называемого **релятивистского идеального газа**

$$p = K\rho^\gamma = (\gamma - 1)\rho\omega, \quad (14)$$

а при  $C = 1$  имеем линейное уравнение состояния

$$p = K\rho^\gamma = (\gamma - 1)\mu, \quad (15)$$

которое переходит в ультрарелятивистское  $p = \mu/3$  для  $\gamma = 4/3$ . Линейное уравнение состояния (15) может быть получено из предыдущего (14) в пределе  $\omega \gg 1$ , то есть при внутренней энергии много большей, чем масса покоя. В этом пределе  $\mu = \rho(1 + \omega) \approx \rho\omega$  и, следовательно, уравнение состояния (14) переходит в соотношение  $p \approx (\gamma - 1)\mu$ .

Такое линейное уравнение состояния можно применить для приближенного описания компактных астрофизических объектов, например, нейтронных звезд и белых карликов. В частности, уравнение (15) с  $\gamma = 4/3$  есть известное ультрарелятивистское уравнение состояния, пригодное для описания вырожденного ферми-газа. Считается, что температура белых карликов и нейтронных звезд много меньше температуры выро-

ждения ферми-газа (энергии Ферми), из которого они состоят. Поэтому для модельного описания можно положить температуру равной нулю, а коэффициент  $K$  политропного уравнения состояния считать постоянным.

Уравнения Эйнштейна с линейным уравнением состояния принимают вид

$$\frac{1}{r^2} (\varepsilon m' - e^{-\beta} \dot{m}) = \frac{4\pi\mu}{U_w} ((w + \varepsilon)^2 + (\gamma - 1)w^2); \quad (16)$$

$$\frac{1}{r^2} m' = \frac{4\pi\mu}{U_w} (w + \varepsilon - (\gamma - 1)w); \quad (17)$$

$$\frac{1}{r^2} \beta' = \frac{4\pi\gamma\mu}{U_w}; \quad (18)$$

$$\varepsilon \left( \beta'' + \beta'^2 + \frac{\beta'}{r} \right) + e^{-\beta} \dot{\beta}' - \left( \frac{3m}{r} \right) \beta' - \frac{1}{r} m'' = 8\pi(\gamma - 1)\mu, \quad (19)$$

где  $\varepsilon = 1 - 2m/r$ , и последнее уравнение было поделено на  $r^2$ .

### **Формализм сшивки Дармуа-Лихнеровича**

Рассмотрим два 4-мерных пространства-времени  $M^{(+)}$ ,  $M^{(-)}$  с сигнатурой  $(+, -, -, -)$ , координатами  $x^{(+)\sigma}$ ,  $x^{(-)\sigma}$  и метрическими тензорами  $g^{(+)}_{\rho\sigma}(x^{(+)})$ ,  $g^{(-)}_{\rho\sigma}(x^{(-)})$  соответственно. В этих пространствах определим две несветоподобные трехмерные гиперповерхности  $\Sigma^{(+)}$  и  $\Sigma^{(-)}$  (в  $M^{(+)}$  и  $M^{(-)}$  соответственно). Выберем на них координаты  $\xi^{(+i)}$  и  $\xi^{(-i)}$ , в которых метрические тензоры поверхностей примут вид  $g^{(+)}_{ij}(\xi^{(+)})$  и  $g^{(-)}_{ij}(\xi^{(-)})$  (греческими индексами помечены координаты в 4-пространствах, латинскими – координаты на 3-поверхностях). Поверхность  $\Sigma^{(+)}$  делит пространство  $M^{(+)}$  на две части, которые мы обозначим как  $M_1^{(+)}$  и  $M_2^{(+)}$ . Точно так же поступим и для  $M^{(-)}$ . Формализм сшивки заключается в построении нового пространства  $M$  путем объединения одной из половин  $M^{(+)}$  с частью  $M^{(-)}$  при условии  $\Sigma^{(+)} = \Sigma^{(-)} \equiv \Sigma$ . Другими словами, имеется четыре варианта сшивки, а именно  $M_1^{(+)} \cup M_1^{(-)}$ ,  $M_1^{(+)} \cup M_2^{(-)}$ ,  $M_2^{(+)} \cup M_1^{(-)}$  и  $M_2^{(+)} \cup M_2^{(-)}$ . Соответствие точек на поверхности сшивки часто (хотя не обязательно) задается отождествлением координат  $\xi^{(+i)} = \xi^{(-i)}$ .

Следующие предложения верны одновременно и для  $M^{(+)}$ , и для  $M^{(-)}$ , так что мы опускаем индекс  $(\pm)$  в этом абзаце. Уравнение, задающее поверхность  $\Sigma$ , имеет вид

$$f(x^\sigma(\xi^i)) = 0. \quad (20)$$

Единичная нормаль к этой поверхности в  $M$  задается выражением

$$n_\sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}}} f_{,\sigma}. \quad (21)$$

Потребуем, чтобы  $n_\sigma n^\sigma \neq 0$ . Поверхность сшивки  $\Sigma$  назовем соответственно **временноподобной (пространственноподобной)** для  $n_\sigma n^\sigma = -1$  ( $n_\sigma n^\sigma = 1$ ). Базис векторов, касательных к  $\Sigma$ , записывается как

$$e_{(i)}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^i}, \quad (22)$$

и позволяет получить метрику на  $\Sigma$  (первую индуцированную форму)  $g_{ij} = g_{\rho\sigma} e_{(i)}^\rho e_{(j)}^\sigma$ . Внешняя кривизна (вторая индуцированная форма) определяется как

$$K_{ij} = e_{(i)}^\rho e_{(j)}^\sigma n_{\rho;\sigma} = -n_\sigma \left( \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma e_{(i)}^\alpha e_{(j)}^\beta \right). \quad (23)$$

Вторая часть равенства следует из определения ковариантной производной

$$n_{\rho;\sigma} = n_{\rho,\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha n_\alpha \quad (24)$$

и ортогональности векторов  $e_{(i)}^\sigma$  и  $n_\sigma$ :

$$\frac{\partial(n_\rho e_{(i)}^\rho)}{\partial \xi^j} = 0 = \frac{\partial n_\rho}{\partial \xi^j} e_{(i)}^\rho + n_\rho \frac{\partial e_{(i)}^\rho}{\partial \xi^j} = n_{\rho,\sigma} e_{(i)}^\sigma e_{(j)}^\rho + n_\sigma \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \xi^i \partial \xi^j}. \quad (25)$$

Условия Дармуа-Лихнеровича состоят в равенстве первой и второй индуцированных форм на поверхности соединения:

$$g_{\rho\sigma}^{(-)} dx^{(-)\rho} dx^{(-)\sigma} \Big|_{\Sigma} = g_{ij}^{(-)} d\xi^{(-)i} d\xi^{(-)j} = g_{ij}^{(+)} d\xi^{(+i)} d\xi^{(+j)} \Big|_{\Sigma} = g_{\rho\sigma}^{(+)} dx^{(+)\rho} dx^{(+)\sigma}; \quad (26)$$

$$K_{ij}^{(-)} d\xi^{(-)i} d\xi^{(-)j} = K_{ij}^{(+)} d\xi^{(+i)} d\xi^{(+j)}. \quad (27)$$

В случае  $\xi^{(+i)} = \xi^{(-i)}$  эти условия можно записать как

$$g_{ij}^{(+)} - g_{ij}^{(-)} = 0; \quad (28)$$

$$K_{ij}^{(+)} - K_{ij}^{(-)} = 0. \quad (29)$$

Если (28) и (29) удовлетворяются одновременно, то  $\Sigma$  – это **поверхность сшивки**. При выполнении только соотношения (28) получаем, что  $\Sigma$  – **тонкая оболочка**.

### Построение приближенного решения

В нашей модели поверхность сшивки  $\Sigma$  задана уравнениями  $f = r - R^{\pm}(u) = 0$  или, в параметрическом виде,  $\{u = u, r = R^{\pm}(u), \theta = \theta, \varphi = \varphi\}$ . То есть в качестве координат на поверхности мы выбрали  $\xi^i = (u, \theta, \varphi)$ . В связи с существующей свободой выбора системы отсчета, временная координата внутреннего пространства постулируется совпадающей со временем бесконечно удаленного наблюдателя в пространстве Вайдья. Для моделей с одинаковыми внешними и внутренними координатами непосредственно из (25) следует непрерывность метрических коэффициентов на поверхности:  $R^{(-)} = R^{(+)} = R$ ;  $m_R = M(u)$ ;  $\beta_R = 0$ .

Базис векторов, касательных к  $\Sigma$  имеет вид

$$e_{(u)} = \frac{\partial}{\partial u} + \dot{R} \frac{\partial}{\partial r}; \quad (30)$$

$$e_{(\theta)} = \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad (31)$$

$$e_{(\varphi)} = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (32)$$

а нормаль к  $\Sigma$  –

$$n = \frac{-\dot{R} du + dr}{\sqrt{2\dot{R} + 1 - 2M/R}}. \quad (33)$$

Аналогично (7) введем обозначение

$$2\dot{R} + 1 - \frac{2M}{R} = U, \quad (34)$$

с которым первая индуцированная форма принимает вид, одинаковый для обоих подпространств:  $ds^2 = U du^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ . Ненулевые компоненты вторых индуцированных форм равны

$$K_{uu}^{(-)} = \frac{\dot{R}\dot{\beta}_R + (\dot{R}^2 + \dot{R}U - U^2)\beta'_R}{\sqrt{U}} + \frac{\dot{m}_R + (\dot{R} + U)m'_R}{R\sqrt{U}} - \frac{M(\dot{R} + U)}{R^2\sqrt{U}}; \quad (35)$$

$$K_{uu}^{(+)} = \frac{\dot{M}}{R\sqrt{U}} - \frac{M(\dot{R} + U)}{R^2\sqrt{U}}; \quad (36)$$

$$K_{\varphi\varphi}^{(-)} = K_{\theta\theta}^{(-)} \sin^2 \theta = K_{\varphi\varphi}^{(+)} = K_{\theta\theta}^{(+)} \sin^2 \theta = \frac{R(U - \dot{R})}{\sqrt{U}} \sin^2 \theta. \quad (37)$$

Таким образом, наряду с непрерывностью компонент метрического тензора мы получаем из условий сшивки только одно нетривиальное уравнение. А именно, сравнивая  $K_{uu}^{(-)}$  и  $K_{uu}^{(+)}$ , и учитывая, что  $U \neq 0$ , находим

$$\dot{m}_R + (\dot{R} + U)m'_R + R(\dot{R}\dot{\beta}_R + (\dot{R}^2 + \dot{R}U - U^2)\beta'_R) = \dot{M}. \quad (38)$$

Заметим, что это уравнение линейно относительно значений первых производных неизвестных функций на поверхности  $\dot{m}_R$ ,  $m'_R$ ,  $\dot{\beta}_R$ ,  $\beta'_R$ . Можно получить еще два линейных уравнения на эти же величины, продифференцировав по временной координате  $u$  условия непрерывности  $m(u, R(u)) = M(u)$  и  $\beta(u, R(u)) = 0$ . Получим

$$\dot{m}_R + \dot{R}m'_R = \dot{M}; \quad (39)$$

$$\dot{\beta}_R + \dot{R}\beta'_R = 0. \quad (40)$$

И, наконец, еще три уравнения возникают из уравнений Эйнштейна (16)–(18), взятых на поверхности сшивки:

$$\dot{m}_R - \dot{R}\varepsilon_R m'_R + 4\pi R^2 \frac{(w_R + \varepsilon_R)^2}{2w_R + \varepsilon_R} \mu_R + 4\pi R^2 \frac{w_R^2}{2w_R + \varepsilon_R} p_R = 0; \quad (41)$$

$$m'_R - 4\pi R^2 \frac{w_R + \varepsilon_R}{2w_R + \varepsilon_R} \mu_R + 4\pi R^2 \frac{w_R}{2w_R + \varepsilon_R} p_R = 0; \quad (42)$$

$$\beta'_R - \frac{4\pi R^2}{2w_R + \varepsilon_R} \mu_R - \frac{4\pi R^2}{2w_R + \varepsilon_R} p_R = 0. \quad (43)$$

Только одно уравнение Эйнштейна (19) на данном этапе не рассматривается, так как содержит вторые производные функций  $m(u, r)$  и  $\beta(u, r)$ . Таким образом, мы имеем шесть уравнений (38)–(43) на шесть неизвестных  $\dot{m}_R$ ,  $m'_R$ ,  $\dot{\beta}_R$ ,  $\beta'_R$ ,  $\mu_R$  и  $w_R$ . Причем все переменные, кроме последней, входят в уравнения линейно.

Если считать  $w_R$  параметром, то при  $\dot{M} \neq 0$  система уравнений (38)–(43) является переопределенной неоднородной линейной системой. Такая система может иметь решение, только если определитель ее расширенной матрицы равен нулю:

$$4\pi \dot{M} R^2 \frac{U}{2w_R + \varepsilon_R} \left( (2 - \gamma)w_R - \gamma \dot{R} - (\gamma - 1)\varepsilon_R \right) = 0. \quad (44)$$

Так как  $U > 0$  для временноподобных поверхностей, то при  $\dot{M} \neq 0$  это уравнение позволяет найти значение скорости жидкости на поверхности

$$w_R = \frac{\gamma \dot{R} + (\gamma - 1)\varepsilon_R}{2 - \gamma}, \quad (45)$$

которое из-за внешнего излучения не равно скорости самой поверхности. Это означает, что за счет сублимации поверхность движется отдельно от образующих ее частиц (как геометрическая граница, а не как физическая). При этом значении  $w_R$  система (38)–(42) имеет единственное решение:

$$m'_R = -\frac{(2 - \gamma)^2 (U + \varepsilon_R) \dot{M}}{2(\gamma - 1)U^2}; \quad (46)$$

$$\beta'_R = -\frac{(2 - \gamma)^2 \dot{M}}{(\gamma - 1)RU^2}; \quad (47)$$

$$\mu_R = -\frac{(2 - \gamma)\dot{M}}{4\pi(\gamma - 1)R^2U}. \quad (48)$$

Вторые производные метрических функций  $m(u, r)$  и  $\beta(u, r)$  входят в уравнения Эйнштейна линейным образом. Все остальные неизвестные функции входят в уравнения Эйнштейна алгебраически. Это означает, что значения на поверхности вторых производных  $m(u, r)$  и  $\beta(u, r)$  связаны с поверхностными значениями первых производных функций  $\mu(u, r)$  и  $w(u, r)$  линейными уравнениями. Далее, продифференцировав уравнения Эйнштейна и условия сшивки  $n$  раз можно получить линейные уравнения, связывающие значения производных метрических функций  $(n+2)$ -ого порядка со значениями производных  $(n+1)$ -ого порядка функций, входящих в тензор энергии-импульса. Таким образом, все значения старших производных на поверхности могут быть найдены из систем *линейных* уравнений. К сожалению, с ростом порядка производных выражения для них становятся все более и более громоздкими, что существенно ограничивает наши возможности.

Определив значения производных на поверхности, запишем приближенное решение в виде рядов Тейлора по степеням  $r - R(u)$ , обрезанных на некотором слагаемом:

$$m(u, r) \approx M(u) + m'_R(u)(r - R(u)) + \frac{1}{2} m''_R(u)(r - R(u))^2 + \dots; \quad (49)$$

$$\beta(u, r) \approx \beta'_R(u)(r - R(u)) + \frac{1}{2} \beta''_R(u)(r - R(u))^2 + \dots; \quad (50)$$

$$\mu(u, r) \approx \mu_R + \mu'_R(u)(r - R(u)) + \dots; \quad (51)$$

$$w(u, r) \approx w_R + w'_R(u)(r - R(u)) + \dots \quad (52)$$

Чтобы найти следующие слагаемые рядов приближенного решения, воспользуемся проекциями закона сохранения энергии  $u_\rho T^{\rho\sigma}_{;\sigma} = 0$  и  $(u_\alpha u_\rho - g_{\alpha\rho}) T^{\rho\sigma}_{;\sigma} = 0$  и перепишем уравнения Эйнштейна в эволюционном виде

$$\dot{\mu}e^{-\beta} = -\left(w + \frac{\gamma-1}{2-\gamma}U_w\right)\mu' - \frac{\gamma\mu}{2-\gamma}w' - \frac{\gamma\mu}{2-\gamma}\left[\frac{4\pi\mu r(\gamma w + (\gamma-1)U_w)}{U_w} + \frac{6w+1-U_w}{2r}\right]; \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}e^{-\beta} = & -\frac{\gamma-1}{2-\gamma}\left[\frac{U_w^2}{\gamma} \cdot \frac{\mu'}{\mu} - \left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}w + U_w\right)w' - 4\pi\mu r(2w + U_w)\right] - \\ & - \frac{2(2-\gamma)w^2 + (5\gamma-4)wU_w - U_w^2 + (2-\gamma)w + U_w}{2r(2-\gamma)} \end{aligned} \quad (54)$$

с двумя условиями

$$m' = 4\pi\mu r^2\left(1 - \frac{\gamma}{U_w}w\right); \quad (55)$$

$$\beta' = 4\pi\mu r \frac{\gamma}{U_w}. \quad (56)$$

Рассматривая эволюционные уравнения (53) и (54) на поверхности сшивки и используя равенства

$$\frac{d\mu(u, R(u))}{du} = \dot{\mu}_R + \dot{R}\mu'_R; \quad (57)$$

$$\frac{dw(u, R(u))}{du} = \dot{w}_R + \dot{R}w'_R, \quad (58)$$

для того чтобы выразить  $\dot{\mu}_R$  и  $\dot{w}_R$ , получим систему из двух линейных уравнений на коэффициенты последнего приближения  $\mu'_R$  и  $w'_R$ . Определитель этой системы равен

$$-\frac{\gamma-1}{(2-\gamma)^2}U. \quad (59)$$

Он отличен от нуля для всех линейных уравнений состояния с  $\gamma \neq 1$ , кроме уравнения состояния для пыли. Решив систему, найдем

$$\begin{aligned} \mu'_R = & \frac{2-\gamma}{8\pi(\gamma-1)^2 R^3 U^3} \left[ -4(\gamma-1)\ddot{M} + (\gamma^2 + 4\gamma - 4)R\dot{U}\dot{M} - \right. \\ & \left. - U\dot{M} \left( \frac{2(\gamma-1)(\gamma^2 + 2\gamma - 4)}{2-\gamma}U - (\gamma^2 - 6\gamma + 4)\varepsilon_R - \gamma^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} w'_R = & \frac{1}{2(2-\gamma)RU^2\dot{M}} \left[ -2\gamma RU^2\ddot{M} + 4\gamma RU\dot{U}\dot{M} + \frac{(2-\gamma)^2}{\gamma-1}\dot{M}^2((3\gamma-2)U + (2-\gamma)\varepsilon_R) - \right. \\ & \left. - U^2\dot{M} \left( \frac{4\gamma(\gamma-1)}{2-\gamma}U - (3\gamma-2)(1-\varepsilon_R) \right) \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Чтобы найти коэффициенты рядов для метрических функций  $m(u, r)$  и  $\beta(u, r)$ , продифференцируем уравнения (55) и (56) и рассмотрим их на поверхности сшивки. Получим

$$\begin{aligned} m''_R = & \frac{2\pi(2-\gamma)R^2(U + \varepsilon_R)}{U}\mu'_R + \frac{(2-\gamma)^3\varepsilon_R\dot{M}}{\gamma(\gamma-1)U}w'_R - \\ & - \frac{(2-\gamma)^4\dot{M}}{(\gamma-1)RU^3} \left( \frac{(U + \varepsilon_R)(\gamma U - (2-\gamma)\varepsilon_R)\dot{M}}{(\gamma-1)U^2} + \frac{(2\gamma U^2 + (\gamma+1)\varepsilon_R U - (2-\gamma)\varepsilon_R(1-\varepsilon_R))}{(2-\gamma)^2} \right); \end{aligned} \quad (62)$$

$$\beta_R'' = \frac{4\pi(2-\gamma)R}{U} \mu_R' + \frac{2(2-\gamma)^3 \dot{M}}{\gamma(\gamma-1)RU^3} w_R' + \frac{(2-\gamma)\dot{M}}{\gamma(\gamma-1)RU^3} \left( \frac{(U + \varepsilon_R)\dot{M}}{(\gamma-1)U^2} - \frac{\gamma U - (2-\gamma)(1-\varepsilon_R)}{(2-\gamma)} \right). \quad (63)$$

Повторяя эту последовательность действий для производных по радиальной переменной  $r$  уравнений (53)–(56), можно найти значения на поверхности производных сколь угодно высокого порядка всех неизвестных функций.

Полученные таким методом ряды будут приближенно удовлетворять уравнениям Эйнштейна вблизи поверхности, однако их можно попытаться распространить на всю внутреннюю область звезды, выбрав оставшиеся члены ряда так, чтобы они удовлетворяли определенным условиям в центре. Минимальными являются следующие условия:

$$m(r=0) = m'(r=0) = m''(r=0) = \beta'(r=0) = w(r=0) = 0. \quad (64)$$

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы компоненты тензора Римана были ограничены в центре модели.

В рассматриваемом случае идеальной жидкости с линейным уравнением состояния ряды (49)–(52), задающие приближенное решение, зависят только от двух произвольных функций  $M(u)$  и  $R(u)$ . То есть при заданных  $M(u)$  и  $R(u)$  приближенное решение определено полностью и однозначно для всех моментов времени, включая некоторый начальный  $u = 0$ . Никакого начального условия не задается. Постановка рассматриваемой задачи типична для гиперболических уравнений: начальные условия третьего рода задаются на некоторой дуге, которая не является характеристикой и не касается характеристик. Однако можно рассмотреть и постановку задачи с некоторыми заданными начальными условиями  $w(u=0, r) = w_0(r)$  и  $\mu(u=0, r) = \mu_0(r)$ . В этом случае мы имеем те же условия третьего рода на поверхности сшивки и, в дополнение к ним, краевые условия, заданные на характеристике (так как  $u=0$  это характеристика уравнений Эйнштейна). Поскольку мы имеем больше краевых условий, чем в типичных задачах математической физики, поверхность сшивки не может оставаться произвольной. И действительно, из (43) и (46) можно выразить  $\dot{M}$  и  $\dot{R}$  через  $m_R$  и  $w_R$ , из (60) и (61)  $\ddot{M}$  и  $\ddot{R}$  через  $\mu_R'$  и  $w_R'$  и так далее. Однако величины  $\{\mu_R, w_R, \mu_R', w_R', \dots\}$  известны в начальный момент времени из начальных условий. Значит, можно найти производные  $\dot{M}(u=0)$ ,  $\dot{R}(u=0)$ ,  $\ddot{M}(u=0)$ ,  $\ddot{R}(u=0)$ , и так далее, а следовательно, и коэффициенты рядов Тейлора для функций  $M(u)$  и  $R(u)$  в точке  $u = 0$ . Таким образом, исходя из начальных условий можно определить движение поверхности и светимость звезды.

Так, для начальных условий с нулевой скоростью  $w(u=0, r) = 0$  и однородной плотностью  $\mu(u=0, r) = \mu_0 = const$  получим

$$\dot{M}(0) = -4\pi \frac{\gamma-1}{\gamma} \mu_0 R_0^2 \varepsilon_R(0); \quad (65)$$

$$\dot{R}(0) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \varepsilon_R(0); \quad (66)$$

$$\ddot{M}(0) = \frac{2\pi(\gamma-1)^2 \mu_0 R_0 \varepsilon_R(0)}{\gamma^2(2-\gamma)} \left( 8\pi(\gamma^2 + 4\gamma - 4) \mu_0 R_0^2 - \frac{(3\gamma^2 - 4\gamma + 4) \varepsilon_R(0) - \gamma^2 + 8\gamma - 4}{\gamma - 1} \right); \quad (67)$$

$$\ddot{R}(0) = \frac{-\varepsilon_R(0)}{2\gamma^2 R_0} \left( 8\pi(3\gamma - 2)(\gamma - 1) \mu_0 R_0^2 - (2\gamma - 1)(2 - \gamma)(1 - \varepsilon_R(0)) \right). \quad (68)$$

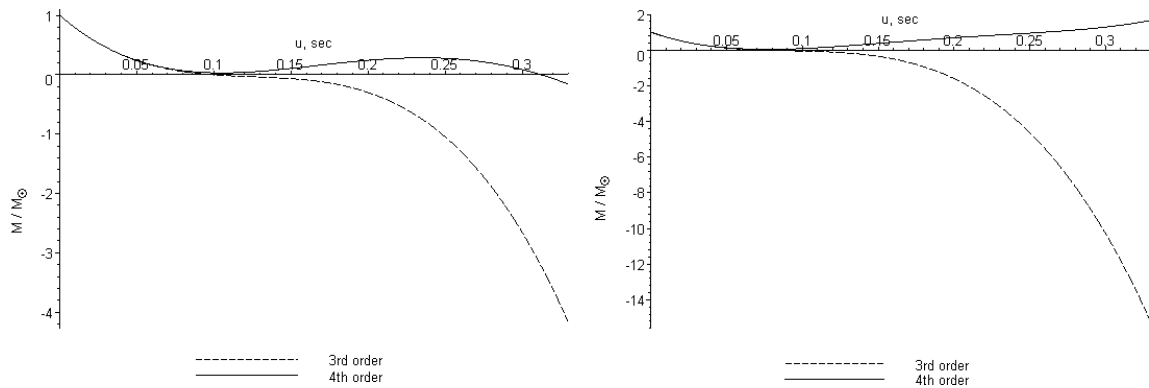


Рис. 1. Приближенные графики массы  $M(u)$  для звезд с  $p = \mu/3$ . Левый график соответствует  $\eta_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ , а правый –  $\eta_0 = 4 \cdot 10^{-4}$



Коэффициенты следующих приближений громоздки, однако их можно найти при помощи какого-либо компьютерного аналитического пакета и нарисовать. Например, рис. 1 показывает приближения третьего и четвертого порядка для вышеупомянутого случая нулевой начальной скорости и однородной плотности. Можно видеть, что при достаточно малых значениях начальной **компактности**  $\eta_0 = 2M_0/R_0$  звезды сгорают, полностью теряя свою массу, а не коллапсируют. К сожалению, мы не можем моделировать гравитационный коллапс таким методом, так как ряды с конечным количеством слагаемых не могут иметь конечного предела при  $u \rightarrow \infty$ .

**Пылевой предел**

Рассмотрим, что происходит, когда показатель  $\gamma$  уменьшается до единицы и, следовательно, вещество звезды становится близким к пыли. Из (45) сразу же находим, что  $w_R \rightarrow \dot{R}$  и  $\dot{M} \rightarrow 0$ . Это означает невозможность сшивки пыли и внешнего пространства Вайдья. Пусть  $\dot{M} = (\gamma-1)h(u)$ , где  $h(u)$  – некоторая функция, отличная от нуля. Тогда в низшем порядке по  $\gamma-1$  получим из (60)–(63)

$$m''_R, \beta''_R, \mu'_R \propto h(U(1 - \varepsilon_R) + R\dot{U})(\gamma - 1)^{-1}. \quad (69)$$

Чтобы для пыли  $m''_R, \beta''_R, \mu'_R$  оставались конечными, необходимо

$$U(1 - \varepsilon_R) + R\dot{U} = 0 \quad (70)$$

или в исходных обозначениях

$$\ddot{R} = -\frac{M}{R^2} \left( 3\dot{R} + 1 - \frac{2M}{R} \right). \quad (71)$$

Легко проверить, что это выражение эквивалентно известному закону движения пыли в синхронной системе отсчета [1]:

$$R^2 \frac{d^2 R}{d\tau^2} = -M. \quad (72)$$

Итак, сшивка по Дармуа-Лихнеровичу внешнего решения Вайдья и внутреннего приближенного решения для идеальной жидкости с линейным уравнением состояния позволяет сделать следующие выводы. Скорость жидкости на поверхности звезды не совпадает со скоростью самой поверхности из-за наличия внешнего излучения. Звезды с достаточно малой компактностью не образуют черных дыр, а сгорают (в отличие от пыли). Пыль не может быть сшита с внешним решением Вайдья. Кроме того, как предельный случай нами получено уравнение движения пыли в системе отсчета удаленного наблюдателя в координатах Бонди.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Oppenheimer J.R. *On Continued Gravitational Contraction*/ J.R.Oppenheimer, H.Snyder // Phys. Rev. – 1939. – V. 56. – P. 455.
2. Баранов А.М. *О внутреннем источнике решения Вайдья*/ А.М.Баранов, Н.Н.Паклин // Известия вузов (Физика). – 1988. № 3. – С. 36–39.
3. Herrera L. *Evolution of radiating fluid spheres in General Relativity*/ L.Herrera, J.Jimenez, G.I.Ruggeri // Phys. Rev. D. – 1980. – V. 22. – P. 2305.
4. Stephani H. *Exact solutions of Einstein's field equations*/ H.Stephani, D.Kramer, M.A.H.Maccallum, C.Hoenselaers, E.Herlt. – 2<sup>nd</sup> ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 701 p.
5. Herrera L. *Shear-free radiating collapse and conformal flatness*/ L.Herrera, G.Le Denmat, N.O.Santos, A.Wang // Int. J. Mod. Phys. D. – 2004. – V. 13. – P. 583–595.
6. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности* / А.З.Петров. – М.: Наука, 1966. – С.70.
7. Carr B.J. *Self-similarity in general relativity*/ B.J.Carr, A.A.Coley // Class. Quantum Grav. – 1999. – V. 16. – P. R31.
8. Maeda H. *A Classification of Spherically Symmetric Kinematic Self-Similar Perfect-Fluid Solutions* // H.Maeda, T.Harada, H.Iguchi, N.Okuyama // Prog. Theor. Phys. – 2003. – V. 108. – P. 819.
9. Maeda H. *A Classification of Spherically Symmetric Kinematic Self-Similar Perfect-Fluid Solutions II* // H.Maeda, T.Harada, H.Iguchi, N.Okuyama // Prog. Theor. Phys. – 2003. – V. 110. – P. 25–63.
10. Harada T. *Stability criterion for self-similar solutions with perfect fluids in general relativity*/ T.Harada // Class. Quantum Grav. – 2001. V. 18. – P. 4549.
11. Neilsen D.W. *Critical phenomena in perfect fluids*/ D.W.Neilsen, M.W.Choptuik // Class. Quantum Grav. – 2000. – V. 17. – P. 761.
12. Darmois G. *Les equations de la gravitation Einsteinienne. Memorial des science Mathematiques, Fascicule XXV*/ G.Darmois – Paris: Gauthier-Villairs, 1927.

13. O'Brien S. *Jump conditions of discontinuities in general relativity*/ S.O'Brien, J.L.Synge // Commun. Dublin Inst. Advanced Studies. – 1952. – P. 9.
14. Lichnerowicz A. *Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme*/ A.Lichnerowicz. – Paris: Masson, 1955.
15. Israel W. *Thin shells in general relativity*/ W.Israel // Nuovo Cim. – 1966. – V. 66. – P. 1.
16. Bonnor W.B. *Junction conditions in general relativity*/ W.B.Bonnor, P.A.Vickers // Gen. Rel. Grav. – 1981. – V. 13. – P. 29.
17. Mars M. *Geometry of general hypersurfaces in spacetime: junction conditions*/ M.Mars, J.M.M.Senovilla // Class. Quantum Grav. – 1993. – V. 10. – P. 1865-1897.
18. Baranov A.M. *An approximate radiating star model* / A.M.Baranov, S.F.Tegai // Book of Abstracts of 17th International Conference on General Relativity and Gravitation. – Dublin, 2004. – P. 81-82.

#### **AN APPROXIMATE RADIATING STAR MODEL**

**A.M.Baranov, S.F.Tegai**

*Within the framework of General Relativity and Gravitation an approach to a relativistic radiating stellar model constructing is suggested. To simulate radiation of the star the exterior space-time is chosen in the form of the outgoing Vaidya solution. The star ball is filled with a perfect fluid described by the linear equation of state. A sphere with varying radius  $R(u)$  is chosen as a surface of matching. The velocity of the surface is not equal to the velocity of the fluid on the surface. An approximate solution is written in the form of the Taylor series by powers of  $r-R(u)$ . Coefficients of the series are obtained from the Darmois-Lichnerowich matching conditions and the Einstein equations taken on the stellar surface using the Cauchy-Kowalewski method. The problem with initial conditions is also investigated. In this case the time dependence of the total mass  $M(u)$  and the surface radius  $R(u)$  for homogeneous initial conditions were found approximately in the form of the Taylor series. It is shown that stars with small compactness do not form black holes.*